F. LEJA

Sur la continuité de la somme des séries entières multiples

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 72-77
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__72_0>

SUR LA CONTINUITÉ DE LA SOMME DES SÉRIES ENTIÈRES MULTIPLES

PAR M. F. LEJA.

1. Soit

$$f(xy) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \tag{1}$$

une série entière double absolument convergente dans le domaine

$$\{ |x| < 1, \; |y| < 1 \}$$

et convergente [1] au point frontière $x = y = 1$. Il en suit que les séries simples

$$g_{\nu}(x) = \sum_{\mu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$h_{\mu}(y) = \sum_{\nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu} y^{\nu}, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots),$$

dites respectivement lignes et colonnes de la série double (1) convergent toutes dans le cercle unité $\left(\right.$tout en pouvant diverger aux points $x = 1$ et $y = 1$ comme le montre l'exemple de la série double correspondant à la fonction $\left.\frac{1 - y}{1 + x}\right)$.

Désignons par Δ_{α} le domaine du plan défini par les inégalités

$$|x| < 1, \qquad \frac{1 - x}{1 - |x|} < \alpha,$$

α étant un nombre quelconque $\geqq 1$ et posons

$$\left\{ \begin{aligned} &\limsup_{x \to 1,\, x \in \Delta_{\alpha}} |g_{\nu}(x)| = A_{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots), \\ &\limsup_{y \to 1,\, y \in \Delta_{\beta}} |h_{\mu}(y)| = B_{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots), \end{aligned} \right. \tag{2}$$

α et β étant quelconques $\geqq 1$ mais fixes.

---

[1] Une série double $\sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ converge vers la somme s si à tout $\varepsilon > 0$ cor-

Théorème. — *Si la série* (1) : 1° *converge absolument pour* $|x| < 1$ *et* $|y| < 1$, 2° *converge vers* s *au point* $x = y = 1$, *il faut et il suffit, pour que la limite double*

$$\lim_{x \to 1, y \to 1} f(xy) = s, \qquad \text{où } x \varepsilon \Delta_\alpha, \quad y \varepsilon \Delta_\beta \tag{3}$$

existe, que toutes les inégalités

$$A_\nu < \infty, \qquad B_\mu < \infty \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

soient satisfaites (¹).

On démontre ce théorème en posant

$$s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}, \qquad \lambda = (1 - x)(1 - y)$$

et en remarquant que, dans le domaine $\{ |x| < 1, |y| < 1 \}$, on a l'identité

$$f(xy) - s = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda(s_{\mu\nu} - s) x^\mu y^\nu,$$

où s est la limite de la suite double des sommes partielles $s_{\mu\nu}$.

De plus, on peut déduire de cette dernière identité la proposition suivante :

Si les conditions 1° *et* 2° *du théorème sont remplies et une au moins des limites* A_ν, B_μ *n'est pas finie, on a toujours*

$$\limsup_{x \to 1, y \to 1} |f(xy)| = \infty \tag{5}$$

pour $x \varepsilon \Delta_\alpha$, $y \varepsilon \Delta_\beta$.

Les théorèmes tout à fait analogues subsistent pour les séries entières à plus de 2 variables.

---

respond un p tel que $s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}$ diffère de s de moins de ε pour $\mu > p$ et $\nu > p$.

(¹) MM. T. Bromwich et G. Hardy ont montré que toutes les inégalités $|s_{\mu\nu}| < M$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots$ sont suffisantes, où M est un nombre fini (*Proceed. Lond. Math. Soc*, 2ᵉ série, t. 2, 1905).

2. Ces résultats peuvent être généralisés comme il suit : Posons

$$A_\nu^\mu = \binom{\mu+\nu}{\mu}$$

et soient p et q deux nombres naturels fixes. Nous dirons que la série double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \tag{6}$$

est *sommable d'ordre* (p, q) *au sens de Cesàro* si la suite double

$$C_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{A_{\mu-i}^{p} A_{\nu-j}^{p}}{A_\mu^p A_\nu^q} a_{ij} \tag{7}$$

converge. Lorsque $p = q = 0$ on a $C_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}$ et la sommabilité se réduit à la convergence.

On peut prouver que les théorèmes précédents restent vrais si l'on remplace dans leurs énoncés la condition 2° par la suivante : *La série* (1) *est sommable d'ordre* (p, q) *au sens de Cesàro au point* $x = y = 1$.

Cela résulte de l'identité suivante ayant lieu dans le domaine $\{|x|<1, |y|<1\}$

$$f(xy) - s = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda A_\mu^p A_\nu^q (C_{\mu\nu} - s) x^\mu y^\nu \tag{8}$$

où l'on a posé

$$\lambda = (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1}$$

et où s désigne la limite de la suite (7).

Partageons le second membre de (8) en quatre parties que voici :

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} - \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} = A + B + C + D$$

où n est un nombre naturel fixe ; on aura

$$A = (1-y)^{q+1} \sum_{\nu=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{\nu} A_{\nu-j}^q g_j(x) - s A_\nu^q \right] y^\nu,$$

$$B = (1-x)^{p+1} \sum_{\mu=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{\mu} A_{\mu-i}^p h_i(y) - s A_\mu^p \right] x^\mu,$$

d'où l'on voit que, si les conditions (4) sont remplies, les parties A et B de (8) tendent vers zéro avec $(1-x)$ et $(1-y)$ quel que soit n. La partie C tend évidemment aussi vers zéro et, si l'on pose

$$\varepsilon = \max |C_{\mu\nu} - s|, \qquad \text{pour } \mu > n,\ \nu > n,$$

an aura

$$|D| < \varepsilon \left|\frac{1-x}{1-|x|}\right|^{p+1} \left|\frac{1-y}{1-|y|}\right|^{q+1} = \varepsilon \alpha^{p+1} \beta^{q+1};$$

donc la limite (3) existe.

