BULLETIN DE LA S. M. F.

JULES HAAG

Sur le calcul de la durée des petites oscillations en fonction de leur amplitude

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 209-212

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__209_0>

SUR LE CALCUL DE LA DURÉE DES PETITES OSCILLATIONS EN FONCTION DE LEUR AMPLITUDE;

PAR M. J. HAAG.

1. Considérons un système à liaisons complètes, dépendant du paramètre q et soumis à des forces dérivant de la fonction $U(q)$. Supposons que, pour $q = 0$, ce système soit en équilibre stable. Abandonnons-le, sans vitesse initiale, dans la position correspondant à la valeur infiniment petite q_0. On sait que q oscille périodiquement entre q_0 et une certaine valeur q_1, très voisine de $-q_0$.

Soit $F(q)q'^2$ l'énergie cinétique du système. *La durée d'une oscillation simple* est

$$T = \int_{q_1}^{q_0} \frac{\sqrt{F(q)}\,dq}{\sqrt{U(q) - U(q_0)}}. \tag{1}$$

Nous nous proposons de calculer les premiers termes du *développement de* T *suivant les puissances croissantes de l'amplitude*

$$z = \frac{q_0 - q_1}{2}. \tag{2}$$

2. Posons

$$p = \frac{q_0 + q_1}{2}. \tag{3}$$

Cette quantité est donnée, en fonction de z, par l'équation

$$U(p + z) = U(p - z), \tag{4}$$

qui montre que p est une *fonction paire* de z.

Posons maintenant

$$q = p + z\cos\varphi.$$

La formule (1) devient

$$T = \int_0^{\pi} \frac{z\sqrt{F(p + z\cos\varphi)}\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{U(p + z\cos\varphi) - U(p + z)}}. \tag{5}$$

Pour obtenir le développement cherché, il suffit de développer la quantité sous le signe $\int$ suivant les puissances de z et d'intégrer terme à terme.

Observons d'ailleurs qu'en changeant z en $-z$ et φ en $\pi-\varphi$, T ne change pas. Donc, T *est une fonction paire* de z et, dans le développement, nous n'avons pas à nous préoccuper des termes impairs.

3. Supposons que les fonctions $F(q)$ et $U(q)$ soient développables suivant les puissances de q, au voisinage de $q=0$ et soient

$$\text{(6)} \qquad F(q)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \qquad (a_0 > 0)$$

et

$$\text{(7)} \qquad U(q)=-bq^2+\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^{n+2} \qquad (b > 0)$$

ces développements.

L'équation (4) s'écrit

$$U(z)-U(-z)+p[U'(z)-U'(-z)]+\frac{p^2}{2}[U''(z)-U''(-z)]+\ldots=0$$

ou, en tenant compte de (7), divisant par $2bz$ et posant

$$\text{(8)} \qquad \beta_n=\frac{b_n}{b},$$

$$\text{(9)} \qquad \beta_1 z^2+\beta_3 z^4+\ldots+2p(-1+2\beta_2 z^2+\ldots)+p^2(3\beta_1+\ldots)+\ldots=0.$$

De cette équation, on tire

$$\text{(10)} \qquad p=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n}.$$

Les coefficients c_n se déterminent par approximations successives, ou bien en substituant (10) dans (9). Voici les deux premiers :

$$\text{(11)} \qquad c_1=\frac{\beta_1}{2}, \qquad c_2=\frac{3}{8}\beta_1^2+\beta_1\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3.$$

4. Nous allons maintenant calculer le développement de T jusqu'au terme en z^4. Comme le radical du dénominateur contient z en facteur, il faut pousser le développement de la quantité sous ce radical jusqu'au terme en z^6.

On a

$$p + z \cos\varphi = z(\cos\varphi + c_1 z + c_2 z^3 + \ldots);$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(p + z\cos\varphi)
&= -bz^2(\cos^2\varphi + 2c_1 z\cos\varphi + c_1^2 z^2 + 2c_2 z^3\cos\varphi + 2c_1 c_2 z^4 + \ldots)\\
&\quad + b_1 z^3 \left[\cos^3\varphi + 3c_1 z\cos^2\varphi + 3c_1^2 z^2\cos\varphi + (c_1^3 + 3c_2\cos^2\varphi) z^3 + \ldots\right]\\
&\quad + b_2 z^4(\cos^4\varphi + 4c_1 z\cos^3\varphi + 6c_1^2 z^2\cos^2\varphi + \ldots)\\
&\quad + b_3 z^5(\cos^5\varphi + 5c_1 z\cos^4\varphi + \ldots)\\
&\quad + b_4 z^6\cos^6\varphi + \ldots\\
&= bz^2 \Big\{ -\cos^2\varphi - z\beta_1\cos\varphi\sin^2\varphi + z^2\left(-\frac{\beta_1^2}{4} + \frac{3}{2}\beta_1^2\cos^2\varphi + \beta_2\cos^4\varphi\right)\\
&\qquad - z^3\cos\varphi\sin^2\varphi(2\beta_1\beta_2 + \beta_3 + \beta_3\cos^2\varphi)\\
&\qquad + z^4\Big[-\frac{1}{4}\beta_1^4 - \beta_1^2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1\beta_3\\
&\qquad\qquad + \frac{3}{2}\beta_1\left(\frac{3}{4}\beta_1^3 + 3\beta_1\beta_2 + \beta_3\right)\cos^2\varphi\\
&\qquad\qquad + \frac{5}{2}\beta_1\beta_3\cos^4\varphi + \beta_4\cos^6\varphi\Big] + \ldots \Big\}.
\end{aligned}$$

en tenant compte de (11).

