BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE DIVE

Attraction des ellipsoïdes homogènes et réciproques d'un théorème de Newton

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 128-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__128_0>

ATTRACTION DES ELLIPSOIDES HOMOGÈNES ET RÉCIPROQUE D'UN THÉORÈME DE NEWTON ;

PAR M. PIERRE DIVE.

Nous appellerons *homoïde* [1] toute couche de densité uniforme, comprise entre deux surfaces fermées, homothétiques par rapport à un point intérieur.

La propriété classique [2] des homoïdes *ellipsoïdaux* de donner une attraction nulle en tout point intérieur à leur cavité est utilisé en Électrostatique, où elle permet, en particulier, de calculer la répartition des charges électriques à la surface d'un ellipsoïde conducteur [3]; elle joue aussi un rôle important dans la théorie des figures planétaires et des mouvements internes des astres fluides [4].

Cette propriété est-elle caractéristique des homoïdes ellipsoïdaux, ou bien, existe-t-il d'autres homoïdes non ellipsoïdaux, jouissant de la même propriété ?

Telle est la question qu'il nous a paru utile de résoudre.

La réponse à faire est négative; et le théorème classique admet la réciproque :

Tout homoïde n'exerçant aucune attraction dans sa cavité est un homoïde ellipsoïdal..

Cette proposition repose sur deux théorèmes, nouveaux à notre connaissance, exprimant des propriétés fondamentales de l'attraction des ellipsoïdes massifs. Sa démonstration comporte plusieurs parties.

---

(1) Pour Tait et Thomson, cette appellation ne concerne que les couches ellipsoïdales. *Cf.* Lord KELVIN and Peter Guthrie TAIT, *Treatise on Natural Philosophy,* part. II, n° 519, p. 66.

(2) Théorème de Newton.

(3) *Cf.* E. MASCART, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. I, p. 76.

(4) Pierre DIVE, *Rotations internes des astres fluides*, p. 72 (Blanchard, éditeur; Paris, 1930).

Nous établirons, tout d'abord, que le potentiel newtonien d'un corps homogène remplissant le volume limité par l'une des surfaces de l'homoïde est représenté, en tout point intérieur (x, y, z) par la somme d'une forme quadratique en x, y, z, et d'une constante. Nous verrons, ensuite, que les quadriques figurant les surfaces équipotentielles de ce champ d'attraction ne peuvent être que des ellipsoïdes homothétiques.

En remarquant alors que les surfaces équipotentielles du champ d'un ellipsoïde massif homogène sont, précisément, des ellipsoïdes homothétiques, nous serons naturellement conduit à nous demander s'il n'existe pas toujours un ellipsoïde homogène admettant une famille d'ellipsoïdes homothétiques donnée, quelconque, comme surfaces équipotentielles. Nous établirons qu'il en est bien ainsi.

Enfin, il ne nous restera plus, pour obtenir la proposition générale énoncée, qu'à prouver que tout corps homogène possédant dans une région intérieure le même potentiel qu'un ellipsoïde ne peut être différent de cet ellipsoïde.

1. Expression générale du potentiel newtonien de corps homogènes homothétiques. — Soient (S_1) et (S_λ) deux surfaces fermées homothétiques dans le rapport λ, limitant deux corps (V_1) et (V_λ) homogènes, de mêmes densité ρ; et désignons par

$$P(x, y, z), \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \qquad \text{et} \qquad M(a, b, c), \quad M_1(a_1, b_1, c_1);$$

deux couples de points correspondants, homothétiques dans le même rapport, et appartenant respectivement à chacun des corps.

Prenons le centre d'homothétie comme origine des axes. Les coordonnées des points P_1 et M_1 sont données, en fonction des coordonnées des points P et M, par les relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{\lambda}, & y_1 &= \frac{y}{\lambda}, & z_1 &= \frac{z}{\lambda} \\ a_1 &= \frac{a}{\lambda}, & b_1 &= \frac{b}{\lambda}, & c_1 &= \frac{c}{\lambda} \end{aligned} \right. \qquad (\lambda < 1);$$

nous supposerons que λ est inférieur à 1.

