BULLETIN DE LA S. M. F.

T. PEYOVITCH

Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 85-94
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__85_0>

SUR LA VALEUR DES INTÉGRALES A L'INFINI DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. T. PEYOVITCH

(Belgrade).

1. Soit donné un système d'équations

$$(1) \qquad \frac{dX_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) X_k = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $a_{ik}(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$, qui tendent vers des limites finies,

$$\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik},$$

$f_i(t)$ étant des fonctions continues pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$.

S'il existe un *nombre réel* λ tel que les produits $f_i(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tendent vers zéro pour $t = \infty$, tandis que, parmi les produits $f_i(t)e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, il y en a au moins un qui est illimité pour $t = \infty$, ce nombre λ, d'après Liapounoff (¹), nous appellerons le *nombre caractéristique* des fonctions $f_i(t)$, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Dans cet article, nous allons montrer que les équations (1), sous la condition

$$(2) \qquad \lim_{t=\infty} f_i(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(¹) *Problème général de la stabilité du mouvement* (*Annales de Toulouse*, 1907). Traduit du russe par M. E. Davaux.

admettent un système de solutions X_i tel que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} X_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0 \quad ([1]) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Considérons d'abord les équations (1) où $a_{ik}(t)$ sont des constantes, c'est-à-dire les équations

$$(3) \qquad \frac{d\overline{X}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{X}_k = f_i(t).$$

En posant

$$(4) \qquad \overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = \overline{y}_i \qquad \text{ou} \qquad \overline{X}_i = \overline{y}_i e^{-(\lambda-\varepsilon)t},$$

les équations (3) deviennent

$$(5) \qquad \frac{d\overline{y}_i}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon)\overline{y}_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}\overline{y}_k = f_i(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t}.$$

Soient r_i et r'_i les racines des équations caractéristiques correspondant respectivement aux systèmes (3) et (5), on aura

$$r'_i = r_i + \lambda - \varepsilon.$$

Nous allons distinguer deux cas :

1° Les racines $r'_i = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *distinctes*. Les équations (5), après la substitution

$$(6) \qquad \overline{z}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \overline{y}_k,$$

deviennent

$$(7) \qquad \frac{d\overline{z}_i}{dt} = r'_i \overline{z}_i + \varphi_i(t) = (r_i + \lambda - \varepsilon)\,\overline{z}_i + \varphi_i(t).$$

([1]) Poincaré a résolu cette question pour l'équation

$$X^{(n)} + A_1(t) X^{(n-1)} + \ldots + A_n(t) X = 0$$

[*Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal of Mathematics*, vol. VII, 1885, p. 1)]. Concernant la même question, il faut voir *Traité d'Analyse de M. Picard*, t. III, Chap. XIV, et les travaux de M. O. Perron (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 142, 1913, p. 254; 143, 1913, p. 25, et *Mathematische Zeitschrift*, B. 1, 1918).

où

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} f_k(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} \tag{8}$$

sont des fonctions continues pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$. Les intégrales générales des équations (7) sont

$$\bar{z}_i = e^{(r_i+\lambda-\varepsilon)t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_i+\lambda-\varepsilon)t}\, \varphi_i(t)\, dt + C_i\right],$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} |\bar{z}_i| \leqq \lim_{t=\infty} \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}\, |\varphi_i(t)|\, dt + |C_i|}{e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}}$$

$$= \frac{1}{|\rho_i+\lambda-\varepsilon|} \lim_{t=\infty} |\varphi_i(t)| \quad (^1),$$

ou, d'après (8) et (2),

$$\lim_{t=\infty} |\bar{z}_i| \leqq \frac{1}{|\rho_i+\lambda-\varepsilon|} \sum_{k=1}^{n} |b_{ik}| \lim_{t=\infty} |f_k(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t}| = 0. \tag{9}$$

Les transformations (6), qui peuvent être écrites sous la forme

$$\bar{y}_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, \bar{z}_k, \tag{6}$$

donnent, d'après (9) et (4),

$$\lim_{t=\infty} \overline{X}_i\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0.$$

([1]) Nous allons distinguer deux cas :

1° Pour $\rho_i + \lambda \leqq 0$, on aura $\rho_i + \lambda - \varepsilon < 0$, et l'intégrale générale tendra vers zéro (ρ_i est la partie réelle de r_i).

