BULLETIN DE LA S. M. F.

BASTIAAN GROOTENBOER

Sur la représentation conforme des domaines simplement connexes, au voisinage des frontières

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 128-140

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__128_0>

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DES DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES, AU VOISINAGE DES FRONTIÈRES;

PAR M. BASTIAAN GROOTENBOER.

1. Définition. — Si $w(z) = w(x+iy) = u+iv$ donne une représentation conforme d'un domaine G, situé dans le plan des z, sur un domaine H, situé dans le plan des w, cette représentation s'appelle *conforme au point frontière α de* G si

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ \text{angulaire}}} \frac{w(z) - w(\alpha)}{z - \alpha} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

z pouvant s'approcher de α dans un angle fixe quelconque de sommet α et situé dans G.

De la conformité en α il résulte que *les angles dans* G, *de sommet α, se conservent dans la représentation*, c'est-à-dire à deux courbes, formant dans α l'angle θ, correspondent deux courbes, formant le même angle θ dans $w(\alpha)$.

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Une représentation conforme du demi-plan $x > 0$ sur un domaine G du plan des w, où $w(\infty) = \infty$ sera appelée *conforme à l'infini* (au point frontière à l'infini de G) si

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{w(z)}{z} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

z pouvant s'approcher de l'infini dans un angle fixe quelconque

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \qquad \frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0.$$

Nous appellerons un domaine G un *domaine « valable »* si la représentation conforme de G sur le demi-plan droit est conforme à l'infini.

Nous entendrons toujours par un domaine : un domaine simplement connexe.

Nous bornant à des représentations du demi-plan $D(x > 0)$ sur des *domaines* G *situés dans le demi-plan* $u > 0$, nous savons que la dérivée angulaire à l'infini de la fonction représentative est réelle, non négative et finie [1] ([1]), et nous n'avons qu'à examiner si elle est positive, car dans ce cas, et dans ce cas seulement, le domaine est valable.

Après quelques lemmes nous démontrerons un critère pour la valabilité d'un domaine, qui dépend seulement de la frontière de ce domaine, puis nous démontrerons que ce critère A est équivalent aux critères analogues de MM. L. Ahlfors [2], C. Visser [3] et J. G. van der Corput [4].

Ensuite, un résultat de M. G. Valiron [5] sera obtenu d'une manière élémentaire.

Finalement, le critère A et le critère complet de M. L. Ahlfors donnent un critère B, pour des *domaines quelconques*.

Ce critère est équivalent à celui de M. L. Ahlfors et il contient un résultat de MM. Bessonof et Lavrentieff [6].

2. Lemme 1. — *Un domaine* G, *situé dans le demi-plan* $u > 0$, *est valable s'il contient un domaine valable* H.

La démonstration (*voir* les publications de M. G. Valiron [1] et [5]) est fondée sur le fait que la fonction $\frac{w(z)}{z}$ n'a jamais une valeur négative, si $w(z)$ donne la représentation conforme de $D(x > 0)$ sur G.

Lemme 2. — *Si l'on donne une représentation conforme du domaine valable* G *sur le domaine* G*, *telle que les points à l'infini se correspondent et que la représentation est conforme à l'infini, alors* G* *est valable comme* G.

Démonstration. — Si $w(z)$ donne la représentation conforme de $D(x > 0)$ sur G et $w(\infty) = \infty$, alors

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{w(z)}{z} \neq 0 \text{ et } \neq \infty.$$

([1]) [.] renvoie à la liste de Bibliographie se trouvant à la fin de cette publication.

De plus, la représentation étant conforme à l'infini, on peut remplacer $\underset{\text{angulaire}}{z \to \infty}$ par $\underset{\text{angulaire}}{w \to \infty}$.