Le potentiel d'attraction newtonienne du corps (V_1) en P_1 a pour expression

$$(1) \qquad \square\Phi = \rho \iiint_{V_1} \frac{d\tau_1}{D_1},$$

où

$$d\tau_1 = da_1\, db_1\, dc_1 \qquad \text{et} \qquad D_1^2 = (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 + (z_1 - c_1)^2.$$

De même, le potentiel en P du corps (V_1) est

$$(2) \qquad \square\Phi_\lambda = \rho \iiint_{(V_\lambda)} \frac{d\tau}{D},$$

où

$$d\tau = da\, db\, dc \qquad \text{et} \qquad D^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Effectuons, dans cette intégrale, le changement de variables défini par les formules de transformation (I). Le jacobien se réduit à λ^3 et l'intégration est étendue maintenant au volume V_1; d'autre part,

$$D^2 = (\lambda x_1 - \lambda a_1)^2 + (\lambda y_1 - \lambda b_1)^2 + (\lambda z_1 - \lambda c_1)^2 = \lambda^2 D_1^2;$$

il vient donc

$$\square\Phi_\lambda = \rho \iiint_{V_1} \lambda^2 \frac{d\tau_1}{D_1} = \rho\lambda^2 \iiint_{V_1} \frac{d\tau_1}{D_1}$$

ou

$$(A) \qquad \Phi_\lambda(x, y, z) = \lambda^2 \square\Phi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right).$$

Si l'on connaît le potentiel Φ du corps V_1 en tout point $x_1 = \frac{x}{\lambda}$, $y_1 = \frac{y}{\lambda}$, $z_1 = \frac{z}{\lambda}$, cette formule donne le potentiel Φ_λ du corps (V_λ) au point correspondant $x = \lambda x_1$, $y = \lambda y_1$, $z = \lambda z_1$.

Il est facile d'en déduire l'expression générale du potentiel $\square\Psi_\lambda$ de l'homoïde de densité ρ limité par les surfaces homothétiques (S_1) et (S_λ); on a évidemment

$$(B) \qquad \Psi_\lambda(x, y, z) = \square\Phi(x, y, z) - \lambda^2 \square\Phi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right).$$

2. Pour que l'attraction de l'homoïde soit nulle, en tout point de sa cavité, il faut et il suffit que la fonction $\Psi_\lambda(x, y, z)$ se réduise à une constante dans tout le domaine (V_λ).

De cette condition on tire les égalités

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi\left(\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\lambda}, \dfrac{z}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\Phi\left(\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\lambda}, \dfrac{z}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\Phi\left(\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\lambda}, \dfrac{z}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}; \end{cases}$$

elles expriment que les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Φ sont homogènes et du premier degré par rapport à x, y, z.

Du point de vue mécanique elles impliquent les conséquences suivantes :

1° Les forces d'attraction dans la masse du corps homogène limité par la surface (S_1) sont, en tous les points d'un même rayon vecteur, proportionnelles aux distances des points agis au centre d'homothétie;

2° La direction du champ d'attraction est invariable le long d'un même rayon vecteur.

On sait que le champ d'attraction intérieur d'un ellipsoïde massif homogène, jouit des mêmes propriétés [1].

Les remarques que nous venons de faire fournissent donc une démonstration simple du théorème classique sur l'attraction des homoïdes ellipsoïdaux.

3. Dans un article récent, M. Wavre a attiré l'attention sur le fait que le potentiel Φ d'une masse homogène était une fonction analytique dans tout le domaine qu'elle occupe. Au voisinage du centre d'homothétie, que nous prenons comme origine des coordonnées, la fonction Φ est donc représentée par une série absolument et uniformément convergente, dans une sphère (s_1) de rayon non nul :

$$(4)\qquad \Phi \equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x, y, z),$$

[1] *Cf.* Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 40.

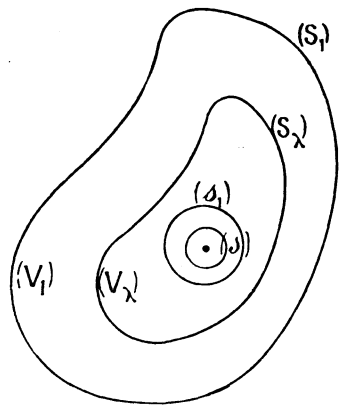
A_0 et A_n étant des constantes et P_n un polynome homogène en x, y, z de degré n.

