

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JULES HAAG

## **Sur le calcul de la durée des petites oscillations en fonction de leur amplitude**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 61 (1933), p. 209-212

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1933\\_\\_61\\_\\_209\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__209_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE CALCUL DE LA DURÉE DES PETITES OSCILLATIONS  
EN FONCTION DE LEUR AMPLITUDE ;**

PAR M. J. HAAG.

1. Considérons un système à liaisons complètes, dépendant du paramètre  $q$  et soumis à des forces dérivant de la fonction  $U(q)$ . Supposons que, pour  $q = 0$ , ce système soit en équilibre stable. Abandonnons-le, sans vitesse initiale, dans la position correspondant à la valeur infiniment petite  $q_0$ . On sait que  $q$  oscille périodiquement entre  $q_0$  et une certaine valeur  $q_1$ , très voisine de  $-q_0$ .

Soit  $F(q)q'^2$  l'énergie cinétique du système. La durée d'une oscillation simple est

$$(1) \quad T = \int_{q_1}^{q_0} \frac{\sqrt{F(q)} dq}{\sqrt{U(q) - U(q_0)}}.$$

Nous nous proposons de calculer les premiers termes du développement de  $T$  suivant les puissances croissantes de l'amplitude

$$(2) \quad z = \frac{q_0 - q_1}{2}.$$

2. Posons

$$(3) \quad p = \frac{q_0 + q_1}{2}.$$

Cette quantité est donnée, en fonction de  $z$ , par l'équation

$$(4) \quad U(p + z) = U(p - z),$$

qui montre que  $p$  est une fonction paire de  $z$ .

Posons maintenant

$$q = p + z \cos \varphi.$$

La formule (1) devient

$$(5) \quad T = \int_0^\pi \frac{z \sqrt{F(p + z \cos \varphi)} \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{U(p + z \cos \varphi) - U(p + z)}}.$$

Pour obtenir le développement cherché, il suffit de développer la quantité sous le signe  $\int$  suivant les puissances de  $z$  et d'intégrer terme à terme.

Observons d'ailleurs qu'en changeant  $z$  en  $-z$  et  $\varphi$  en  $\pi - \varphi$ ,  $T$  ne change pas. Donc,  $T$  est une fonction paire de  $z$  et, dans le développement, nous n'avons pas à nous préoccuper des termes impairs.

3. Supposons que les fonctions  $F(q)$  et  $U(q)$  soient développables suivant les puissances de  $q$ , au voisinage de  $q = 0$  et soient

$$(6) \quad F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad (a_0 \neq 0)$$

et

$$(7) \quad U(q) = -bq^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^{n+2} \quad (b_1 \neq 0)$$

ces développements.

L'équation (4) s'écrit

$$U(z) - U(-z) + p[U'(z) - U'(-z)] + \frac{p^2}{2}[U''(z) - U''(-z)] + \dots = 0$$

ou, en tenant compte de (7), divisant par  $2bz$  et posant

$$(8) \quad \beta_n = \frac{b_n}{b},$$

$$(9) \quad \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 + \dots + 2p(-1 + 2\beta_2 z^2 + \dots) + p^2(3\beta_1 + \dots) + \dots = 0.$$

De cette équation, on tire

$$(10) \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n}.$$

Les coefficients  $c_n$  se déterminent par approximations successives, ou bien en substituant (10) dans (9). Voici les deux premiers :

$$(11) \quad c_1 = \frac{\beta_1}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{8} \beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{2} \beta_3.$$

4. Nous allons maintenant calculer le développement de  $T$  jusqu'au terme en  $z^6$ . Comme le radical du dénominateur contient  $z$  en facteur, il faut pousser le développement de la quantité sous ce radical jusqu'au terme en  $z^6$ .

On a

$$p + z \cos \varphi = z(\cos \varphi + e_1 z + e_2 z^2 + \dots);$$

$U(p + z \cos \varphi)$

$$\begin{aligned} &= b z^2 (\cos^2 \varphi + 2 e_1 z \cos \varphi + e_1^2 z^2 + 2 e_2 z^3 \cos \varphi + 2 e_1 e_2 z^4 + \dots) \\ &+ b_1 z^3 (\cos^3 \varphi + 3 e_1 z \cos^2 \varphi + 3 e_1^2 z^2 \cos \varphi + (e_1^3 + 3 e_2 \cos^2 \varphi) z^3 + \dots) \\ &+ b_2 z^4 (\cos^4 \varphi + 4 e_1 z \cos^3 \varphi + 6 e_1^2 z^2 \cos^2 \varphi + \dots) \\ &+ b_3 z^5 (\cos^5 \varphi + 5 e_1 z \cos^4 \varphi + \dots) \\ &+ b_4 z^6 \cos^6 \varphi + \dots \\ &= b z^2 \left\{ -\cos^2 \varphi - z \beta_1 \cos \varphi \sin^2 \varphi + z^2 \left( -\frac{\beta_1^2}{4} + \frac{3}{2} \beta_1^2 \cos^2 \varphi + \beta_2 \cos^4 \varphi \right) \right. \\ &\quad - z^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi (2 \beta_1 \beta_2 + \beta_3 + \beta_3 \cos^2 \varphi) \\ &\quad \left. + z^4 \left[ -\frac{1}{4} \beta_1^3 - \beta_1^2 \beta_2 - \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \frac{3}{2} \beta_1 \left( \frac{3}{4} \beta_1^3 + 3 \beta_1 \beta_2 + \beta_3 \right) \cos^2 \varphi \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_3 \cos^4 \varphi + \beta_4 \cos^6 \varphi \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

en tenant compte de (11).

