BULLETIN DE LA S. M. F.

S. MANDELBROJT

Quelques relations fonctionnelles entre les séries de Dirichlet générales

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 230-244
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__230_0>

QUELQUES RELATIONS FONCTIONNELLES ENTRE LES SÉRIES DE DIRICHLET GÉNÉRALES;

PAR M. S. MANDELBROJT.

1. Nous commençons par généraliser la relation fonctionnelle bien connue de Riemann qui existe entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$

$$\zeta(1-s) = 2\Gamma(s)\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)s}\zeta(s). \tag{1}$$

Une partie de notre méthode consiste à employer la formule de Poisson sous les différentes formes que lui a données M. Mordell [1].

Voici les deux énoncés de M. Mordell.

L'énoncé A : on a

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\+\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2n\pi ix}dx = \sum_{\substack{n=-\infty\\+\infty}} \frac{1}{2}[f(n-0)+f(n+0)]. \tag{2}$$

si les conditions suivantes ont lieu :

a. $f(x)$ est de variation bornée dans les intervalles

$$\varepsilon < |x| < N$$

quelles que soient les quantités positives ε et N.

b. $f(x)$ est absolument intégrable pour

$$|x| < N$$

c. $f(x)$ possède une dérivée du second ordre pour $|x| > N$.

d.
$$\lim_{|x|=\infty} f(x) = \lim_{|x|=\infty} f'(x) = 0.$$

[1] *Voir* pour A : *Proceedings of the Cambridge Phil. Society*, vol. XXIV, Partie 4, 1928, p. 586 et, pour B, *Journal of the London Mat. Society*, vol. 4, Partie 4, 1929, p. 286.

e. **Les intégrales**

$$\int^{\infty} f(x)\,dx,\quad \int^{-\infty} f(x)\,dx,\quad \int^{\infty} |f''(x)|\,dx,\quad \int^{-\infty} |f''(x)|\,dx$$

sont convergentes.

f. **La série**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(n-0)+f(n+0)]$$

converge.

L'énoncé B : on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2n\pi i x}\,dx \tag{3}$$

si les conditions suivantes ont lieu.

a'. **Même condition que** *d*.
b'. $f(x)$ **et** $f'(x)$ **sont continues.**
c'. **Les intégrales**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,dx$$

convergent.

Le symbole $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}$ **a la signification suivante :**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \lim_{\lambda=\infty} \sum_{n=-\lambda}^{\lambda}$$

C'est en employant A que M. Mordell démontre (1) ([1]**), et il démontre la relation d'Hurwitz**

$$\zeta(1-s,\,a) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left\{\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi na)}{n^s} + \sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi na)}{n^s}\right\}$$

où

$$\zeta(s,\,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},$$

en employant B ([2]**).**

---

[1] ***Proceeding of the Cambridge Phil. Society, loc. cit.***
[2] ***Journal of the London. Math. Society, loc. cit***

Outre la formule de Poisson, nous employons une formule due à M. Hadamard et concernant les séries de Dirichlet admettant une abscisse de convergence absolue. M. Perron l'a généralisée en substituant l'abscisse de convergence absolue à celle de convergence simple. Nous employons ce théorème sous la forme très générale que lui a donnée M. Marcel Riesz (¹). Rappelons quelques définitions et théorèmes de la théorie de sommabilité des séries de Dirichlet également dus à M. M. Riesz.

La série Σa_n est dite sommable (λ, k) où $k > 0$, si

$$(1)\qquad \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sum\limits_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m}{\omega^k}$$

existe.

C. Si $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s'}$ est sommable (λ, k), $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable

$$\sigma > \sigma' \qquad (s = \sigma + it,\ s' = \sigma' + it').$$

Il existe donc une abscisse $\sigma = \sigma_k$ de sommabilité (λ, k). L'expression

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m e^{-\lambda_m s}}{\omega^k}$$

tend d'ailleurs uniformément vers une fonction analytique $f(s)$, quand ω tend vers l'infini, s restant dans un domaine borné tel que $\sigma > \sigma_k + \varepsilon > \sigma_k$.