Si le point $x_1 = \frac{x}{\lambda}$, $y_1 = \frac{y}{\lambda}$, $z_1 = \frac{z}{\lambda}$ se trouve dans (s_1), on a encore

$$\Phi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\lambda^n} P_n(x, y, z). \tag{5}$$

Supposons donc λ donné (c'est-à-dire l'épaisseur de la couche)

Fig. 1.



et soit (s) la sphère intérieure à (s_1) qui lui est homothétique dans le rapport λ. Quand (x, y, z) décrit (s), (x_1, y_1, z_1) décrit (s_1). Par hypothèse, la série (4) converge absolument et uniformément dans (s_1); la série (5) converge donc aussi absolument et uniformément dans (s). Il en résulte que les séries (4) et (5) convergent absolument et uniformément dans la sphère (s).

Dans ces conditions, on peut écrire l'identité, valable dans (s),

$$\Psi_\lambda(x, y, z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x, y, z) - \lambda^2 \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\lambda^n} P_n(x, y, z) \right] \tag{6}$$

ou encore, en groupant les termes de même degré des deux séries

$$\Psi_\lambda(x, y, z) = A_0(1 - \lambda^2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^n}\right) P_n(x, y, z), \tag{7}$$

et cette dernière série converge encore uniformément dans (s).

Exprimons maintenant que $\Psi_\lambda(x, y, z)$ se réduit à une constante.

A l'origine, $\Psi_\lambda(0, 0, 0) = A_0(1 - \lambda^2)$; on a donc la condition nécessaire et suffisante

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n}\right) P_n(x, y, z) \equiv 0, \tag{8}$$

elle exige que l'on ait, quel que soit n,

$$A_n\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n}\right) P_n(x, y, z) \equiv 0;$$

pour $n = 2$, cette condition est évidemment satisfaite pour tout polynome homogène P_2; pour n différent de 2, il faut et il suffit que chaque polynome P_n soit identiquement nul.

On en déduit que *la fonction $\Phi(x, y, z)$ est représentée dans la sphère (s) par la somme d'une forme quadratique et d'une constante.*

Dès lors cette même expression représente la fonction $\Phi(x, y, z)$ dans tout le domaine connexe (V_1) où elle est analytique.

C'est la première proposition que nous voulions obtenir.

4. **Les surfaces équipotentielles du corps (V_1) ne peuvent être que des ellipsoïdes.** — Remarquons d'abord que la valeur de Φ ne change pas quand on remplace x, y, z par $-x, -y, -z$, et que, par suite, les surfaces équipotentielles, $\Phi = \text{const.}$, sont des quadriques qui admettent l'origine (centre d'homothétie) comme centre de symétrie. Les surfaces paraboliques sont donc exclues.

En orientant convenablement les axes de coordonnées, on sait qu'on peut donner à Φ la forme [1]

$$-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta.$$

Le potentiel Φ étant essentiellement positif, il est nécessaire que la constante $\delta = \Phi(0, 0, 0)$ soit positive.

Les constantes α, β, γ sont toutes différentes de 0, sans quoi les surfaces équipotentielles se réduiraient à des cylindres ou à des plans parallèles, ce qui est impossible.

---

[1] *Cf.* par exemple, G. Papelier, *Précis de Géométrie analytique*, p. 583.

Considérons, en effet, le plan (π), normal à ces cylindres ou à ces plans parallèles, qui est le plus éloigné de l'origine et qui a au moins un point commun avec le corps (V_1). L'attraction de ce corps sur un point commun devrait être représentée par un vecteur situé dans le plan (π); mais cela ne se peut pas puisque toute la masse attractive se trouve d'un même côté de (π).

