BULLETIN DE LA S. M. F.

ENEA BORTOLOTTI

Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 70-74

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__70_0>

DIRECTIONS CONCOURANTES ET CONNEXIONS DANS LES ESPACES COURBES;

PAR M. ENEA BORTOLOTTI.

1. La notion de *directions concourantes le long d'une courbe* γ a été introduite par M. A. Myller, d'abord pour les surfaces de l'espace (euclidien) ordinaire (V_2 en R_3) (1), ensuite pour les V_m de R_n euclidien (2). M. O. Mayer en a indiqué quelques applications à la théorie des surfaces de R_3 (3); M. Myller en a tiré une intéressante généralisation des surfaces de Peterson [*loc. cit.* (2)]. Ce n'est peut-être pas inutile d'indiquer ici la très étroite liaison qui existe entre cette théorie des « directions concourantes » et celle des *connexions euclidiennes* suivant M. Cartan. Je vais, auparavant, donner aussi, avec quelques applications, la généralisation aux V_m quelconques de la notion de *courbe adjointe* d'une série de directions tangentes à une V_2 de R_3 euclidien. Cette notion, due à M. A. Voss (4) a été justement utilisée par M. Mayer (*loc. cit.*) dans l'étude des directions concourantes.

2. Soit γ une courbe tracée dans une V_m de R_n euclidien; soient s la longueur d'arc de cette courbe, $P = P(s)$ sa représentation paramétrique, $\lambda = \frac{dP}{ds}$ le vecteur unitaire tangent à γ. Soit $\xi(s)$ un champ de vecteurs unitaires de V_m sortant des points de γ, défi-

---

(1) A. MYLLER, *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccanti dai punti di una curva* (*Rendiconti Accad. Lincei*, 5e série, t. 33, 1924, 1er sem., p. 339-341).

(2) A. MYLLER, *Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions* (*Bulletin Soc. mathém.*, t. 56, 1928, p. 1 à 6). Je vais citer par B. cette Note de M. Myller.

(3) O. MAYER, *Études sur les réseaux de M. Myller* (*Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. XIV, 1927, p. 169-204.

(4) A. VOSS, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (*Mathem. Annalen*, t. 39, 1891, p. 179-256).

nissant une *série Σ_ξ de directions* de V_m. Soient enfin g la droite variable sortant de chaque point de γ suivant la direction du vecteur $\xi(s)$, et S_g la surface réglée de R_n générée par les droites g.

Appelons *point adjoint* de la droite g sortant du point P de γ (ou de la direction ξ qui lui correspond) le point limite, Q, de l'intersection de g avec la plus courte distance entre cette même droite g et la projection orthogonale, $\overline{g}^*$, de la droite g^* de S_g sortant du point P^*, infiniment voisin à P sur γ, sur l'espace R_m tangent à V_m au point P. Si $m = 2$, Q est proprement le point limite de *l'intersection* de g avec $\overline{g}^*$. Le lieu du point adjoint Q est une courbe α de S_g qui est univoquement déterminée par Σ_ξ, et que nous appellerons *courbe adjointe* de Σ_g. Si $m = 2$, $n = 3$, nous avons justement la courbe qui est ainsi nommée par MM. Voss et Mayer (*loc. cit.*).

L'équation vectorielle de la courbe adjointe α de Σ_ξ est

$$Q = P + \tau\xi, \tag{1}$$

où

$$\tau = \overline{PQ} = -\rho_g^2 \lambda \times \frac{\overline{d\xi}}{ds} \tag{2}$$

et

$$\frac{\overline{d\xi^r}}{ds} = \frac{d\xi^r}{ds} + \left\{ \begin{matrix} st \\ r \end{matrix} \right\} \xi^s \frac{du^t}{ds},$$

$$\frac{1}{\rho_g} = \mathrm{mod}\left(\frac{\overline{d\xi}}{ds}\right) = \text{courbure géodésique (}^1\text{) de } \Sigma_\xi;$$

les symboles $\left\{ \begin{matrix} st \\ r \end{matrix} \right\}$ se rapportant au tenseur fondamental a_{rs} de V_m.

Soit μ le vecteur unitaire $\left(\text{parallèle à } \frac{dQ}{ds}\right)$ tangent à la courbe adjointe α en P. Les formules (1), (2) montrent que μ *est toujours orthogonal à* $\frac{\overline{d\xi}}{ds}$. Lorsque $\frac{\overline{d\xi}}{ds}$, λ, ξ sont complanaires, c'est-à-dire lorsque la projection orthogonale $\overline{\mu}$ de μ sur l'espace R_m tangent à V_m en P est parallèle à ξ — ce qui naturellement a toujours

(1) *Associée*, en V_m, suivant M. Bianchi. J'indique par $\times$ le symbole de la multiplication *scalaire*.

lieu si $m = 2$ — la (2) peut s'écrire comme suit

$$(3) \qquad \tau = \rho_g \sin\varphi. \qquad \varphi = \widehat{\lambda, \xi}.$$

Dans le cas $m = 2$ $\left(\text{en posant } u^1 = u,\ u^2 = v,\ \lambda = \frac{dP}{ds},\ \xi = \frac{\delta P}{\delta s}\right)$ on a donc pour la courbe adjointe l'équation

$$(4) \qquad Q = P + \frac{\delta u\, dv - \delta v\, du}{\overline{d}\delta u\, \delta v - \overline{d}\delta v\, \delta u}\, \delta P$$

qui équivaut aux formules scalaires (beaucoup moins simples) données pour le cas des V_2 en R_3 par M. Mayer [*loc. cit.*, form. (2), p. 172].