2° Pour $\rho_i + \lambda > 0$, on aura $\rho_i + \lambda - \varepsilon > 0$, car ε est aussi petite que l'on veut ; la solution qui tend vers zéro est de la forme

$$\bar{z}_i = e^{(r_i+\lambda-\varepsilon)t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_i+\lambda-\varepsilon)t}\, \varphi_i(t)\, dt$$

[*Voir* mon Mémoire : *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. I, 1932)].

2° Les racines $r' = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *multiples*. Les équations (5), après la substitution (6), se partagent en un certain nombre de groupes d'équations. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = (r_k + \lambda - \varepsilon)\,\bar{z}_1 + \varphi_1(t),$$

$$\frac{d\bar{z}_2}{dt} = \bar{z}_1 + (r_k + \lambda - \varepsilon)\,\bar{z}_2 + \varphi_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \bar{z}_{k-1} + (r_k + \lambda - \varepsilon)\,\bar{z}_k + \varphi_k(t),$$

dont les intégrales générales sont

$$\bar{z}_1 = e^{(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\,\varphi_1(t)\,dt + C_1\right],$$

$$\bar{z}_2 = e^{(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\,\varphi_2(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\,\bar{z}_1(t)\,dt + C_2\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où (¹)

$$\lim_{t=\infty} |\bar{z}_1| \leqq \frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t=\infty} |\varphi_1(t)|,$$

$$\lim_{t=\infty} |\bar{z}_2| \leqq \frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t=\infty} |\varphi_2(t)| + \frac{1}{(\rho_k + \lambda - \varepsilon)^2} \lim_{t=\infty} |\varphi_1(t)|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou, d'après (8) et (2),

$$\lim_{t=\infty} \bar{z}_k = 0.$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines. Les dernières équations, d'après (6′) et (4), donnent

$$\lim_{t=\infty} \overline{X}_i\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

I. *Les équations* (3) *admettent un système de solutions* $\overline{X}_i$

(¹) Pour $\rho_k + \lambda > 0$, on aura $t_0 = \infty$, $C_k = 0$.

satisfaisant, sous les conditions (2), *aux relations*

$$\lim_{t=\infty} \overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où λ *est le nombre caractéristique des fonctions* $f_i(t)$ [1]. *Ce système dépend d'un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des racines, dont les parties réelles satisfont aux conditions* $\rho_i + \lambda \leqq 0$.

3. Considérons maintenant les équations

$$\frac{dX_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, X_k = f_i(t), \tag{10}$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$, qui tendent vers des limites finies,

$$\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik}.$$

Posons

$$X_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = y_i \qquad \text{ou} \qquad X_i = y_i e^{-(\lambda-\varepsilon)t}, \tag{11}$$

les équations (10) deviennent

$$\frac{dy_i}{dt} + [a_{ii}(t) - \lambda + \varepsilon] y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}(t) y_k = f_i(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} \tag{12}$$

ou sous la forme

$$\frac{dy_i}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik} y_k = f_i(t)\, e^{(\lambda-\varepsilon)t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t) y_k.$$

où l'on a posé

$$\delta_{ik}(t) = a_{ik} - a_{ik}(t), \qquad \lim_{t=\infty} \delta_{ik}(t) = 0.$$

Soit $\overline{X}_i = X_i^0$ un système de solutions des équations (3) tel que les produits $X_i^0 e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ sont bornés pour $t \geqq t_0 \geqq 0$ [2], où λ est le

---

[1] Il est facile de démontrer que les équations (3) admettent un système de solutions $\overline{X}_i$ tel que les produits $\overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ tendent vers des limites finies si les produits $f_i(t) e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ tendent vers des limites finies pour $t = \infty$ (*voir* mon Mémoire cité).

[2] Ce qui arrivera si les produits $f_i(t) e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ sont bornés pour $t \geqq t_0 \geqq 0$.

nombre caractéristique des fonctions $f_i(t)$. Les équations (5) admettent alors, d'après (4), un système de solutions $\bar{y}_i = y_i^0$ bornées pour $t \geqq t_0 \geqq 0$.