Le développement de $\mathrm{U}(p + z)$ s'en déduit en faisant $\varphi = 0$. On a dès lors

$$\begin{aligned}
(12)\qquad & \frac{\mathrm{U}(p + z\cos\varphi) - \mathrm{U}(p + z)}{bz^2\sin^2\varphi}\\
&= 1 - z\beta_1\cos\varphi - z^2\left(\frac{3}{2}\beta_1^2 + \beta_2 + \beta_2\cos^2\varphi\right)\\
&\quad - z^3(2\beta_1\beta_2 + \beta_3 + \beta_3\cos^2\varphi)\cos\varphi\\
&\quad - z^4\Big[\frac{9}{8}\beta_1^4 + \frac{9}{2}\beta_1^2\beta_2 + 4\beta_1\beta_3 + \beta_4\\
&\qquad + \cos^2\varphi\left(\frac{5}{2}\beta_1\beta_3 + \beta_4\right) + \beta_4\cos^4\varphi\Big].
\end{aligned}$$

Nous avons ensuite, en posant $\alpha_n = \dfrac{a_n}{a_0}$,

$$\begin{aligned}
(13)\qquad \frac{\mathrm{F}(p + z\cos\varphi)}{a_0} &= 1 + \alpha_1 z\cos\varphi + z^2\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{2} + \alpha_2\cos^2\varphi\right)\\
&\quad + z^3\cos\varphi(\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\cos^2\varphi)\\
&\quad + z^4\left(\alpha_1 c_2 + \frac{\alpha_2\beta_1^2}{4} + \frac{3\alpha_3\beta_1}{2}\cos^2\varphi + \alpha_4\cos^4\varphi\right) + \ldots.
\end{aligned}$$

On a

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{a_0}{b}} \int_0^{\pi} \sqrt{\mathrm{X}}\, d\varphi,$$

en posant

$$\mathrm{X} = \frac{1 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \mathrm{A}_3 z^3 + \mathrm{A}_4 z^4 + \ldots}{1 - \mathrm{B}_1 z - \mathrm{B}_2 z^2 - \mathrm{B}_3 z^3 - \mathrm{B}_4 z^4 - \ldots},$$

les A_i, B_i désignant les coefficients des développements (13) et (12).

Développons X :

$$X = 1 + (A_1 + B_1) z + (A_2 + B_2 + A_1 B_1 + B_1^2) z^2$$
$$+ (A_3 + A_2 B_1 + A_1 B_2 + A_1 B_1^2 + B_3 + 2 B_1 B_2 + B_1^3) z^3$$
$$+ (A_4 + A_3 B_1 + A_2 B_2 + A_2 B_1^2 + A_1 B_3$$
$$+ 2 A_1 B_1 B_2 + A_1 B_1^3 + B_4 + 2 B_1 B_3 + B_2^2 + 3 B_1^2 B_2 + B_1^4) z^4$$
$$+ \dots$$

Développons enfin $\sqrt{X}$, en laissant de côté les termes impairs :

$$\sqrt{X} = 1 + \frac{z^2}{8} (4 A_2 + 4 B_2 + 3 B_1^2 - A_1^2 + 2 A_1 B_1) \tag{15}$$
$$+ \frac{z^4}{128} [64 (A_4 + B_4)$$
$$+ 16 (2 A_3 B_1 + 2 A_1 B_3 + 2 A_2 B_2 - 2 A_1 A_3 + 6 B_1 B_3 + 3 B_2^2 - A_2^2)$$
$$+ 8 A_2 (3 A_1^2 + 3 B_1^2 - 2 A_1 B_1) + 8 B_2 (15 B_1^2 - A_1^2 + 6 A_1 B_1)$$
$$+ (A_1 + B_1)(- 5 A_1^3 + 9 A_1^2 B_1 - 15 A_1 B_1^2 + 35 B_1^3)] + \dots$$

Nous avons un polynome bicarré en $\cos\varphi$. Pour l'intégration, nous pouvons remplacer $\cos^2\varphi$ par $\frac{1}{2}$ et $\cos^4\varphi$ par $\frac{3}{8}$. Il vient, dès lors, après un calcul assez pénible,

$$T = \pi \sqrt{\frac{a_0}{b}} \left(1 + H \frac{z^2}{16} + H' \frac{z^4}{1024} + \dots\right), \tag{16}$$

en posant

$$H = 4 \alpha_2 + 12 \beta_2 + 15 \beta_1^2 + 6 \alpha_1 \beta_1 - \alpha_1^2, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} H' = {} & 192 \alpha_4 + 960 \beta_4 - 96 \alpha_3 \alpha_1 + 480 \alpha_3 \beta_1 + 480 \beta_3 \alpha_1 + 3360 \beta_3 \beta_1 \\ & - 48 \alpha_2^2 + 224 \alpha_2 \beta_2 + 912 \beta_2^2 + 72 \alpha_2 \alpha_1^2 - 240 \alpha_2 \alpha_1 \beta_1 + 520 \alpha_2 \beta_1^2 \\ & - 56 \beta_2 \alpha_1^2 + 1296 \beta_2 \alpha_1 \beta_1 + 5640 \beta_2 \beta_1^2 \\ & - 15 \alpha_1^4 + 60 \alpha_1^3 \beta_1 - 130 \alpha_1^2 \beta_1^2 + 780 \alpha_1 \beta_1^3 + 2265 \beta_1^4. \end{aligned} \tag{18}$$

La complexité du résultat n'engage pas à entreprendre le calcul des termes suivants du développement.

On peut évidemment utiliser les formules ci-dessus dans de nombreuses circonstances. Je les ai appliquées, en particulier, à la recherche des correcteurs d'isochronisme des pendules.