Si $\psi(w)$ donne la représentation conforme de G sur G^* avec $\psi(\infty) = \infty$, alors aussi

$$\lim_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{\psi(w)}{w} \neq 0 \text{ et } \neq \infty.$$

$\psi\{w(z)\}$ donne la représentation conforme de $D(x > 0)$ sur G^*, tandis que

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{\psi\{w(z)\}}{z} = \lim_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{\psi(w)}{w} \cdot \lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulaire}}} \frac{w}{z} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

donc G^* est valable. C. Q. F. D.

Lemme 3. — *Un domaine* G, *contenant un domaine valable* G_1, *et situé dans un domaine valable* G_2, *est valable lui-même.*

Démonstration. — Si nous pratiquons une représentation conforme de G_2 sur $D(x > 0)$, nous transformons G et G_1 dans G^* et G_1^*, situés dans D.

En vertu du lemme 2, G_1^* est valable, et d'après le lemme 1 G^* est valable, par conséquent G aussi est valable, en vertu du lemme 2.

Remarque. — Un cas particulier du lemme 3 est le critère suivant de MM. Valiron et Carathéodory [1] :

Un domaine G, *situé dans un demi-plan, est valable s'il contient un demi-plan.*

3. Lemme 4. — *Inégalité I* (L. Ahlfors) :

Suppositions. — $s(\sigma)$ donne une représentation conforme de la bande $|\eta| \leqq \frac{b}{2}$ du plan des $\sigma = \xi + i\eta$ sur le domaine H du plan des $s = \mu + i\nu$, avec $s(+\infty) = +\infty$.

H est situé avec sa frontière Δ dans la bande $|\nu| \leqq \frac{a}{2}$ et il contient l'axe réel pour $\mu \geqq \mu_0$.

$\theta(\mu)$ est ce segment-là de la droite $R(s) = \mu$ qui appartient à H et coupe l'axe réel.

La fonction $\theta(\mu)$ n'a que des points de discontinuité isolés, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses μ des points de Δ où la tangente est discontinue ou parallèle à l'axe imaginaire est supposée isolée.

Le segment $\theta(\xi)$, défini par $R(\sigma) = \xi, |I(\sigma)| \leqq \frac{b}{2}$, est transformé en une courbe γ_ξ, de même $\theta(\mu)$ en γ_μ par la représentation inverse.

$\mu_1(\xi)$ et $\mu_2(\xi)$ sont le plus petit, respectivement le plus grand μ sur γ_ξ, de même $\xi_1(\mu)$ et $\xi_2(\mu)$ de ξ sur γ_μ.

$$\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) = \omega(\xi) = \text{l'oscillation de } \xi \text{ sur } \gamma_\mu,$$
$$\xi_2(\mu) - \xi_1(\mu) = \omega(\mu) = \text{l'oscillation de } \mu \text{ sur } \gamma_\xi.$$

Proposition :

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq b \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\theta(\mu)} - 4b,$$

pour

$$\mu_2 > \mu_1 \geqq \mu_0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\theta(\mu)} > 2 \qquad (\textit{Inégalité I}).$$

Pour la démonstration de cette inégalité, nous renvoyons à M. L. Ahlfors [2], p. 7-12 ou B. Grootenboer [8], p. 25-29.

Lemme 5. — *Inégalité II :*

Suppositions. — Celles du lemme 4 et en outre : H contient pour $\mu > \mu_0^*$ la bande $|\nu| \leqq h\frac{a}{2}$, $h < 1$.

Proposition :

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) \geqq h\frac{a}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 12a,$$

pour

$$\mu_1(\xi_1) \geqq \mu_0^* \qquad \text{et} \qquad \xi_2 - \xi_1 > 2b \qquad (\textit{Inégalité II}).$$

Démonstration :

a. Puisque $\theta(\mu) < a$, nous pouvons écrire l'inégalité I dans la forme

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq \frac{b}{a}(\mu_2 - \mu_1) - 4b \qquad \text{si } \mu_2 - \mu_1 > 2a.$$

En supposant que $\xi_1(\mu_2) = \xi_2(\mu_1) = \xi$, il en résulte

$$0 \geqq \frac{b}{a}\{\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi)\} - 4b \qquad \text{si } \mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) > 2a.$$

Par conséquent, on a toujours

$$\omega(\xi) = \mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) \leqq 4a.$$

b. $\sigma(s)$ donne une représentation conforme de la bande $|\nu| \leqq h \frac{a}{2}$ sur un domaine K, situé dans la bande $|\eta| \leqq \frac{b}{2}$.