D. De même la série $\Sigma a_n \lambda_n^p e^{-\lambda_n s}$ est uniformément sommable (λ, k) dans D et l'expression

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\sum\limits_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m \lambda_m^p e^{-\lambda_m s}}{\omega^k}$$

représente la fonction $(-1)^p f^{(p)}(s)$.

E. Si $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable (λ, k) pour $s = s'$, on a uniformément pour $\sigma > \sigma' + \varepsilon > \sigma'$

$$f(s) = o(|t|^{k+1})$$

(¹) Hardy et M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge, University Press, 1915 (n° 18).

c'est-à-dire

$$\lim_{|t|=\infty}\left|\frac{f(s)}{t^{k+1}}\right| = 0.$$

F. Enfin voici le théorème de Riesz qui généralise celui de MM. Hadamard et Perron.

Si $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable (λ, k) on a pour $k' \geqq k$ et en posant

$$\sigma' > \operatorname{Max}(0, \sigma_k).$$

$$(5)\qquad \sum_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^{k'} a_m = \frac{\Gamma(k'+1)}{2\pi i}\int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{f(s)}{s^{k'+1}}\, ds.$$

Nous conviendrons de dire que $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable $(\lambda, 0)$ quand elle converge dans le sens ordinaire de ce mot, et nous désignerons par σ_0 son abscisse de convergence simple.

De même nous dirons qu'elle est sommable $(\lambda, -1)$ si elle converge absolument. Nous désignerons par σ_{-1} son abscisse de convergence absolue.

Aucune ambiguïté n'est à craindre car la sommabilité de M. Riesz n'est définie que pour $k > 0$.

G. Il résulte alors, d'après les théorèmes connus, que les théorèmes C, D ont encore lieu si $k = 0, -1$. Le théorème E a lieu pour $k = 0$; pour $k = -1$ on doit remplacer o par O, c'est-à-dire on a pour $\sigma > \sigma_{-1} + \varepsilon$ uniformément

$$f(s) = O(1) = O(|t^0|)$$

autrement dit

$$|f(s)| < M.$$

H. Le théorème F a lieu pour $k = 0, -1$, à condition d'y poser $k' > 0$.

2. Pour rendre les énoncés plus accessibles, nous énonçons le premier théorème d'abord pour $k = 0$ et $k = -1$, ensuite pour k quelconque.

Théorème I^a. — *Soit $\varphi(s)$ une fonction représentée par une série de Dirichlet*

$$(6)\qquad \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad s = \sigma + it$$

dont l'abscisse de convergence simple σ_0 est négative. Suppo-

sons que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0. \tag{7}$$

Posons

$$\varphi(2\pi ni) = b_n; \qquad \varphi(-2\pi ni) = b_{-n}.$$

Pour s réel et tel que

$$2 < s < 3 \tag{8}$$

la relation suivante a lieu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s) \frac{1}{(2\pi)^s} \left[e^{-\frac{\pi is}{2}} \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} + e^{\frac{\pi is}{2}} \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right]. \tag{9}$$

Toutes les séries de (9) convergent si (8) a lieu. Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné situé dans le demi-plan

$$\sigma > 2 + \varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0) \tag{10}$$

THÉORÈME I^b. — *Si* (6) *possède une abscisse de convergence absolue σ_{-1} négative, et si*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \tag{11}$$

la relation (9) *a lieu pour*

$$1 < s < 2 \tag{12}$$

Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné tel que

$$\sigma > 1 + \varepsilon. \tag{13}$$

THÉORÈME I^c. — *Supposons que la série*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s} \tag{6}$$

possède une abscisse de sommabilité (λ, k)

$$\sigma_k < 0.$$

Supposons que la fonction correspondante $\varphi(s)$ (¹) *est telle*

(¹) C'est-à-dire $\varphi(s) = \lim\limits_{\omega=\infty} \dfrac{\sum\limits_{\lambda_n<\omega} (\omega - \lambda_n)^k a_n e^{-\lambda_n s}}{\omega^k}$ pour $\sigma > \sigma_k$.

