BULLETIN DE LA S. M. F.

D. V. JONESCO

Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 224-229
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__224_0>

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. D. V. JONESCO.

M. P. Humbert ([1]) a attiré l'attention sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre

$$(1)\qquad \Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0,$$

qui généralise, à certains points de vue, l'équation de Laplace

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

J'ai établi encore un rapprochement entre l'équation (1) et l'équation (2), en démontrant un théorème pour l'équation (1) analogue au théorème de Lord Kelvin pour l'équation de Laplace.

Ce théorème est le suivant :

Si $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation* (1), *en posant*

$$p = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

la fonction

$$U_1(x, y, z) = U\left(\frac{x^2 - yz}{p}, \frac{y^2 - zx}{p}, \frac{z^2 - xy}{p}\right)$$

est encore une intégrale de l'équation (1).

La démonstration de ce théorème mettra en évidence plusieurs intégrales élémentaires de l'équation (1).

1. Soient ξ, η, ζ trois fonctions de x, y, z et posons

$$U_1 = U(\xi, \eta, \zeta).$$

---

(1) P. HUMBERT, *Sur une généralisation de l'équation de Laplace* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1929, p. 145).

Calculons $\Delta_3 U_1$; on trouve sans difficulté

$$(3)\qquad \begin{aligned}\Delta_3 U_1 = {} & A_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + A_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^3} + A_3 \frac{\partial^3 U}{\partial \zeta^3} + 3 C_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi\, \partial \eta\, \partial \zeta} \\ & + 3 B_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \dots \quad 3 D_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \dots \\ & + 3 E_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} + \dots \quad F_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \dots,\end{aligned}$$

où

$$(4)\qquad A = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^3 - 3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

. . . . ,

$$(5)\qquad \begin{aligned}C_1 = {} & \frac{\partial \xi}{\partial x}\left[2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right] \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial y}\left[2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right] \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial z}\left[2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right],\end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}B_1 = {} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z}\right] + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z}\right] \\ & + \frac{\partial \eta}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}\right]\end{aligned}$$

. . . . ,

$$(7)\qquad D_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z\, \partial x}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y}\right]$$

. . . . ,

$$(8)\qquad \begin{aligned}E_1 = {} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z}\right] + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z}\right] + \frac{\partial \eta}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y}\right] \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y\, \partial z}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial z}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\right]\end{aligned}$$

. . . . ,

$$(9)\qquad F_1 = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$$

. . . .

2. **Posons**

$$(10)\qquad \xi = \frac{x^2 - yz}{p}, \qquad \eta = \frac{y^2 - zx}{p}, \qquad \zeta = \frac{z^2 - xy}{p}$$

où

$$(11)\qquad p = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Remarquons les identités

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1 \tag{12}$$

et encore

$$\xi^2 - \eta\zeta = \frac{x}{p}, \qquad \eta^2 - \zeta\xi = \frac{y}{p}, \qquad \zeta^2 - \xi\eta = \frac{z}{p}. \tag{13}$$

En dérivant ξ, η, ζ par rapport à x, y et z nous avons

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{2x}{p} - 3\xi^2, & \frac{\partial\eta}{\partial x} &= -\frac{z}{p} - 3\eta\xi, & \frac{\partial\zeta}{\partial x} &= -\frac{y}{p} - 3\zeta\xi, \\
\frac{\partial\xi}{\partial y} &= -\frac{z}{p} - 3\xi\eta, & \frac{\partial\eta}{\partial y} &= \frac{2y}{p} - 3\eta^2, & \frac{\partial\zeta}{\partial y} &= -\frac{x}{p} - 3\zeta\eta, \\
\frac{\partial\xi}{\partial z} &= -\frac{y}{p} - 3\xi\zeta, & \frac{\partial\eta}{\partial z} &= -\frac{x}{p} - 3\eta\zeta, & \frac{\partial\zeta}{\partial z} &= \frac{2z}{p} - 3\zeta^2.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Tenant compte des relations (13), nous pouvons encore écrire

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{x}{p} - 3\eta\zeta, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{y}{p} - 3\zeta\xi, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{z}{p} - 3\xi\eta. \tag{14'}$$

Il résulte encore des égalités (14) que

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

et d'autres relations analogues.

Si nous dérivons les formules (14) nous avons

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{2}{p} - \frac{18x\xi}{p} + 18\xi^3$$

et

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} = \frac{2}{p} + 18\xi\eta\zeta.$$

Il résulte que

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} = 18\xi\left(\xi^2 - \eta\zeta - \frac{x}{p}\right) = 0; \tag{16}$$

on trouve aussi

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{16'}$$

3. Remarquons que d'après les relations (16) nous avons

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

et aussi

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0.$$

De même en utilisant les formules (14), nous avons

$$\begin{aligned} B_1 = &-\left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)^2 \left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right) \\ &-\left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right)^2 \left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right) - \left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)^2 \left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right) \\ &+\left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right)^2 \left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right) \\ &+\left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)^2 \left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right) + \left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)^2 \left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_6 = 0.$$