K satisfait aux suppositions de l'inégalité I, excepté que peut-être K ne contient pas l'axe réel pour ξ suffisamment grand. Cependant, nous pouvons choisir pour $\theta^*(\xi)$ celui des segments de la droite $R(\sigma) = \xi$, appartenant à K et séparant les points $\sigma(\mu_0^*)$ et $+\infty$, qu'on rencontre le premier quand on parcourt la courbe correspondant à l'axe réel du plan des s (*voir* M. L. Ahlfors [2], p. 6, 7).

Par conséquent, nous pouvons appliquer l'inégalité I en remplaçant ξ par μ, μ par ξ, b par ha et a par b. On obtient :

$$\mu_1^*(\xi_2) - \mu_2^*(\xi_1) \geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 4ha,$$

si

$$\xi_2 - \xi_1 > 2b \qquad \text{et} \qquad \xi_1 > \xi_2(\mu_0^*),$$

où $\mu_1^*(\xi)$ et $\mu_2^*(\xi)$ sont le minimum et le maximum de μ sur γ_ξ si $|\nu| \leqq h\frac{a}{2}$.

Comme

$$\mu_1^*(\xi) \leqq \mu_1(\xi) + \omega(\xi)$$
$$\mu_2^*(\xi) \geqq \mu_2(\xi) - \omega(\xi) \qquad \text{et} \qquad h < 1,$$

il s'ensuit

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) \geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 4a - \omega(\xi_1) - \omega(\xi_2)$$
$$\geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 12a$$

(en vertu de a).

Remarques. — 1° Dans l'inégalité II, nous pouvons prendre pour ha la largeur minimale de la partie du domaine H qui contient l'axe réel entre γ_{ξ_1} et γ_{ξ_2}.

2° Il résulte de la partie a de la démonstration ci-dessus que

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq \frac{b}{a}(\mu_2 - \mu_1) - 4b \qquad \text{si } \mu_2 - \mu_1 > 2a.$$

Par conséquent, il suit de l'inégalité II :

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) > 2a, \qquad \text{si } h(\xi_2 - \xi_1) > 14b.$$

Si nous remplaçons dans l'inégalité première $\xi_1(\mu_2)$ par ξ_2 et $\xi_2(\mu_1)$ par ξ_1 nous aurons à remplacer μ_1 par $\mu_1(\xi_1)$ et μ_2 par $\mu_2(\xi_2)$ et nous trouvons

$$\xi_2-\xi_1 \geqq \frac{b}{a}\{\mu_2(\xi_2)-\mu_1(\xi_1)\}-4b,$$

donc

$$\mu_2(\xi_2)-\mu_1(\xi_1) \leqq \frac{a}{b}(\xi_2-\xi_1)+4a,$$

si $\xi_2-\xi_1 > \frac{14b}{h}$ et si ξ_1 est suffisamment grand.

4. **Le critère A.** — *Soit* G *un domaine situé dans le demi-plan* $u > 0$, *ayant l'infini pour point frontière accessible.*

La représentation conforme de G *sur le demi-plan* $x > 0$, *telle que les points à l'infini correspondent, est conforme à l'infini s'il y a une suite des points* v_n, *croissant vers l'infini, telle que, pour les points* w *situés sur la frontière de* G, *les deux séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \theta(w) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \theta(w) \log\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$$

convergent, où

$$\theta(w) = \frac{\pi}{2} - \arg w \qquad \text{pour } \arg w > 0,$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arg w \qquad \text{pour } \arg w < 0.$$

Si nous supposons $|v_n| = k^n$ $(k > 1)$, le critère A devient celui de M. L. Ahlfors ([2], p. 36) pour des domaines situés dans le demi-plan droit, parce que $\log \frac{k^{n+1}}{k^n}$ est constant.