En partant du système $\bar{y}_i = y_i^0$ de solutions des équations (5), on peut déterminer les suites des fonctions

$$y_i^1, \quad y_i^2, \quad \ldots, \quad y_i^m, \quad \ldots$$

comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dy_i^m}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) y_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} y_k^m = f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t) y_k^{m-1}$$

ou, en posant

$$z_i^0 = y_i^0, \qquad z_i^1 = y_i^1 - y_i^0, \quad \ldots, \qquad z_i^m = y_i^m - y_i^{m-1}, \quad \ldots,$$

on obtient des fonctions $z_i^m (m = 1, 2, \ldots)$ comme les solutions successives des équations

$$(13) \qquad \frac{dz_i^m}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) z_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} z_k^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t) z_k^{m-1}.$$

Nous allons distinguer deux cas :

1° Les racines $r'_i = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *distinctes*. Les équations (13), après la substitution linéaire à coefficients constants :

$$(14) \qquad u_i^m = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} z_k^m,$$

deviennent

$$(15) \qquad \frac{du_i^m}{dt} = r'_i u_i^m + \varphi_i^m(t) = (r_i + \lambda - \varepsilon) u_i^m + \varphi_i^m(t),$$

où

$$(16) \qquad \varphi_i^m(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t) z_k^{m-1} + b_{i2} \sum_{k=1}^{n} \delta_{2k}(t) z_k^{m-1} + \ldots + b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t) z_k^{m-1}.$$

Les intégrales générales des équations (15) sont

$$(17) \qquad u_i^m = e^{(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_i^m(t)\, dt + C_i^m \right].$$

Considérons maintenant les solutions successives u_i^m $(m=1, 2, \ldots)$ des équations ci-dessus.

Pour $m=1$, on aura

$$(18)\qquad |u_i^1| \leqq \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}\,|\varphi_i^1(t)|\,dt + |C_i^1|}{e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}}\quad (^1).$$

Puisque les fonctions $\varphi_i^m(t)$, pour $m=1$, d'après l'hypothèse

$$|y_i^0| = |z_i^0| \leqq C,$$

donnent

$$(19)\qquad |\varphi_i^1(t)| \leqq C\,\delta_i(t)$$

où l'on a

$$\delta_i(t) = |b_{i1}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_{1k}(t)| + \ldots + |b_{in}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_{nk}(t)|, \qquad \lim \delta_i(t) = 0,$$

on aura

$$|u_i^1| \leqq C\,\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}\,\delta_i(t)\,dt + D_i}{e^{-(\rho_i+\lambda-\varepsilon)t}}\quad (^2),$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_i^1| \leqq C\,\frac{1}{|\rho_i+\lambda-\varepsilon|}\lim_{t=\infty}\delta_i(t) = 0;$$

c'est-à-dire on aura

$$|u_i^1| \leqq C\,\eta_i(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t=\infty}\eta_i(t) = 0,$$

ou, d'après (14) pour $m=1$, on obtient

$$(20)\qquad |z_i^1| \leqq C\,\varepsilon(t) \leqq C\,\varepsilon$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\varepsilon(t) = 0, \qquad \varepsilon = \max_{t\geqq t_0\geqq 0}\varepsilon(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t=\infty} z_i^1 = 0.$$

---

(1) ρ_i est la partie réelle de r_i.

(2) Pour $\rho_i+\lambda>0$, il faut poser

$$D_i = 0\,(|C_i| = CD_i), \qquad t_0 = \infty$$

(*voir* mon Mémoire cité).

Connaissant les fonctions z_i^1 satisfaisant aux relations (20), les équations (17) pour $m = 2$, d'après (16), donnent

$$|u_i^2| \leqq C\varepsilon\eta_i(t)$$

ou, d'après (14), pour $m = 2$,

$$|z_i^2| \leqq C\varepsilon\varepsilon(t) \leqq C\varepsilon^2.$$

Il s'ensuit donc

$$\lim_{t=\infty} z_i^2 = 0.$$

En continuant ainsi, on obtient pour $t \geqq t_0 \geqq 0$

$$|z_i^m| \leqq C\varepsilon^{m-1}\varepsilon(t) \leqq C\varepsilon^m,$$

d'où

(21) $$\lim_{t=\infty} z_i^m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour que l'on ait

$$\varepsilon = \max_{t \geqq t_0 > 0} \varepsilon(t) < 1,$$

les séries

(22) $$y_i = z_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m = y_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m = \overline{y}_i + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m$$

convergent uniformément pour $t \geqq t_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (12), qui, d'après (21), satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} y_i = \lim_{t=\infty} \overline{y}_i,$$

d'où, d'après (11) et (4),

$$\lim_{t=\infty} X_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = \lim_{t=\infty} \overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t}.$$