La relation de Poisson

$$\Delta_2\Phi = -2(\alpha + \beta + \gamma) = -4\pi$$

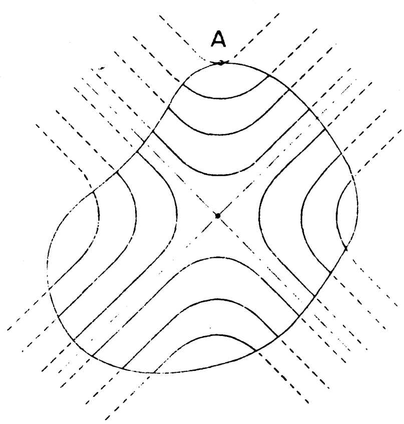
nous montre, en outre, que la somme des constantes α, β, γ doit être positive. Nous allons faire voir que ces constantes doivent être toutes positives.

Supposons, par exemple, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$; l'équation générale des surfaces équipotentielles

$$-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = C - \delta$$

représente une famille d'hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, séparés par le cône des directions asymptotiques. Le potentiel newtonien Φ étant une fonction essentiellement positive,

Fig. 2.



le paramètre C ne peut varier que de 0 à $+\infty$. Seules les portions des hyperboloïdes intérieures au corps sont des surfaces équipotentielles.

Pour les valeurs de C inférieures à δ, ces surfaces sont des hyperboloïdes à une nappe; pour $C > \delta$ ce sont des hyperboloïdes à deux nappes.

Considérons l'hyperboloïde à deux nappes le plus éloigné de l'origine qui a au moins un point commun A avec la surface du corps; en A le potentiel Φ prend une valeur Φ_A supérieure à celle qu'il prend en tout point intérieur. Φ_A est aussi supérieure à la valeur de Φ en tout point extérieur, sans quoi, cette fonction étant continue et s'annulant à l'infini, admettrait un maximum en un point extérieur; or, cela est impossible puisque, à l'extérieur des masses le potentiel est harmonique. Le potentiel, tant intérieur qu'extérieur, atteint donc son maximum en A. En ce point l'attraction $\vec{\varphi}$ doit, par suite, être nulle; mais on a d'autre part

$$\varphi^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = 4(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2);$$

les constantes α, β, γ étant toutes différentes de zéro et le point A (x, y, z) n'étant pas à l'origine, φ ne peut pas être nul; l'hypothèse de l'existence de surfaces équipotentielles hyperboloïdales implique contradiction.

Il en résulte que les surfaces équipotentielles du corps (V_i) sont nécessairement des ellipsoïdes concentriques homothétiques représentés par l'équation

$$-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta = C,$$

où α, β, γ, δ sont des constantes positives.

5. Forme caractéristique du potentiel d'un ellipsoïde homogène. — On sait que, par des méthodes diverses, Lagrange, Chasles, Lejeune-Dirichlet ont obtenu l'expression du potentiel newtonien Φ d'un ellipsoïde massif homogène, de demi-axes a, b, c et de densité ρ [1]; on a, en un point intérieur (x, y, z)

$$\Phi = \pi abc\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

---

(1) *Cf.* TISSERAND, *Mécanique céleste*, 2, p. 44 et 54. — P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 3, p. 110. — BOUASSE, *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, p. 257. — OLIVER DIMON KELLOG, *Foundations of potential theory*, p. 192.

Cette expression est de la forme

$$\Phi_1 = -\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta, \tag{9}$$

où, précisément, α, β, γ, δ sont des constantes positives. Inversement, peut-on affirmer que tout polynome du second degré de la forme (9), ou qui peut s'y ramener par des substitutions linéaires effectuées sur x, y, z, positif dans une région R, représente le potentiel newtonien d'un ellipsoïde homogène contenu dans R? Cette réciproque ne paraît pas avoir été déjà énoncée. Nous allons la démontrer ici.