Démonstration. — *a.* Nous commençons par démontrer un lemme.

Si $w(z)$ donne la représentation conforme de $D(x > 0)$ sur un domaine quelconque G, tel que $w(+\infty) = +\infty$, alors cette représentation est conforme à l'infini si, z tendant vers l'infini sur l'axe réel, $\log\left|\frac{w}{z}\right|$ tend vers $\mu \neq -\infty$ et $\neq +\infty$. $\operatorname{Arg}\frac{w}{z}$ est un conjugué de la fonction harmonique $\log\left|\frac{w}{z}\right|$, donc $\log\left|\frac{w}{z}\right|$ possède la propriété susnommée si

$$\int^{\infty} \left\{ \arg \frac{w(y)}{y} - \arg \frac{w(-y)}{-y} \right\} \frac{dy}{y}$$

converge (*voir* M. P. Fatou, *Acta mathematica*, Bd **30**, 1906).

Or, parce que

$$\arg y = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(-y) = -\frac{\pi}{2},$$

cette condition revient à

$$\int^{\infty} \left\{ \pi - \arg w(y) + \arg w(-y) \right\} \frac{dy}{y}$$

converge.

Si G est symétrique par rapport à l'axe réel, ce qui entraîne

$$\arg w(y) = -\arg w(-y),$$

nous trouvons la condition

$$\int^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arg w(y) \right\} \frac{dy}{y}$$

converge.

b. Maintenant, nous pouvons démontrer le critère A. Nous ferons usage du lemme 1 et nous démontrerons que la représentation conforme du domaine H suivant sur D $(x > 0)$ est conforme à l'infini.

H est défini comme il suit :

H est symétrique par rapport à l'axe réel et situé dans le demi-plan $u > 0$. Sur sa frontière $\theta(w) = \theta_n$ de $|w_{n_1}|$ jusqu'à $|w_{n_2}|$ et $|w_{n_2}| = |w_{(n+1)_1}|$.

Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \log \left| \frac{w_{n_2}}{w_{n_1}} \right|$$

convergent.

D'après *a*, la représentation conforme de H sur D $(x > 0)$ est conforme à l'infini si

$$\int^{\infty} \theta(y) \frac{dy}{y}$$

converge.

Soit $y(w_{n_1}) = y_{n_1}$, etc.

$$\int^{\infty} \theta(y) \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_{n_1}}^{y_{n_2}} \theta(y)\, dy + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_{n_2}}^{y_{(n+1)_1}} \theta(y) \frac{dy}{y},$$

car tous les $\theta(y)$ sont positifs.

En tenant compte de la remarque 1° de 3 et de l'inégalité II, nous avons

$$\mu_1(\xi_{n_2}) - \mu_2(\xi_{n_1}) \geqq h_n(\xi_{n_2} - \xi_{n_1}) - 12\pi \qquad \text{pour } \xi_{n_2} - \xi_{n_1} > 2\pi,$$

où $h_n\pi =$ largeur du domaine transformé entre s_{n_1} et s_{n_2};

$$s = \log w, \qquad \sigma = \log z; \qquad s_{n_1} = \log w_{n_1}, \qquad \sigma_{n_1} = \log i y_{n_1};$$
$$s_{n_1} = \mu_{n_1} + i\nu_{n_1}, \qquad \sigma_{n_1} = \xi_{n_1} + i\eta_{n_1}.$$

Donc

$$\log|w_{n_2}| - \log|w_{n_1}| \geqq h_n(\log y_{n_2} - \log y_{n_1}) - 12\pi,$$

si

$$\log\frac{y_{n_2}}{y_{n_1}} > 2\pi$$

(nous pouvons supposer que les y_{n_1} et y_{n_2} sont positifs parce que le domaine H est symétrique par rapport à l'axe réel).