3. La notion de *courbe adjointe* α d'une série de directions Σ_ξ est sans doute susceptible d'applications variées ([1]); je dois ici me borner à quelques cas particuliers remarquables.

1° α peut coïncider avec γ $(\tau = 0)$. Ce qui arrive si γ est *la ligne de striction* de S_g. Si $m = 3$, et la V_3 est un S_3 à courbure constante $K > 0$: si en outre on a

$$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{K}\sin\varphi.$$

Σ_ξ est alors formée par des directions *parallèles suivant Clifford en* S_3.

2° α, γ peuvent constituer, en S_g, deux *trajectoires équidistantes* des génératrices g ($\tau =$ const.). Si la V_m est un S_m à courbure constante $K < 0$, et $\tau = \pm R = \pm \frac{1}{\sqrt{-K}}$; si en outre ξ, λ et $\frac{\overline{d}\xi}{ds}$ sont complanaires (*voir* n° 2), Σ_ξ est alors formée par des directions *parallèles suivant Lobatschewskii en* S_m. Une intéressante construction géométrique des droites infiniment voisines d'une droite donnée en S_m, et parallèles à celle-ci suivant Lobatschewskii, en découle très simplement ([2]).

---

(1) Par exemple si $m = 2$ elle donne lieu, d'une façon naturelle (*cf.* Voss, Mayer, *loc. cit.*), à l'association d'un couple de surfaces — ***les surfaces adjointes***, généralisant les transformées par congruences W — à tout double système de lignes sur une surface.

(2) Soient P, P* deux points infiniment voisins dans S_m, et g une droite

3° α peut coïncider avec l'intersection de S_g avec *le* R_{n-1} *de l'infini* de R_n : cette propriété caractérise les Σ_ξ formées par des directions parallèles suivant Levi-Civita, le long de γ, en V_m (*cf.* MAYER, *loc. cit.*, pour le cas $m = 2$, $n = 3$).

4° α peut enfin être une *trajectoire orthogonale* des R_m tangents de V_m le long de γ. Cette propriété caractérise les Σ_ξ formées par des directions concourantes (au sens de M. Levi-Civita) le long de γ suivant M. Myller (*cf.* MYLLER, *B.*, p. 2, et MAYER, *loc. cit.*, p. 174). On a alors la formule (3), et aussi

$$\frac{d\tau}{ds} = -\cos\varphi, \qquad \varphi = \widehat{\lambda, \xi}, \tag{5}$$

$$\frac{\overline{d}(\tau\xi)}{ds} = -\lambda = -\frac{dP}{ds}. \tag{6}$$

Cette dernière formule équivaut aux formules scalaires (6), p. 4, de M. Myller (*B.*). Par élimination de τ entre (6), (2) on obtient l'équation différentielle, du deuxième ordre, des directions concourantes en V_m.

4. Les trajectoires orthogonales des R_m tangents de V_m aux points de γ déterminent entre les R_m tangents, π et π^*, en deux points infiniment voisins P, P* de γ, une correspondance biunivoque, qui notamment n'est qu'un *déplacement;* si $n = m + 1$, elle est la *rotation* qui superpose π à π^*; en tout cas, elle coïncide aussi, à des infiniment petits d'ordre $\geqq 2$ près, avec une *projection orthogonale*. C'est donc bien la même correspondance qui établit, le long de γ, *la connexion euclidienne de M. Levi-Civita en* V_m, suivant M. Cartan [1]. D'ailleurs l'équation (6) (ainsi que les équivalentes équations scalaires de M. Myller) ne diffère pas des équations par

---

sortant de P; soient Q, Q' les deux points de g pour lesquels on a $Q'P = PQ = R$. Les parallèles suivant Lobatschewskii en P* à la droite g sont les projections orthogonales, sur le R_m tangent à S_m en P*, des droites unissant P* aux points Q et Q'.

[1] *Voir*, par exemple, CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (*Bulletin des Sc. mathem.*, t. 48, 1924, p. 294-320). Notamment cette correspondance, ou loi de transport *des points* des espaces tangents, résulte de la loi de transport *des vecteurs* suivant M. Levi-Civita, en y ajoutant la condition que le point $P^*(u^r + du^r)$, considéré dans l'espace π tangent en P, ait pour correspondant le point P* lui-même sur π^*.

lesquelles M. Cartan représente le raccord des espaces euclidiens tangents le long de γ, pour la connexion de Levi-Civita [1]. Une série Σ_ξ en V_m est donc formée par des directions ***concourantes*** le long de γ *si une fonction scalaire* $\tau(s)$ *existe, pour laquelle les points* $Q = P + \tau\xi$ *varient le long de* γ *suivant la loi de raccord de la connexion euclidienne de Levi-Civita;* et inversement. Ce qui montre, d'une manière évidente, que la notion des directions concourantes en V_m le long d'une ligne γ peut aussi s'introduire d'une façon tout à fait indépendante du R_n ambiant. On voit aussi que la même notion des directions concourantes s'étend par elle-même aux variétés à connexion euclidienne, métrique, affine, projective les plus générales; plusieurs applications, et des généralisations ultérieures des surfaces de Peterson se présentent naturellement.

---

(1) *Voir*, par exemple, CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*, p. 17, form. (24) (*Mémorial des Sc. mathém.*, Gauthier-Villars, 1925).