Si les conditions (4) ne sont pas remplies et si n est suffisamment grand les parties A et B ne sont pas toutes les deux bornées dans le voisinage de $x=y=1$ et l'on obtient la limite (5).

3. Désignons maintenant par p et q deux nombres non négatifs quelconques et posons

$$(9) \qquad E_{\mu\nu} = \frac{1}{(p+1)^{\mu}(q+1)^{\nu}} \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j} p^{\mu-i} q^{\nu-j} s_{ij}$$

où les s_{ij} sont les sommes partielles de la série double (6).

Si la suite (9) est convergente on dira que la série (6) est *sommable d'ordre (p, q) au sens d'Euler*. Lorsque $p=q=0$ on a $E_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}$ et cette sommabilité se réduit à la convergence.

Or, si la série entière (1) est sommable au sens d'Euler au point frontière $x=y=1$, il existe, comme plus haut, la limite (3) ou la limite (5) selon que les conditions (4) sont remplies ou non.

En effet, posons dans l'identité

$$f(xy) = (1-x)(1-y) \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} s_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}$$

ayant lieu dans le domaine $\{|x|<1,\ |y|<1\}$

$$x = \frac{u}{p+1-pu}, \qquad y = \frac{v}{q+1-qv}$$

u et v étant deux nouvelles variables complexes; on obtient l'identité

$$f\left(\frac{u}{p+1-pu}, \frac{v}{q+1-qv}\right) = (1-u)(1-v) \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} E_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}$$

ayant lieu dans le domaine $\{|u|<1,\ |v|<1\}$ qui correspond au domaine

$$(10)\qquad \left|x - \frac{p}{2p+1}\right| < \frac{p+1}{2p+1}, \qquad \left|y - \frac{q}{2q+1}\right| < \frac{q+1}{2q+1},$$

donc, s étant la limite de la suite (9), on a dans le domaine (10)

$$f(xy) - s = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \lambda(E_{\mu\nu} - s)\, u^{\mu} v^{\nu}$$

où $\lambda = (1-u)(1-v)$ et la méthode précédente permet d'achever la démonstration.

4. On a vu que, si la série (6) est convergente ou sommable, la limite (3) de la somme de la série (1) ne peut pas exister lorsque les limites (2) ne sont pas toutes finies. Observons que, si la série (6) n'est ni convergente ni sommable, la limite (3) peut exister même si les limites (2) ne sont pas toutes finies; cela montre l'exemple de la série correspondant à la fonction

$$f(xy) = (1-y)^{\frac{1}{1-x}}, \qquad f(0, 0) = 1$$

pour laquelle la limite (3) est $= 0$ bien que ses lignes sont

$$g_0(x) = 1, \qquad g_{\nu+1}(x) = \frac{x(2x-1)\ldots(\nu x - \nu + 1)}{(x-1)^{\nu+1}}, \qquad \nu \geqq 0,$$

et, par suite, toutes les limites A_ν, $\nu > 0$, sont infinies.

En terminant je vais indiquer encore une liaison qui existe entre les limites (2) et (3). Supposons que la série

$$f(xy) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) y^{\nu},$$

absolument convergente dans le domaine $\{|x| < 1, |y| < 1\}$, soit telle que l'inégalité (qui est évidemment satisfaite pour tous les $|x| < 1$)

$$(11)\qquad \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|g_\nu(x)|} \leqq 1$$

soit uniformément satisfaite pour tous les x voisins de $x = 1$ et appartenant à Δ_α. Dans ce cas la limite (3) ne peut pas exister si les limites A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots$ ne sont pas toutes finies.

En effet, supposons que la limite (3) existe et que $A_n = \infty$; pour un $\delta > 0$ suffisamment petit on aura

$$(12) \qquad |f(xy) - s| < 1, \qquad \text{pour } |1-x| < \delta, \ |1-y| < \delta,$$

où $x \varepsilon \Delta_\alpha$, $y \varepsilon \Delta_\beta$. Soit y_0 un point quelconque de module fixe, pour lequel $|1 - y_0| < \delta$, $y_0 \varepsilon \Delta_\beta$ et soit $\eta > 0$ un nombre tel qu'on ait

$$(1+\eta)|y_0| = \rho < 1.$$

En vertu de (11) on peut trouver deux nombres $p > n$ et $\delta' < \delta$ tels que

$$|g_\nu(x)| < (1+\eta)^\nu, \qquad \text{pour } \nu > p$$

et pour tous les $x \varepsilon \Delta_\alpha$ et $|1 - x| < \delta'$, donc on aura

$$|f(xy_0)| > \left| \sum_{\nu=0}^{p} g_\nu(x) y_0^\nu \right| - \frac{\rho^{p+1}}{1-\rho}$$

pour tous les $x \varepsilon \Delta_\alpha$, $|1 - x| < \delta'$, ce qui reste en contradiction avec (12) car la somme $\sum_{\nu=0}^{p} g_\nu(x) y_0^\nu$ n'est pas bornée dans le voisinage de $x = 1$.