La dernière inégalité donne

$$\log\frac{y_{n_2}}{y_{n_1}} \leqq \frac{1}{h_n}\log\left|\frac{w_{n_2}}{w_{n_1}}\right| + \frac{12\pi}{h_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

De même l'inégalité suivante :

$$\log\frac{y_{(n+1)_1}}{y_{n_1}} \leqq \frac{12\pi}{\text{le plus petit de } h_n \text{ et de } h_{n+1}} < 24\pi,$$

est valable à partir d'une certaine valeur N de n, parce que nous pouvons supposer que, pour $n > N$,

$$h_n > \frac{1}{2}.$$

En effet, $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n$ converge; donc il y a un N tel que, pour $n > N$,

$$\theta_n < \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad h_n = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_n}{\frac{\pi}{2}} > \frac{1}{2};$$

$$\int_{y_{n_1}}^{y_{n_2}} \theta(y)\frac{dy}{y} = \theta_n \log\frac{y_{n_2}}{y_{n_1}} \leqq \theta_n\frac{1}{h_n}\log\left|\frac{w_{n_2}}{w_{n_1}}\right| + 12\pi\frac{\theta_n}{h_n}$$
$$< 2\theta_n \log\left|\frac{w_{n_2}}{w_{n_1}}\right| + 24\pi\theta_n \qquad \text{pour } n > N;$$

$$\int_{y_{n_2}}^{y_{(n+1)_1}} \theta(y)\frac{dy}{y} < (\theta_n + \theta_{n+1})\log\frac{y_{(n+1)_1}}{y_{n_2}} \leqq (\theta_n + \theta_{n+1})24\pi \qquad \text{pour } n > N.$$

La convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \log \left| \frac{w_{n_2}}{w_{n_1}} \right|$$

entraîne donc celle de

$$\int^{\infty} \theta(y) \frac{dy}{y}$$

et nous avons démontré que la représentation conforme de H sur D ($x > 0$) est conforme à l'infini.

D'après le lemme 1, la même propriété subsiste pour le domaine G. C. Q. F. D.

Remarque. — Le résultat de M. G. Valiron [5] découle du critère précédent :

Un domaine G, qui satisfait aux conditions suivantes, est valable : G, situé dans le demi-plan $u > 0$, a pour frontière la courbe $u = |v| h(|v|)$, où $h(t)$ est positive, non croissante et tendant vers zéro quand t tend vers l'infini, tandis que $\int^{\infty} \frac{h(t)}{t} dt$ converge.

En effet,

$$\int^{\infty} \frac{h(t)}{t} dt = \sum^{\infty} \int_{k^n}^{k^{n+1}} \frac{h(t)}{t} dt \geqq \sum^{\infty} h(k^{n+1}) \log k$$

et

$$\max_{k^n,\, k^{n+1}} \theta(w) = \operatorname{arc\,tang} h(k^n),$$

donc le domaine G satisfait au critère de M. L. Ahlfors (comparer aussi le résultat B de M. J. Wolff [7]).

5. *Les critères de MM. L. Ahlfors, C. Visser et J. G. van der Corput et le critère* A *sont équivalents.*

M. C. Visser [3] et M. J. G. van der Corput [4] ont donné des critères dont M. van der Corput a pu démontrer l'équivalence (comparer B. Grootenboer [8], p. 41-44).

Nous commençons par démontrer l'équivalence des critères de MM. L. Ahlfors et J. G. van der Corput.

Le critère dernier est :

Si G *contient l'axe réel pour* $u > u_0$ *et* $\varphi(v)$ *est le plus grand* *de* $u(v)$ *et* $u(-v)$ *où* $\{u(v), v\}$ *et* $\{u(-v), -v\}$ *sont des points frontières de* G, *la représentation conforme de* $D(x>0)$ *sur* G *est conforme à l'infini, si*

$$\int^{\infty} \Big\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \Big\} \frac{dv}{v^2}$$

converge.