que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(m_k+2)}(0) = 0 \tag{14}$$

où

$$m_k = [k] \quad (^1). \tag{15}$$

Ces conditions étant vérifiées, la relation

$$\sum_n \sum_{\lambda_m < n} (n-\lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s) \frac{1}{(2\pi)^s} \left[e^{-\frac{\pi i s}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} + e^{\frac{\pi i s}{2}} \sum \frac{\bar{b}_n}{n^s} \right] \tag{9}$$

a lieu pour s réel tel que

$$k+2 < 1 < m_k + 3. \tag{16}$$

Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné de la variable s, tel que

$$\sigma > k + 2 + \varepsilon.$$

Remarquons que d'après les conventions de la page 233, les théorèmes I^a et I^b peuvent être considérés comme cas particuliers du théorème I^c énoncé pour $k \geqq 0$ et $k = -1$.

Démonstration des théorèmes I^a, I^b et I^c.

Il s'agit donc de démontrer le théorème I^c pour $k \geqq 0$ et $k = -1$.

Soit z un nombre réel tel que

$$k + 1 < z < m_k + 2. \tag{17}$$

On a d'après F (pour $k > 0$) et d'après H (pour $k = 0, -1$), pour n entier positif

$$\sum_{\lambda_m < n} (n-\lambda_m)^z a_m = \frac{\Gamma(z+1)}{2\pi i} \int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{1+z}} e^{ns} ds, \tag{18}$$

où $\sigma' > 0$.

Il résulte de (14) et (17) que la fonction

$$F_n(s) = \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}} \tag{19}$$

---

(1) $[x]$ désigne le plus petit entier non supérieur à x.

est holomorphe dans le rectangle ouvert de côtés

$$\sigma = 0, \qquad \sigma = \sigma', \qquad t = t_0 > 0, \qquad t = -t_0,$$

et continue dans ce rectangle fermé. C étant la frontière de ce rectangle on a

$$\int_C F_n(s)\,ds = 0. \tag{20}$$

Cette égalité a d'ailleurs lieu pour tout n [*voir* (19)] positif, négatif ou nul.

D'après (17) et d'après E (pour $k > 0$) et G (pour $k = 0, -1$), on voit que

$$\lim_{|t_0| = \infty} F_n(\sigma + it_0) = 0$$

uniformément par rapport à σ qui varie dans l'intervalle

$$0 \leqq \sigma \leqq \sigma'.$$

On a donc, d'après (18), (19), (20) et (21),

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{\kappa} a_m = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\varphi(it)}{(it)^{1+\kappa}} e^{nit}\,dt$$

ou, en posant

$$t = 2\pi x,$$

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{\kappa} a_m = \frac{\Gamma(\kappa + 1) e^{-\frac{\pi i(\kappa+1)}{2}}}{(2\pi)^{1+\kappa}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi i x)}{x^{1+\kappa}} e^{2n\pi i x}\,dx, \tag{22}$$

n étant entier positif.

x et κ étant réels, on pose

$$x^{\kappa} = e^{\kappa \log x},$$

avec

$$\log x = \log|x| - i\pi \quad \text{pour} \quad x < 0,$$

et

$$\log x \text{ réel} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Posons

$$\frac{\varphi(2\pi i x)}{x^{1+\kappa}} + T(x) = T_1(x) + i T_2(x).$$

Il est facile de voir que les fonctions réelles $T_1(x)$ et $T_2(x)$ satisfont aux conditions du théorème A. En effet :

a a lieu, car $T_1(x)$ et $T_2(x)$ sont analytiques en x pour

$$|x| > N.$$

b et *c* sont évidemment vérifiés.

d et *e* résultent immédiatement de D, (17) et E pour $k > 0$, et de G pour $k = 0, -1$.

f a lieu d'après (17) et E pour $k > 0$, et G pour $k = 0, -1$.