Nous savons que

$$\frac{1}{3}\log[(x+a)^3 + y^3 + z^3 - 3(x+a)yz]$$

est une intégrale de l'équation (1). En dérivant par rapport à a et en faisant ensuite $a = 0$, nous obtenons une nouvelle intégrale de l'équation (1) qui est précisément ξ. Donc

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0.$$

En tenant compte des formules (14) on a

$$A_1 = A_2 = A_3 = H$$

où

$$\begin{aligned} H = &-\left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)^3 - \left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)^3 - \left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right)^3 \\ &+3\left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)\left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)\left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right). \end{aligned}$$

Enfin tenant compte des formules (15) et (14), nous avons

$$\begin{aligned} C_1 = &\frac{\partial\xi}{\partial x}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] + \frac{\partial\xi}{\partial y}\left[\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right] \\ &+\frac{\partial\xi}{\partial z}\left[\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_1 = -H.$$

Il résulte alors que l'équation (3) se réduit à

$$\Delta_3 U_1 = H\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \zeta^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial \xi\,\partial \eta\,\partial \zeta}\right) = H\Delta_3 U,$$

ce qui prouve que $U_1(x, y, z)$ est aussi une intégrale de l'équation (1). Le théorème est donc démontré.

4. Soient f et g deux fonctions de x, y et z. On démontre sans peine que

$$(17)\quad \Delta_3(fg) = f\Delta_3 g + g\Delta_3 f + 3\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right]\right\}.$$

Remplaçons dans cette formule f par η et g par ζ. Si nous tenons compte que η et ζ sont des intégrales de l'équation (1), et aussi des relations (15) nous aurons

$$\Delta_3(\eta\zeta) = 0.$$

ce qui prouve que $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ *sont des intégrales de l'équation* (1).

De même si nous faisons dans la formule précédente

$$f = g = \xi.$$

nous aurons

$$\Delta_3(\xi^2) = 2\xi\Delta_3\xi + 3\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right] + \dots\right\}$$

$$= 2\xi\Delta_3\xi + 6\left\{\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y\,\partial z}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial z}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\right)\right\}.$$

Mais $\Delta_3\xi = 0$, et d'après les relations (16) la parenthèse est nulle, donc

$$\Delta_3(\xi^2) = 0,$$

ce qui prouve que ξ^2, η^2, ζ^2 *sont des intégrales de l'équation* (1).

Si nous tenons compte aussi des relations (13), nous déduisons que $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ *sont des intégrales de l'équation* (1).

Faisons maintenant dans la formule (17)

$$f = \xi^2,\ g = \eta.$$

nous aurons

$$\Delta_3(\xi^2\eta) = \xi^2\Delta_3\eta + \eta\,\Delta_3(\xi^2) + 3\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[2\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\right] + \ldots\right\}.$$

Il résulte d'après les formules (15) que

$$\Delta_3(\xi^2\eta) = 0,$$

ce qui prouve que $\xi^2\eta$, $\xi^2\zeta$, $\eta^2\xi$, $\eta^2\zeta$, $\zeta^2\xi$, $\zeta^2\eta$ *sont des intégrales de l'équation* (1).

Remplaçons dans la formule (17) f par ξ^2 et g par ξ. Nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta_3(\xi^3) &= \xi\,\Delta_3(\xi^2) + \xi^2\Delta_3\xi \\ &\quad + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{2\xi\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]\right\} + \ldots\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Delta_3(\xi^3) = 6\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^3 - 3\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right] = 6\,A_1.$$

Mais nous avons démontré plus haut que

$$\begin{aligned}A_1 = H = &-\left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)^3 - \left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)^3 - \left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right)^3 \\ &+ 3\left(\frac{x}{p} + 3\eta\zeta\right)\left(\frac{y}{p} + 3\xi\zeta\right)\left(\frac{z}{p} + 3\xi\eta\right).\end{aligned}$$

Si nous faisons les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}H = &-\frac{1}{p^2} - \frac{9}{p^2}[(x^2 - yz)\eta\zeta + (y^2 - zx)\zeta\xi + (z^2 - xy)\xi\eta] \\ &- \frac{27}{p}[x\eta^2\zeta^2 + y\zeta^2\xi^2 + z\xi^2\eta^2 - \xi\eta\zeta(x\xi + y\eta + z\zeta)] \\ &+ 27[\eta^2\zeta^2(\xi^2 - \eta\zeta) + \zeta^2\xi^2(\eta^2 - \xi\zeta) + \xi^2\eta^2(\zeta^2 - \xi\eta)].\end{aligned}$$

Si nous tenons compte des formules (12) et (13), on déduit immédiatement que

$$H = -\frac{1}{p^2}.$$

Donc

$$\Delta_3(\xi^3) = \Delta_3(\eta^3) = \Delta_3(\zeta^3) = -\frac{1}{p^2}.$$

On démontre de la même manière que

$$\Delta_3(\xi\eta\zeta) = \frac{1}{p^2}.$$