Le critère de M. L. Ahlfors peut s'énoncer dans la forme : G *est valable si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{k^n, k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v}$$

converge, parce que

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{u}{v} \sim \frac{u}{v} \qquad \text{et} \qquad |w| \sim v.$$

Pour démontrer l'équivalence de ces critères nous remarquons que

$$(1) \qquad \frac{\max\limits_{k^n, k^{n+1}} \varphi(v)}{k^n} \geqq \max_{k^n, k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v}$$

et

$$(2) \qquad \frac{\max\limits_{k^n, k^{n+1}} \varphi(v)}{k^{n+1}} \leqq \max_{k^n, k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v}.$$

Il s'ensuit que :

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad \int^{\infty} \Big\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \Big\} \frac{dv}{v^2} &= \sum^{\infty} \int_{k^n}^{k^{n+1}} \Big\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \Big\} \frac{dv}{v^2} \\
&\geqq \sum^{\infty} \Big\{ \max_{q \leqq k^n} \varphi(q) \Big\} \left(\frac{1}{k^n} - \frac{1}{k^{n+1}} \right) \\
&\geqq \sum^{\infty} \Big\{ \max_{k^{n-1}, k^n} \varphi(q) \Big\} \frac{k-1}{k^{n+1}} \\
&\geqq \frac{k-1}{k^2} \sum^{\infty} \max_{k^{n-1}, k^n} \frac{\varphi(q)}{q},
\end{aligned}
$$

à cause de (1);

$$
\begin{aligned}
(b) \qquad \int^{\infty} \Big\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \Big\} \frac{dv}{v^2} &= \sum^{\infty} \int_{k^n}^{k^{n+1}} \Big\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \Big\} \frac{dv}{v^2} \\
&\leqq \sum^{\infty} \Big\{ \max_{q \leqq k^{n+1}} \varphi(q) \Big\} \frac{k-1}{k^n}.
\end{aligned}
$$

Comme

$$\max_{q \leqq k^{n+1}} \varphi(q) \leqq \max_{0, k} \varphi(q) + \max_{k, k^2} \varphi(q) + \ldots + \max_{k^{n-1}, k^n} \varphi(q) + \max_{k^n, k^{n+1}} \varphi(q),$$

on a

$$\frac{\max\limits_{q \leqq k^{n+1}} \varphi(q)}{k^{n+1}} \leqq \frac{\max\limits_{0,k} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \ldots + \frac{\max\limits_{k^{n-1},k^n} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \frac{\max\limits_{k^n,k^{n+1}} \varphi(q)}{k^{n+1}}$$

$$\leqq \frac{\max\limits_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^n} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^{n-1}} + \ldots + \frac{\max\limits_{k^{n-1},k^n} \frac{\varphi(q)}{q}}{k} + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q},$$

à cause de (2).

Il s'ensuit que :

$$\int^{\infty} \left\{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \right\} \frac{dv}{v^2}$$

$$\leqq (k-1) \sum^{\infty} \left\{ \frac{\max\limits_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^n} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^{n-1}} + \ldots + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q} \right\}$$

$$= (k-1) \left\{ \max_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q} \sum^{\infty} \frac{1}{k^m} + \right.$$

$$\left. + \max_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{q} \sum^{\infty} \frac{1}{k^m} + \ldots + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum^{\infty} \frac{1}{k^m} + \ldots \right\}$$

$$= (k-1) \frac{k}{k-1} \sum^{\infty} \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q},$$

parce que tous les $\varphi(q)$ sont positifs.

Nous avons donc démontré l'équivalence des critères de MM. L. Ahlfors et J. G. van der Corput.

Maintenant nous allons démontrer l'équivalence du critère A et celui de M. L. Ahlfors, qui résulte du critère A.

Suppositions :

(1) $$\sum^{\infty} \max_{|v_n|, |v_{n+1}|} \theta(w)$$

et

(2) $$\sum^{\infty} \max_{|v_n|, |v_{n+1}|} \theta(w) \log \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right|$$

convergent.

Proposition :

(3) $$\sum^{\infty} \max_{k^n, k^{n+1}} \theta(w) \qquad (k > 1)$$

converge.