Le développement de  $U(p + z)$  s'en déduit en faisant  $\varphi = 0$ .  
On a dès lors

$$\begin{aligned} (12) \quad &\frac{U(p + z \cos \varphi) - U(p + z)}{b z^2 \sin^2 \varphi} \\ &= 1 - z \beta_1 \cos \varphi - z^2 \left( \frac{3}{2} \beta_1^2 + \beta_2 + \beta_2 \cos^2 \varphi \right) \\ &\quad - z^3 (2 \beta_1 \beta_2 + \beta_3 + \beta_3 \cos^2 \varphi) \cos \varphi \\ &\quad - z^4 \left[ \frac{9}{8} \beta_1^3 + \frac{9}{2} \beta_1^2 \beta_2 + 4 \beta_1 \beta_3 + \beta_4 \right. \\ &\quad \quad \left. - \cos^2 \varphi \left( \frac{5}{2} \beta_1 \beta_3 + \beta_4 \right) + \beta_4 \cos^4 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Nous avons ensuite, en posant  $\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$ ,

$$\begin{aligned} (13) \quad &\frac{F(p + z \cos \varphi)}{a_0} = 1 + z_1 z \cos \varphi + z^2 \left( \frac{z_1 z_1}{2} + z_2 \cos^2 \varphi \right) \\ &\quad + z^3 \cos \varphi (z_2 z_1 + z_3 \cos^2 \varphi) \\ &\quad + z^4 \left( z_1 z_2 + \frac{z_2 z_1^2}{4} + \frac{3 z_3 z_1}{2} \cos^2 \varphi + z_4 \cos^4 \varphi \right) + \dots \end{aligned}$$

On a

$$T = \sqrt{\frac{a_0}{b}} \int_0^\pi \sqrt{X} d\varphi,$$

en posant

$$X = \frac{1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \dots}{1 - B_1 z - B_2 z^2 - B_3 z^3 - B_4 z^4 - \dots},$$

les  $A_1, B_1$  désignant les coefficients des développements (13) et (12).

Développons  $X$  :

$$\begin{aligned} X = & 1 + (A_1 + B_1)z + (A_2 + B_2 + A_1 B_1 + B_1^2)z^2 \\ & + (A_3 + A_2 B_1 + A_1 B_2 + A_1 B_1^2 + B_3 + 2 B_1 B_2 + B_1^3)z^3 \\ & + (A_4 + A_3 B_1 + A_2 B_2 + A_2 B_1^2 + A_1 B_3 \\ & + 2 A_1 B_1 B_2 + A_1 B_1^3 + B_4 + 2 B_1 B_3 + B_2^2 + 3 B_1^2 B_2 + B_1^4)z^4 \\ & + \dots \end{aligned}$$

Développons enfin  $\sqrt{X}$ , en laissant de côté les termes impairs :

$$\begin{aligned} (15) \quad \sqrt{X} = & 1 - \frac{z^2}{8} (4A_2 + 4B_2 + 3B_1^2 - A_1^2 + 2A_1 B_1) \\ & + \frac{z^4}{128} [64(A_1 + B_1) \\ & + 16(2A_3 B_1 + 2A_1 B_3 + 2A_2 B_2 - 2A_1 A_3 + 6B_1 B_3 + 3B_2^2 - A_2^2) \\ & + 8A_2(3A_1^2 - 3B_1^2 - 2A_1 B_1) + 8B_2(15B_1^2 - A_1^2 + 6A_1 B_1) \\ & + (A_1 + B_1)(-5A_1^3 + 9A_1^2 B_1 - 15A_1 B_1^2 + 35B_1^3)] + \dots \end{aligned}$$

Nous avons un polynôme bicarré en  $\cos \varphi$ . Pour l'intégration, nous pouvons remplacer  $\cos^2 \varphi$  par  $\frac{1}{2}$  et  $\cos^4 \varphi$  par  $\frac{3}{8}$ . Il vient, dès lors, après un calcul assez pénible,

$$(16) \quad T = \pi \sqrt{\frac{a_0}{b}} \left( 1 + H \frac{z^2}{16} + H' \frac{z^4}{1024} + \dots \right),$$

en posant

$$\begin{aligned} (17) \quad H = & 4\alpha_2 + 12\beta_2 + 15\beta_1^2 + 6\alpha_1\beta_1 - \alpha_1^2, \\ (18) \quad H' = & 192\alpha_4 - 960\beta_4 - 96\alpha_3\alpha_1 + 480\alpha_3\beta_1 + 480\beta_3\alpha_1 + 3360\beta_3\beta_1 \\ & - 48\alpha_2^2 + 224\alpha_2\beta_2 + 912\beta_2^2 + 72\alpha_2\alpha_1^2 - 240\alpha_2\alpha_1\beta_1 + 520\alpha_2\beta_1^2 \\ & - 56\beta_2\alpha_1^2 + 1296\beta_2\alpha_1\beta_1 + 5640\beta_2\beta_1^2 \\ & - 15\alpha_1^4 + 60\alpha_1^3\beta_1 - 130\alpha_1^2\beta_1^2 + 780\alpha_1\beta_1^3 + 2265\beta_1^4. \end{aligned}$$

La complexité du résultat n'engage pas à entreprendre le calcul des termes suivants du développement.

On peut évidemment utiliser les formules ci-dessus dans de nombreuses circonstances. Je les ai appliquées, en particulier, à la recherche des correcteurs d'isochronisme des pendules.