On a donc d'après le théorème A

$$(23) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi i x)}{x^{1+z}} e^{2n\pi i x}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2n\pi i)}{n^{1+z}}.$$

Nous allons maintenant démontrer que

$$(24) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi z i)}{x^{1+z}} e^{2n\pi i x}\, dx = 0,$$

si $n \leqq 0$.

$n \leqq 0$ étant donné, et p étant positif, on constate que la série

$$\sum_m a_m e^{-(\lambda_m - n + p)s},$$

est sommable (μ, k) avec

$$\mu_m = \lambda_m - n + p,$$

pour $\sigma > \sigma_k$ et que cette série fournit la fonction

$$\psi(s) = \varphi(s) e^{(n-p)s}. \quad [1]$$

Comme on ne restreint pas la généralité en supposant

$$\lambda_1 > 0, \quad [2]$$

on voit que

$$p < \lambda_1 - n + p.$$

---

[1] *Voir* Hardy et Riesz, th. 57.

[2] Car $\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} e^{\tau s} s^{-1-z}\, ds = 0$ si $\tau \leqq 0$.

Comme d'autre part on voit d'après (18) que

$$\sum_{\lambda_m - n + p < p} [p - (\lambda_m - n + p)]^z a_m = \frac{\Gamma(1+z)}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\psi(s)}{s^{1+z}} e^{ps}\, ds$$
$$= \frac{\Gamma(1+z)}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}}\, ds,$$

on constate immédiatement que pour $n \leqq 0$ on a

$$\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}}\, ds = 0,$$

(24) résulte de cette formule et de la formule (21).

Les formules (18), (23) et (24) démontrent les théorèmes I^a, I^b et I^c.

Pour voir que le second membre de (9) converge uniformément dans toute région fermée, située dans le demi-plan

$$\sigma > k + 2 + \varepsilon,$$

il suffit de constater d'après E que

$$b_n = O(n^{k+1}).$$

3. Soit

$$(25) \qquad \varphi(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \ldots + a_k e^{-\lambda_p s}$$

si (11) a lieu, on peut écrire pour $n > \lambda_p$

$$\sum_{m=1}^{p} (n - \lambda_m)^z a_m = n^z \sum_{m=1}^{p} a_m + z n^{z-1} \sum_{m=1}^{p} \lambda_m a_m$$
$$+ \frac{z(z-1)}{2!} n^{z-2} \sum_m \left[\frac{(z-2)}{3} \lambda_m^2 + \frac{(z-2)(z-3)}{3.4} \frac{\lambda_m^3}{n} + \ldots \right]$$
$$= \frac{z(z-1)}{2!} n^{z-2} f(z, \lambda, n);$$

$f(z, \lambda, n)$ étant borné quand z varie dans un domaine borné de la variable complexe.

Il en résulte que

$$\left| \sum_{m=1} (n - \lambda_m)^z a_m \right| = O(n^{\Re z - 2}). \quad (^1)$$

(¹) $\mathrm{R}z$ désigne la partie réelle de z.

La série du premier terme de (9) dont le terme général est

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m$$

converge donc dans ces conditions, uniformément dans tout domaine borné de la variable complexe s, situé dans le demi-plan

$$\sigma < 2 - \varepsilon.$$

Posons

$$(26) \qquad \begin{cases} n_m = [\lambda_m] + 1, \\ \mu_m = n_m - \lambda_m. \end{cases}$$

On constate immédiatement que pour $\sigma < 0$, le premier terme de (9) peut être mis sous la forme

$$\sum_{m=1}^{p} a_m \zeta(1 - s, \mu_m).$$

Si donc on pose en particulier

$$\varphi(s) = \left(1 - e^{-\frac{s}{2}}\right)^2 = 1 - 2e^{-\frac{s}{2}} + e^{-s},$$

Le théorème I^b a lieu et l'on peut écrire (9) sous la forme

$$(27) \qquad \sum_{m=1}^{3} a_m \zeta(1 - s, \lambda_m) = 8\Gamma(s) \frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s} \zeta_1(s),$$

où

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -2, \qquad a_3 = 1,$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_3 = 1,$$

et où $\zeta_1(s)$ est la fonction représentée par la série

$$(28) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

On constate aussi d'après cette dernière égalité, que le premier membre (27) est égal à

$$4\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(1 - s),$$

d'où la relation de Riemann.

4. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si σ_k est l'abscisse de sommabilité (λ, k) de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, on a pour*

$$x > \text{Max}(0, \sigma_k)$$

et pour s réel supérieur à $k+2$, la relation suivante :

$$(29)\quad \sum_n e^{-nx} \sum_{\lambda_m < n} (n-\lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s)\frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+2n\pi i)}{\left(n-\frac{xi}{2\pi}\right)^s} \quad [1].$$

Ces séries convergent pour $s > k+2$, le second membre de cette égalité converge absolument et uniformément dans toute région bornée du demi-plan

$$\sigma > k+2+\varepsilon$$

Ce théorème est aussi valable pour $k = -1$ et $k = 0$.

Comme dans la démonstration du théorème I^e^, on voit que si

$$x > \text{Max}(0, \sigma_k),$$
$$z > k+1,$$

on a

$$\sum_{\lambda_m < n} (n-\lambda_m)^z a_m = \frac{\Gamma(z+1)}{2\pi} e^{nx} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\varphi(s) e^{int}}{s^{1+z}} dt,$$

où $s = x + it$, $n > 0$ et

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{1+z}} e^{int}\, dt = 0$$

si $n \leqq 0$.

En employant d'autre part le théorème B sur la fonction

$$F(t) = \frac{\varphi(x+2\pi i t)}{(x+2\pi i t)^{1+z}} \quad [2].$$

---

[1] $\left(n - \frac{xi}{2\pi}\right)^s = A^s = e^{s\log A}$, $\log A = \log|A| + i\varphi_A$, $-\pi < \varphi_A < 0$.

[2] $(x+2\pi i t)^{1+z} = B^{1+z} = e^{\log B (1+z)}$, $\log B = \log|B| + i\varphi_B$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_B < \frac{\pi}{2}$. On peut aussi employer à cet effet le théorème A.

cet emploi étant légitime, comme on le constate immédiatement, on obtient le théorème I[c].

5. Supposons $k = -1$ (c'est-à-dire que $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ possède une abscisse de convergence absolue), et soit

$$x > \operatorname{Max}(0, \sigma_{-1}).$$

En conservant les notations (26) pour $m = 1, 2, \ldots$ posons en plus

$$L_m = -\log \mu_m = -\log(n_m - \lambda_m).$$

Supposons que

$$L_{m+1} > L_m;$$
$$\lim_{m=\infty} L_m = \infty.$$

Il est facile de voir que si l'on désigne par σ' l'abscisse de convergence absolue de

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-n_m x} e^{-L_m s},$$

on a

$$(30) \qquad \sigma' \leqq 0.$$

En effet comme la série

$$\Sigma |a_m| e^{-\lambda_m x}$$

converge, comme d'autre part

$$\lim_{m=\infty} \mu_m = 0,$$

la série

$$(31) \qquad \Sigma |a_m| e^{-n_m x}$$

converge aussi, d'où (30).

Posons

$$C_m = a_m e^{-n_m x},$$

et écrivons le premier terme de (29) sous la forme

$$\sum_n \sum_{n_m \leqq n} C_m [\mu_m + (n - n_m)]^{s-1} e^{-(n-n_m)x}.$$

Cette expression est composée des termes de la forme

$$C_m(\mu_m + r)^{s-1} e^{-rx},$$
$$m = 1, 2, \ldots; \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

La série

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{(\mu_m + r)^{1-\sigma}} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{r^{1-\sigma}}$$

converge quel que soit σ.

D'après (30) la série

$$\sum_m C_m e^{-L_m(s-1)} = \sum_m C_m \mu_m^{s-1}$$

converge absolument pour $\sigma > 1$.