Démonstration :

$$\max_{|v_n|, |v_{n+1}|} \theta(w)$$

se présente tout au plus

$$\left\{\left[\frac{\log\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|}{\log k}\right]+2\right\}$$

fois comme terme de la série (3), où $[a]$ signifie l'entier de a.

D'après (1) et (2), (3) converge. C. Q. F. D.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent que, si pour un certain k la série (3) converge, cette série converge pour chaque k.

6. **Le critère B pour des domaines quelconques.** — Il s'ensuit du critère A et de celui de M. L. Ahlfors le critère suivant :

Un domaine G *qui satisfait aux conditions suivantes est un domaine valable :*

a. Il y a une suite de points v_n, croissant à l'infini, telle que, pour les points w sur la frontière de G, *les deux séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{|v_n|,|v_{n+1}|}\theta^*(w) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\max_{|v_n|,|v_{n+1}|}\theta^*(w)\log\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$$

convergent, où

$$\begin{aligned}\theta^*(w)=\theta(w)&=\frac{\pi}{2}-\arg w \quad \text{pour } \arg w>0\\ &=\frac{\pi}{2}+\arg w \quad \text{pour } \arg w<0\end{aligned}\Bigg\}\ \text{pour } \theta(w)>0$$
$$=0 \qquad \text{pour } \theta(w)<0.$$

La convergence de la première série donne un R *tel que, pour $u>$* R, G *contient l'axe réel.*

b. $\int^{\infty}\{b(r)-\pi\}\frac{dr}{r}$ *converge, où $b(r)$ signifie la longueur de l'arc de $|w|=r$ qui appartient à* G *et qui coupe l'axe réel.*

Si l'on choisit $|v_n|=k^n$, ce critère B se transforme en celui de M. L. Ahlfors et l'équivalence de ces critères résulte de 5.

Pour la démonstration du critère B, qui est fondée sur l'inégalité I, nous renvoyons à M. L. Ahlfors [2], p. 36-38, ou B. Grootenboer [8], p. 49-51.

Remarque. — Il s'ensuit des démonstrations de MM. Bessonof et Lavrentieff [6] qu'un domaine G est valable si, pour les points frontières (u, v) avec $v > V$,

$$|u| \leq |v|^{1-\varepsilon} \qquad (1 \geq \varepsilon > 0).$$

Ce résultat est une conséquence immédiate du critère B.

7. Bibliographie :

[1] Sur la dérivée angulaire des fonctions $w(z)$, qui sont holomorphes pour $x > 0$, avec $u > 0$, nous citons entre autres :

J. Wolff, *Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 918;

J. Wolff, *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500;

E. Landau et G. Valiron, *Journal of the London Math. Soc.*, vol. IV, 1929, p. 15;

G. Valiron, *Bulletin des Sciences math.*, 2e série, t. 33, 1929, p. 70;

C. Carathéodory, *Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wissensch.*, 1929, p. 43;

C. Visser, *Math. Annalen*, Bd 107, 1932, p. 28.

[2] L. Ahlfors, *Acta Soc. Fennicae*, nova series A, t. 1, no 9, 1930.

[3] C. Visser, *Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 1388.

[4] J. G. van der Corput, *Kon. Akad. van Wetensch.*, vol. 33, 1932, p. 330.

[5] G. Valiron, *Bulletin des Sciences math*,, 2e série, t. 56, 1932, p. 208.

[6] Bessonof et Lavrentieff, *Bulletin de la Soc. math. de France*, t. 58, 1931, p. 175.

[7] J. Wolff, *Comptes rendus*, t. 191, 1930, p. 921.

[8] B. Grootenboer, *Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een randpunt* (*Thèse*, Utrecht, Hollande, 1932).

La publication ci-dessus est la traduction d'une partie de cette thèse, complétée en quelques points. Mes remercîments sincères sont dus à M. J. Wolff pour m'avoir inspiré le sujet de cette étude et pour m'avoir constamment aidé de ses conseils au cours de mon travail.