BULLETIN DE LA S. M. F.

JULIUS WOLFF
F. DE KOK

Les fonctions holomorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 221-227
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__221_0>

LES FONCTIONS HOLOMORPHES A PARTIE RÉELLE POSITIVE ET L'INTÉGRALE DE STIELTJES;

PAR MM. JULIUS WOLFF ET F. DE KOK.

Le présent article sera consacré à la représentation générale de la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le demi-plan $D(x>0)$ à partie réelle $u(x, y)$ positive, et à quelques applications.

En introduisant l'hypothèse que $f(z)$ admet un développement asymptotique à l'infini

$$f(z) \sim \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots.$$

M. R. Nevanlinna a montré que $f(z)$ est représentée par une intégrale de Stieltjes

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{z - yi},$$

où $\psi(y)$ est une fonction non décroissante (¹).

Nous ne ferons aucune telle hypothèse accessoire et nous démontrerons que les seules hypothèses : $f(z)$ holomorphe dans D et $u > 0$ entraînent une représentation analogue de $f(z)$ au moyen d'une intégrale de Stieltjes (théorème VII) (²). De plus on verra que les propriétés fondamentales des fonctions de notre classe se déduisent fort simplement de cette représentation (théorèmes V, VI, VIII, dont le dernier nous semble nouveau).

1. Soit

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z),$$

holomorphe dans le demi-plan $D(x > 0)$ et soit $u > 0$ dans D.

(¹) *Annales Academiae Scientiarum Fennicæ*, Série A, t. XVIII, 5.

(²) Pendant la correction nous avons remarqué que M. W. Cauer a donné une telle représentation (*Bull. Am. Math. Soc.*, oct. 1932).

Théorème I. — Si *a et x sont positifs*, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,y)}{a^2+y^2}\,dy \leqq \frac{\pi u(x+a)}{a}. \tag{1}$$

En effet, soit $b > x+a$ et posons $b-x=\mathrm{R}$, $b-x-a=\rho$. La formule de Poisson donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(b+\mathrm{R}e^{\varphi i})}{|b+\mathrm{R}e^{\varphi i}-x-a|^2}\,d\varphi = \frac{2\pi u(x+a)}{\mathrm{R}^2-\rho^2}. \tag{2}$$

En faisant tendre b vers l'infini nous trouvons que pour chaque valeur de n

$$\int_{-n}^{n} \frac{u(x,y)}{a^2+y^2}\,dy \leqq \frac{\pi u(x+a)}{a},$$

d'où le théorème.

2. Posons

$$\psi(x,y) = \int_1^z (u\,dy + v\,dx),$$

$i\psi(x,y)$ est la partie imaginaire de $\int_1^z f(z)\,dz$, donc $\psi(x,y)$ est indépendante du chemin d'intégration et harmonique dans D. De plus $\psi(x,y)$ croît avec y, x restant constant et positif. Sur une pleine épaisseur E de l'axe imaginaire la limite finie $\lim\limits_{x\to 0} f(x+yi)$ existe. Donc sur E la limite finie

$$\lim_{x\to 0}\psi(x,y) = \psi(0,y) = \psi(y) \tag{3}$$

existe aussi. $\psi(y)$ est une fonction non décroissante de y sur E. En donnant aux points y étrangers à E la définition

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\{\psi(y+0)+\psi(y-0)\},$$

où $\psi(y-0)$ et $\psi(y+0)$ sont respectivement $\lim\limits_{y'\to y}\psi(y')$, pour $y'<y$, y' dans E et $\lim\limits_{y'\to y}\psi(y')$, pour $y'>y$, y' dans E, la fonction $\psi(y)$ ainsi définie est déterminée pour toutes les valeurs de y, non décroissante, et elle jouit de la propriété

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\{\psi(y+0)+\psi(y-0)\}.$$

Car si m et $n > m$ sont deux pointsde E, la fonction harmonique $\psi(x, y)$ est bornée dans le rectangle $0 < x < 1$, $m < y < n$ parce qu'elle est entre le minimum de $\psi(x, m)$ pour $0 \leqq x \leqq 1$ et le maximum de $\psi(x, n)$ pour $0 \leqq x \leqq 1$. Des propriétés classiques des fonctions harmoniques résulte maintenant le

