

BULLETIN DE LA S. M. F.

ENEAS BORTOLOTTI

Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 70-74

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__70_0

© Bulletin de la S. M. F., 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DIRECTIONS CONCORRANTES ET CONNEXIONS
DANS LES ESPACES COURBES ;**

PAR M. ENEA BORTOLOTTI.

1. La notion de *directions concourantes le long d'une courbe* γ a été introduite par M. A. Myller, d'abord pour les surfaces de l'espace (euclidien) ordinaire (V_2 en R_3) ⁽¹⁾, ensuite pour les V_m de R_n euclidien ⁽²⁾. M. O. Mayer en a indiqué quelques applications à la théorie des surfaces de R_3 ⁽³⁾; M. Myller en a tiré une intéressante généralisation des surfaces de Peterson [*loc. cit.* ⁽²⁾]. Ce n'est peut-être pas inutile d'indiquer ici la très étroite liaison qui existe entre cette théorie des « directions concourantes » et celle des *connexions euclidiennes* suivant M. Cartan. Je vais, auparavant, donner aussi, avec quelques applications, la généralisation aux V_m quelconques de la notion de *courbe adjointe* d'une série de directions tangentes à une V_2 de R_3 euclidien. Cette notion, due à M. A. Voss ⁽⁴⁾ a été justement utilisée par M. Mayer (*loc. cit.*) dans l'étude des directions concourantes.

2. Soit γ une courbe tracée dans une V_m de R_n euclidien; soient s la longueur d'arc de cette courbe, $P = P(s)$ sa représentation paramétrique, $\lambda = \frac{dP}{ds}$ le vecteur unitaire tangent à γ . Soit $\xi(s)$ un champ de vecteurs unitaires de V_m sortant des points de γ , défi-

⁽¹⁾ A. MYLLER, *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccanti dai punti di una curva* (Rendiconti Accad. Lincei, 5^e série, t. 33, 1924, 1^{er} sem., p. 339-341).

⁽²⁾ A. MYLLER, *Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions* (Bulletin Soc. mathém., t. 56, 1928, p. 1 à 6). Je vais citer par B. cette Note de M. Myller.

⁽³⁾ O. MAYER, *Études sur les réseaux de M. Myller* (Annales scientifiques de l'Université de Jassy, t. XIV, 1927, p. 169-204).

⁽⁴⁾ A. VOSS, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (Mathem. Annalen, t. 39, 1891, p. 179-256).

nissant une série Σ_{ξ} de directions de V_m . Soient enfin g la droite variable sortant de chaque point de γ suivant la direction du vecteur $\xi(s)$, et S_g la surface réglée de R_n générée par les droites g .

Appelons *point adjoint* de la droite g sortant du point P de γ (ou de la direction ξ qui lui correspond) le point limite, Q, de l'intersection de g avec la plus courte distance entre cette même droite g et la projection orthogonale, \bar{g}^* , de la droite g^* de S_g sortant du point P*, infiniment voisin à P sur γ , sur l'espace R_m tangent à V_m au point P. Si $m = 2$, Q est proprement le point limite de l'intersection de g avec \bar{g}^* . Le lieu du point adjoint Q est une courbe α de S_g qui est univoquement déterminée par Σ_{ξ} , et que nous appellerons *courbe adjointe* de Σ_g . Si $m = 2$, $n = 3$, nous avons justement la courbe qui est ainsi nommée par MM. Voss et Mayer (*loc. cit.*).

L'équation vectorielle de la courbe adjointe α de Σ_{ξ} est

$$(1) \quad Q = P + \tau \xi,$$

où

$$(2) \quad \tau = \overline{PQ} = -\rho_{\xi}^2 \lambda \times \frac{d\xi}{ds}$$

et

$$\frac{d\xi^r}{ds} = \frac{d\xi^r}{ds} + \left\{ \begin{matrix} st \\ r \end{matrix} \right\} \xi^s \frac{du^t}{ds},$$

$$\frac{1}{\rho_{\xi}} = \text{mod} \left(\frac{d\xi}{ds} \right) = \text{courbure géodésique } (1) \text{ de } \Sigma_{\xi};$$

les symboles $\left\{ \begin{matrix} st \\ r \end{matrix} \right\}$ se rapportant au tenseur fondamental a_{rs} de V_m .

Soit μ le vecteur unitaire (parallèle à $\frac{dQ}{ds}$) tangent à la courbe adjointe α en P. Les formules (1), (2) montrent que μ est toujours orthogonal à $\frac{d\xi}{ds}$. Lorsque $\frac{d\xi}{ds}$, λ , ξ sont coplanaires, c'est-à-dire lorsque la projection orthogonale $\bar{\mu}$ de μ sur l'espace R_m tangent à V_m en P est parallèle à ξ — ce qui naturellement a toujours

(1) Associée, en V_m , suivant M. Bianchi. J'indique par \times le symbole de la multiplication scalaire.

lieu si $m = 2$ — la (2) peut s'écrire comme suit

$$(3) \quad \tau = \rho_g \sin \varphi. \quad \varphi = \widehat{\lambda, \xi}.$$

Dans le cas $m = 2$ (en posant $u^1 = u$, $u^2 = v$, $\lambda = \frac{dP}{ds}$, $\xi = \frac{\delta P}{\delta s}$) on a donc pour la courbe adjointe l'équation

$$(4) \quad Q = P + \frac{\delta u \, dv - \delta v \, du}{d \delta u \, \delta v - d \delta v \, \delta u} \delta P$$

qui équivaut aux formules scalaires (beaucoup moins simples) données pour le cas des V_2 en R_3 par M. Mayer [*loc. cit.*, form. (2), p. 172].