La relation de Poisson, appliquée à la forme Φ_1, fournit d'abord la densité ρ de l'ellipsoïde en fonction des données α, β, γ

$$\Delta_2 \Phi_1 = -2(\alpha + \beta + \gamma) = -4\pi\rho. \tag{10}$$

Ensuite, l'identification en x, y, z des expressions de Φ et Φ_1 donne le système de quatre équations à trois inconnues a, b, c :

$$m = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{11}$$

$$n = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{12}$$

$$l = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{13}$$

$$p = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{14}$$

où, par abréviation,

$$m = \frac{\alpha}{\pi\rho}, \qquad n = \frac{\beta}{\pi\rho}, \qquad l = \frac{\gamma}{\pi\rho}, \qquad p = \frac{\delta}{\pi\rho}.$$

On vérifie facilement que l'expression Φ satisfait à la condition de Poisson ; on a donc

$$\begin{aligned} &abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \\ &+ abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \\ &+ abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = 2. \end{aligned}$$

Or, en vertu de la détermination précédente de ρ,

$$m + n + l = 2; \tag{10'}$$

et l'équation (13) peut être envisagée comme une conséquence des équations (11) et (12).

Au lieu de λ prenons $\theta = \frac{\lambda}{c^2}$ comme variable d'intégration et posons $u = \frac{c^2}{a^2}$, $v = \frac{c^2}{b^2}$; les équations (11) et (12) deviennent

$$m = \int_0^\infty \frac{u\,d\theta}{(1+u\theta)\sqrt{(1+u\theta)(1+v\theta)(1+\theta)}}, \tag{11'}$$

$$n = \int_0^\infty \frac{v\,d\theta}{(1+v\theta)\sqrt{(1+u\theta)(1+v\theta)(1+\theta)}}; \tag{12'}$$

elles ne contiennent que les rapports u et v; montrons qu'elles permettent toujours de les déterminer.

Ajoutons et retranchons ces équations membre à membre; il vient le système équivalent

$$F(u, v) \equiv \int_0^\infty \frac{u + v + 2uv\theta}{[1+(u+v)\theta + uv\theta^2]^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\theta}}\,d\theta = m + n, \tag{15}$$

$$H(u, v) \equiv \int_0^\infty \frac{u - v}{[1+(u+v)\theta + uv\theta^2]^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\theta}}\,d\theta = m - n; \tag{16}$$

$F(u, v)$ et $H(u, v)$ sont des fonctions continues de u et v.

Au moyen d'une intégration par parties, écrivons l'équation $F(u, v) = m + n$ sous la forme

$$2 - \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+(u+v)\theta + uv\theta^2}} = m + n. \tag{17}$$

Si cette équation admet une solution en v dans un intervalle continu de valeurs de u, elle définit une fonction décroissante $v(u)$, représentée, dans le plan des (u, v), par une courbe symétrique par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Remarquons que l'hypothèse $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$ entraîne $m \geqq n \geqq l$ [1]; d'où l'on tire, en tenant compte de la relation $m + n + l = 2$,

$$\frac{4}{3} \leqq m + n < 2. \tag{18}$$

---

[1] Les équations (11), (12), (13) exigent aussi que l'on ait $a \leqq b \leqq c$, $u \geqq 1$, $v \geqq 1$.

D'autre part, on a

$$F(0, 0) = 2 - \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$F(0, \infty) = 2,$$
$$F(1, 1) = 2 - \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{3},$$
$$F(\infty, \infty) = 2.$$

La condition (18) et ces égalités prouvent l'existence de la fonction $v(u)$.

Remplaçons alors v par cette fonction dans l'intégrale $H(u, v)$. On trouvera sur l'axe des u, au point d'intersection avec la courbe $v(u)$

$$H(u, 0) = 2 - \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+u\theta}} = F(u, 0) = m + n,$$

et sur la bissectrice du premier quadrant

$$H(u, u) = 0.$$

Sur la courbe $v(u)$, la fonction $H(u, v)$ prend, par suite, au moins une fois la valeur $m - n$, comprise entre 0 et $m + n$.

Le système des équations (11′) et (12′) admet donc certainement une solution en (u, v).

Les rapports $u = \frac{c^2}{a^2}$ et $v = \frac{c^2}{b^2}$ une fois connus, l'équation (14) qui prend la forme

$$(14') \qquad p = c^2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{(1+u\theta)(1+v\theta)(1+\theta)}},$$

déterminerait la grandeur du demi-axe c, d'où l'on tirerait ensuite, au moyen des égalités précédentes, les valeurs de a et b.