THÉORÈME II. — *La limite finie*

$$\lim_{x \succ 0} \psi(x, y) = \psi(0, y) = \psi(y)$$

existe pour toutes les valeurs de y. $\psi(y)$ *est non décroissante et partout égale à*

$$\frac{1}{2}\{\psi(y+0) + \psi(y-0)\}.$$

3. THÉORÈME III. — *Si* a *est un nombre positif, on a l'inégalité*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{a^2 + y^2} \leqq \frac{\pi u(a)}{a}, \tag{4}$$

où $\psi(y)$ *est la fonction définie au n° 2 et le premier membre est une intégrale de Stieltjes.*

En effet, si m et n sont deux nombres réels et $x > 0$, $a > 0$, on a

$$\int_m^n \frac{d\psi(x, y)}{a^2 + y^2} = \frac{\psi(x, n)}{a^2 + n^2} - \frac{\psi(x, m)}{a^2 + m^2} + 2\int_m^n \frac{y\psi(x, y)}{(a^2 + y^2)^2} dy, \tag{5}$$

$\psi(x, y)$ étant bornée dans le rectangle $0 \leqq x \leqq 1$, $m \leqq y \leqq n$, il suit de (5) et du théorème II que

$$\begin{aligned} \lim_{x \succ 0} \int_m^n \frac{d\psi(x, y)}{a^2 + y^2} &= \frac{\psi(n)}{a^2 + n^2} - \frac{\psi(m)}{a^2 + m^2} + 2\int_m^n \frac{y\psi(y)}{(a^2 + y^2)} dy \\ &= \int_m^n \frac{d\psi(y)}{a^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Or en vertu de (1), où $u(x, y)\,dy$ peut être remplacé par $d\psi(x, y)$, la relation (6) donne

$$\int_m^n \frac{d\psi(y)}{x^2 + y^2} \leqq \lim_{x \succ 0} \frac{\pi u(x + a)}{a} = \frac{\pi u(a)}{a};$$

m et n étant arbitraires, le théorème est démontré.

4. Théorème IV. — *Pour chaque point ζ de* D *on a*

$$f''(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{(\zeta - yi)^3}, \tag{7}$$

où le second membre est une intégrale de Stieltjes.

Soit, en effet, $\zeta = \xi + \eta i$ et choisissons deux nombres a et p tels que

$$0 < p < \xi < a.$$

Soit $a - p = \mathrm{R}$ le rayon du cercle C de centre $\alpha = a + \eta i$ et passant par le point $p + \eta i$. Posons $a - \xi = \rho$ et indiquons les points $\alpha + \mathrm{R}e^{\varphi i}$ de C par t. Partons de la formule connue

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t + \zeta - 2\alpha}{t - \zeta} u(t)\, d\varphi + iv(\alpha).$$

Il en résulte

$$f''(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t - \alpha}{(t - \zeta)^3} u(t)\, d\varphi. \tag{8}$$

La partie de l'intégrale du second membre de (8) qui provient des valeurs de $t - \zeta$, dont le module surpasse un nombre n, est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{\mathrm{R}}{n} \int_0^{2\pi} \frac{u(t)}{|t - \zeta|^2} d\varphi = \frac{2\pi \mathrm{R}\, u(\zeta)}{n(\mathrm{R}^2 - \rho^2)} \leqq \frac{2\pi u(\zeta)}{n(\xi - p)}. \tag{9}$$

La partie restante tend pour R infini, p et ξ fixes, vers

$$\int_{-n}^{n} \frac{u(p, y)}{(\zeta - p - yi)^3} dy.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u(p, y)}{(\zeta - p - yi)^3} dy$ étant convergente en vertu de (1), nous trouvons

$$f''(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(p, y)}{(\zeta - p - yi)^3}. \tag{10}$$

Les inégalités

$$\left| \int_{\pm n}^{\pm\infty} \frac{d\psi(p, y)}{(\zeta - p - yi)^3} \right| \leqq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(p, y)}{(\xi - p)^2 + (y - \eta)^2} \leqq \frac{\pi u(\zeta)}{n(\zeta - p)},$$

dont la dernière est une conséquence de (1) et (4), montrent que l'intégrale (10) est uniformément convergente pour $0 \leq p \leq \frac{\xi}{2}$. Or, de la même manière dont (6) a été démontré on démontre que pour chaque couple de nombres réels m, n on a

$$\int_m^n \frac{d\psi(y)}{(\zeta - yi)^3} = \lim_{p \to 0} \int_m^n \frac{d\psi(p, y)}{(\zeta - p - yi)^3}.$$

De ces deux dernières remarques il suit que

$$f''(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{(\zeta - yi)^3}. \tag{7}$$

5. De (7) on tire

$$f'(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{(\zeta - yi)^2} + \lambda. \tag{11}$$

Théorème V. — *La constante λ est positive ou nulle et égale à la limite de $f'(\zeta)$ et de $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ pour ζ infini, $\frac{\eta}{\xi}$ borné* (¹).