2° Les racines $r_i' = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *multiples*. Les équations (13), après la substitution (14), se partagent en un certain nombre de groupes d'équations. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\frac{du_1^m}{dt} = (r_k + \lambda - \varepsilon)u_1^m + \varphi_1^m(t),$$

$$\frac{du_2^m}{dt} = u_1^m + (r_k + \lambda - \varepsilon)u_2^m + \varphi_2^m(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{du_k^m}{dt} = u_{k-1}^m + (r_k + \lambda - \varepsilon)u_k^m + \varphi_k^m(t),$$

dont les intégrales générales sont

$$u_1^m = e^{(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\varphi_1^m(t)\,dt + C_1^m\right],$$

$$u_2^m = e^{(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}\varphi_2^m(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} e^{-(r_k+\lambda-\varepsilon)t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right],$$

....

Considérons les solutions successives $u_i^m (m = 1, 2, \ldots)$ des équations ci-dessus. Pour $m = 1$, on aura, d'après (19),

$$|u_1^1| \leqq C\,\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-(\rho_k+\lambda-\varepsilon)t}\delta_1(t)\,dt + D_1}{e^{-(\rho_k+\lambda-\varepsilon)t}} \quad (^1),$$

$$|u_2^1| \leqq C\,\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-(\rho_k+\lambda-\varepsilon)t}\delta_2(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} dt_1\left[\int_{t_0}^{t_1} e^{-(\rho_k+\lambda-\varepsilon)t_2}\delta_1(t_2)\,dt_2 + D_1\right] + D_2}{e^{-(\rho_k+\lambda-\varepsilon)t}},$$

....,

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_1^1| \leqq C\,\frac{1}{|\rho_k+\lambda-\varepsilon|}\lim_{t=\infty}\delta_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2^1| \leqq C\left[\frac{1}{|\rho_k+\lambda-\varepsilon|}\lim_{t=\infty}\delta_2(t) + \frac{1}{(\rho_k+\lambda-\varepsilon)^2}\lim_{t=\infty}\delta_1(t)\right] = 0,$$

....,

c'est-à-dire que l'on aura

$$|u_k^1| \leqq C\eta_k(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t=\infty}\eta_k(t) = 0.$$

Il s'ensuit, d'après (14), que l'on a

$$|z_k^1| \leqq C\varepsilon(t) \leqq C\varepsilon.$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\varepsilon(t) = 0, \qquad \varepsilon = \max_{t \geqq t_0 \geqq 0}\varepsilon(t).$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines.

En continuant comme au cas des racines distinctes, il est facile de voir que les séries (22) convergent uniformément pour $t \geqq t_0 > 0$.

---

(1) Pour $\rho_k + \lambda > 0$, il faut poser

$$t_0 = \infty, \qquad D_k = 0.$$

t_0 étant assez grand, et satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} y_i = \lim_{t=\infty} \overline{y}_i,$$

d'où, d'après (11) et (4),

$$\lim_{t=\infty} X_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = \lim_{t=\infty} \overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t}.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

II. *Soit* $\overline{X}_i$ *un système de solutions des équations* (3) *tel que les produits* $\overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ *sont bornés pour* $t \geqq t_0 \geqq 0$, *où* λ *est le nombre caractéristique des fonctions* $f_i(t)$. *Au système* $\overline{X}_i$ *correspond un système de solutions des équations* (10), *qui, sous les conditions*

$$\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik},$$

satisfait aux relations

$$\lim_{t=\infty} X_i e^{(\lambda-\varepsilon)t} = \lim_{t=\infty} \overline{X}_i e^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

pour $t \geqq t_0 > 0$, t_0 *étant assez grand. Ce système* X_i *dépend d'un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des racines, dont les parties réelles satisfont aux conditions* $\rho_i + \lambda \leqq 0$.