3. La notion de *courbe adjointe* α d'une série de directions Σ_ξ est sans doute susceptible d'applications variées (¹); je dois ici me borner à quelques cas particuliers remarquables.

1° α peut coïncider avec γ ($\tau = 0$). Ce qui arrive si γ est la *ligne de striction* de S_g . Si $m = 3$, et la V_3 est un S_3 à courbure constante $K > 0$; si en outre on a

$$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{K} \sin \varphi.$$

Σ_ξ est alors formée par des directions *parallèles suivant Clifford* en S_3 .

2° α , γ peuvent constituer, en S_g , deux *trajectoires équidistantes* des génératrices g ($\tau = \text{const.}$). Si la V_m est un S_m à courbure constante $K < 0$, et $\tau = \pm R = \pm \frac{1}{\sqrt{-K}}$; si en outre ξ, λ et $\frac{d\xi}{ds}$ sont coplanaires (voir n° 2), Σ_ξ est alors formée par des directions *parallèles suivant Lobatschewskii* en S_m . Une intéressante construction géométrique des droites infiniment voisines d'une droite donnée en S_m , et parallèles à celle-ci suivant Lobatschewskii, en découle très simplement (²):

(¹) Par exemple si $m = 2$ elle donne lieu, d'une façon naturelle (cf. Voss, MAYER, *loc. cit.*), à l'association d'un couple de surfaces — *les surfaces adjointes*, généralisant les transformées par congruences W — à tout double système de lignes sur une surface.

(²) Soient P, P^* deux points infiniment voisins dans S_m , et g une droite

3° α peut coïncider avec l'intersection de S_g avec la R_{n-1} de l'infini de R_n : cette propriété caractérise les Σ_ξ formées par des directions parallèles suivant Levi-Civita, le long de γ , en V_m (cf. MAYER, *loc. cit.*, pour le cas $m = 2, n = 3$).

4° α peut enfin être une *trajectoire orthogonale* des R_m tangents de V_m le long de γ . Cette propriété caractérise les Σ_ξ formées par des directions concourantes (au sens de M. Levi-Civita) le long de γ suivant M. Myller (cf. MYLLER, *B.*, p. 2, et MAYER, *loc. cit.*, p. 174). On a alors la formule (3), et aussi

$$(5) \quad \frac{d\tau}{ds} = -\cos\varphi, \quad \varphi = \widehat{\lambda, \xi},$$

$$(6) \quad \frac{d(\tau\xi)}{ds} = -\lambda = -\frac{dP}{ds}.$$

Cette dernière formule équivaut aux formules scalaires (6), p. 4, de M. Myller (*B.*). Par élimination de τ entre (6), (2) on obtient l'équation différentielle, du deuxième ordre, des directions concourantes en V_m .

4. Les trajectoires orthogonales des R_m tangents de V_m aux points de γ déterminent entre les R_m tangents, π et π^* , en deux points infiniment voisins P, P^* de γ , une correspondance biunivoque, qui notamment n'est qu'un *déplacement*; si $n = m + 1$, elle est la *rotation* qui superpose π à π^* ; en tout cas, elle coïncide aussi, à des infiniment petits d'ordre ≥ 2 près, avec une *projection orthogonale*. C'est donc bien la même correspondance qui établit, le long de γ , la *connexion euclidienne de M. Levi-Civita en V_m* , suivant M. Cartan (1). D'ailleurs l'équation (6) (ainsi que les équivalentes équations scalaires de M. Myller) ne diffère pas des équations par

sortant de P ; soient Q, Q' les deux points de g pour lesquels on a $Q'P = PQ = R$. Les parallèles suivant Lobatschewskii en P^* à la droite g sont les projections orthogonales, sur le R_m tangent à S_m en P^* , des droites unissant P^* aux points Q et Q' .

(1) Voir, par exemple, CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (*Bulletin des Sc. mathem.*, t. 48, 1924, p. 294-320). Notamment cette correspondance, ou loi de transport *des points des espaces tangents*, résulte de la loi de transport *des vecteurs* suivant M. Levi-Civita, en y ajoutant la condition que le point $P^*(u' + du')$, considéré dans l'espace π tangent en P , ait pour correspondant le point P^* lui-même sur π^* .

lesquelles M. Cartan représente le raccord des espaces euclidiens tangents le long de γ , pour la connexion de Levi-Civita (1). Une série Σ_{ξ} en V_m est donc formée par des directions *concourantes* le long de γ si une fonction scalaire $\tau(s)$ existe, pour laquelle les points $Q = P + \tau\xi$ varient le long de γ suivant la loi de raccord de la connexion euclidienne de Levi-Civita; et inversement. Ce qui montre, d'une manière évidente, que la notion des directions concourantes en V_m le long d'une ligne γ peut aussi s'introduire d'une façon tout à fait indépendante du R_n ambiant. On voit aussi que la même notion des directions concourantes s'étend par elle-même aux variétés à connexion euclidienne, métrique, affine, projective les plus générales; plusieurs applications, et des généralisations ultérieures des surfaces de Peterson se présentent naturellement.

(1) Voir, par exemple, CARTAN. *La géométrie des espaces de Riemann*, p. 17, form. (14) (*Mémorial des Sc. mathém.*, Gauthier-Villars, 1925).