La dernière partie du théorème se déduit immédiatement du théorème III. Si λ avait un argument non nul, on aboutirait à l'existence de points de D, dans lesquels la partie réelle de f serait négative.

L'intégration de (11) donne

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - yi} + \frac{1}{1 + yi} \right) d\psi(y) + \lambda\zeta + \mu. \tag{12}$$

Donc, les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{\xi^2 + (y - \eta)^2}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{1 + y^2}$ étant convergentes en vertu du théorème III,

$$u(\zeta) = \frac{\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{\xi^2 + (y - \eta)^2} + \lambda\xi + \mu_1. \tag{13}$$

A cause du théorème III on doit avoir $\lambda\xi + \mu_1 \geq 0$ pour toute valeur positive de ξ, donc $\mu_1 \geq 0$. De (13) il suit immédiatement :

Théorème VI. — *La constante λ est la limite de $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ pour ζ*

(¹) *C. R. Acad. Sc.* du 13 septembre 1926. *Voir* aussi E. Landau et G. Valiron, *A deduction from* Schwarz's *lemma* (*Journal of the London Math. Soc.*, t. IV, p. 3, et C. Carathéodory, *Ueber die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen* (*Sitz. Ber, der Preuss Ak. der Wiss.*, t. IV, 1929).

infini $\frac{\eta}{\xi}$, *borné. Si le point* ζ *se rend à l'infini sur une droite* $\eta = $ *const., le quotient* $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ *ne croît jamais* (¹).

Si, inversement, on substitue dans (12) une fonction $\psi(y)$ non décroissante et telle que l'intégrale de Stieltjes $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(y)}{1+y^2}$ converge, du reste arbitraire, et si l'on prend pour λ un nombre positif ou nul quelconque et pour μ un nombre à partie réelle assez grande, alors (12) représente une fonction de notre classe. Nous sommes parvenus au théorème suivant :

Théorème VII. — *Les fonctions holomorphes dans le demi-plan* D$(x > 0)$ *et à partie réelle positive sont représentées par l'expression* (12), *dans laquelle l'intégrale est de Stieltjes;* $\psi(y)$ *est la fonction non décroissante la plus générale satisfaisant à la condition que l'intégrale de Stieltjes* $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(y)}{1+y^2}$ *converge,* λ *est une constante positive ou nulle et* μ *une autre constante.*

Théorème VIII. — *Toute fonction* $f(x)$ *de la classe satisfait à*

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leqq \frac{n!\,u(\zeta)}{\xi^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Les seules fonctions de la classe pour lesquelles une de ces relations peut devenir une égalité sont les fonctions de la forme

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha i} + \lambda z + \mu \qquad (A \geqq 0,\ \alpha \text{ réel},\ \lambda \geqq 0).$$

En effet, pour $n \geqq 2$, on a

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{(-1)^n\, n!}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(y)}{(\zeta - yi)^{n+1}};$$

donc

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leqq \frac{n!}{\pi\,\xi^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(y)}{|\zeta - yi|^2} \leqq \frac{n!}{\pi\,\xi^{n-1}}\cdot\frac{\pi\,u(\zeta)}{\xi} = \frac{n!\,u(\zeta)}{\xi^n}$$

(¹) *Voir* note de la page précédente.

Pour $n = 1$ les relations (11) et (13) donnent, en vertu de $\mu_1 \geqq 0$,

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(y)}{|\zeta - yi|^2} + \lambda \leqq \frac{u(\zeta)}{\xi}.$$

Les démonstrations montrent que l'égalité

$$|f^{(n)}(\zeta)| = \frac{n!\, u(\zeta)}{\xi^n}$$

en UN point exige l'existence d'une valeur α de y, telle que $\psi(y)$ est constante pour $y > \alpha$ et aussi pour $y < \alpha$, de sorte qu'elle montre un seul saut A pour $y = \alpha$. Alors (12) montre que f est de la forme annoncée.

Utrecht, août 1932.