Il existe donc bien un ellipsoïde homogène dont le potentiel intérieur est représenté par le polynome Φ_1 [1].

Les raisonnements qui vont suivre prouveront qu'*il n'en existe qu'un.*

6. *Si le potentiel newtonien d'un corps homogène est, en*

[1] *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes* (*Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1443).

tout point d'une région intérieure, égal au potentiel d'un ellipsoïde homogène, le corps coïncide avec l'ellipsoïde [1].

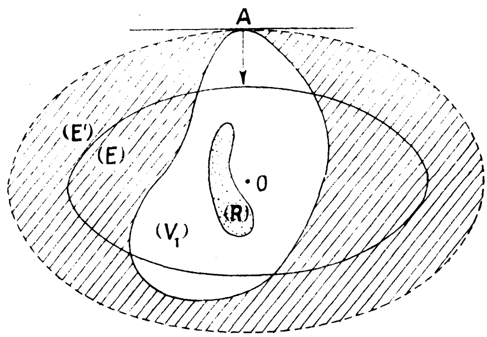
Supposons que cette proposition ne soit pas vraie; il ne peut se présenter que trois cas : ou bien l'ellipsoïde est complètement intérieur au corps, ou bien l'ellipsoïde enveloppe complètement le corps, ou bien l'ellipsoïde et le corps possèdent des parties communes et des parties non communes.

La démonstration du théorème est la même dans ces trois cas. Nous la donnerons seulement pour le troisième qui est le plus général.

Soient (V_1) le corps, (E) l'ellipsoïde qui possèdent dans la région commune (R), le même potentiel en tout point.

Désignons par (E') le plus grand ellipsoïde, de même densité que l'ellipsoïde (E), homothétique de cet ellipsoïde par rapport à

Fig. 3.



son centre, et dont la surface possède au moins un point commun A avec celle de (V_1). Il est évident que l'ellipsoïde (E') existe toujours et qu'il est unique.

Nous représenterons par $\Phi_C[D]$ le potentiel d'un corps (C) dans un domaine (D).

Notre hypothèse s'exprime alors par l'identité

$$\Phi_{V_1}[R] \equiv \Phi_E[R];$$

on a donc

$$\Phi_{E'}[R] - \Phi_{V_1}[R] \equiv \Phi_{E'}[R] - \Phi_E[R].$$

---

[1] *Sur une propriété exclusive des homoïdes ellipsoïdaux* (*Comptes rendus*, 193, 1931, p. 141).

Le second membre de cette identité n'est autre que le potentiel, dans la région (R), de l'homoïde ellipsoïdal limité par les surfaces de (E') et de (E). Or, nous savons, d'après le théorème classique rappelé au début de cet article, que ce potentiel est constant dans le domaine (E) et, *a fortiori*, dans (R). Il en est donc de même du premier membre qui représente, dans (R), le potentiel du corps homogène limité par les surfaces de (E') et de (V_1).

Comme on le sait, ce potentiel est une fonction harmonique, et par suite analytique, en tout point de la cavité (V_1). Mais cette fonction est de plus constante dans la région intérieure (R), et l'on en conclut, en vertu de son analyticité, qu'elle est encore constante dans tout le domaine (V_1). Cela exige que l'attraction du corps homogène que nous venons de définir soit nulle dans ce domaine; et, comme elle est continue, elle doit être nulle aussi au point commun A; ce qui est impossible.

Considérons, en effet, le plan tangent à l'ellipsoïde (E') en A. Toutes les masses attirantes sont situées d'un même côté par rapport à ce plan; elles créent donc en A une attraction non nulle dirigée de ce côté.

Ainsi le corps (V_1) coïncide nécessairement avec l'ellipsoïde (E). Et nous parvenons à notre conclusion générale qui est la réciproque du théorème de Newton.

Les homoïdes ellipsoïdaux sont les seuls qui n'exercent aucune action sur les points matériels contenus dans leur cavité.

La loi de Coulomb sur l'attraction des charges électriques étant la même que celle de Newton pour l'attraction des masses matérielles, ce théorème s'interprète immédiatement dans le langage de l'Électricité.