On voit donc que la série [*voir* (31)]

$$\sum_m |C_m| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{(\mu_m + r)^{1-\sigma}}$$

converge pour $\sigma > 1$.

Il en résulte que si $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ possède une abscisse de convergence absolue σ_{-1} et si

$$x > \operatorname{Max}(0, \sigma_{-1})$$

on peut intervertir l'ordre de sommation dans le premier terme de (29), et le théorème II nous donne dans le cas, où $k = -1$

$$(32) \qquad \sum_m C_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-rn}}{(\mu_m + r)^{s-1}} - \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-L_m(s-1)}$$
$$\Gamma(s) \frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x + 2n\pi i)}{\left(n - \frac{xi}{2\pi}\right)^s},$$

si $\sigma > 1$.

n'_m étant une suite quelconque d'entiers positifs et x étant positif, la formule (32) a lieu chaque fois que l'on pose

$$\varphi(s) = \Sigma C_m e^{n'_m x} e^{-\lambda_m s}$$

où

$$\lambda_m = n'_m + e^{-L_m},$$

et que la série

$$\Sigma\,|C_m|\,e^{\delta n'_m} \qquad \delta > 0 \ (\delta \text{ fixe})$$

converge.

On voit en effet que dans ces conditions la série

$$\Sigma\, a_m\, e^{-\lambda_m s} = \Sigma\, C_m\, e^{n'_m x}\, e^{-\lambda_m s}$$

possède une abscisse de convergence absolue σ_{-1} et que

$$x > \mathrm{Max}(0, \sigma_{-1}).$$

Pour que (32) ait lieu, il suffit donc que

$$\overline{\lim}\, \frac{L\,|C_m|}{m} < 0 \tag{33}$$

et que n'_m soit une suite d'entiers positifs croissants.

Ces conditions étant vérifiées posons

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x + 2n\pi i) &= \Sigma\, a_m\, e^{-\lambda_m (x + 2\pi n i)} \\ &= \sum_m C_m\, e^{-e^{-L_m x} - 2e^{-L_m} n\pi i} = \alpha_n^x \qquad (n > 0). \\ \varphi(x - 2n\pi i) &= \Sigma\, a_m\, e^{-\lambda_m (x - 2n\pi i)} \\ &= \sum_m C_m\, e^{-e^{-L_m x} + 2e^{-L_m} n\pi i} = \beta_n^x \qquad (n > 0). \end{aligned} \right.$$

$$\varphi(x) = \sum_m C_m\, e^{-e^{-L_m x}} = \gamma(x)\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{(n+a)^s} = \zeta_x(s, a). \tag{35}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit* $F(s)$ *une fonction représentée par une série de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_n C_n\, e^{-L_n s}. \tag{21}$$

Supposons qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{L\,|C_n|}{n} < 0.$$

Cette condition étant vérifiée quelle que soit la quantité *fixe $x > 0$, on a la relation suivante*

$$
\begin{aligned}
F(s) = & -\sum_{m=1}^{\infty} C_m \zeta_x(-s, e^{l_m}) \\
& \frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi)^{s+1}} \Bigg[\zeta_{(x,F)}(s+1)\, e^{-\frac{\pi i s}{2}} + \gamma^{(x)} (2\pi)^{s+1} x^{-s-1} e^{\pi i s} \\
& \qquad \zeta_{(x,F)}(s+1)\, e^{+\frac{\pi i s}{2}} \Bigg].
\end{aligned}
$$

où

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta_{(x,F)}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(x)}}{\left(n - \frac{x}{2\pi i}\right)^s} \\
\zeta_{-(x,F)}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^{x}}{\left(n + \frac{x}{2\pi i}\right)^s}
\end{aligned}
\right\} \sigma > 1
$$

les $\alpha^{(x)}$, $\beta^{(x)}$ et $\gamma^{(x)}$ étant définis d'après (34).

On voit ainsi que des séries de Dirichlet très générales peuvent être exprimées par l'intermédiaire des séries de la forme

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n+d)^s}
$$

où d est réel ou complexe et les fonctions transcendantes connues.