

BULLETIN DE LA S. M. F.

T. PEYOVITCH

Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 85-94

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__85_0

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA VALEUR DES INTÉGRALES
A L'INFINI DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;**

PAR M. T. PEYOVITCH

(Belgrade).

1. Soit donné un système d'équations

$$(1) \quad \frac{dX_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) X_k = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où $a_{ik}(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$, qui tendent vers des limites finies,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = a_{ik},$$

$f_i(t)$ étant des fonctions continues pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$.

S'il existe un *nombre réel* λ tel que les produits $f_i(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tendent vers zéro pour $t = \infty$, tandis que, parmi les produits $f_i(t)e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), il y en a au moins un qui est illimité pour $t = \infty$, ce nombre λ , d'après Liapounoff ⁽¹⁾, nous appellerons le *nombre caractéristique* des fonctions $f_i(t)$, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Dans cet article, nous allons montrer que les équations (1), sous la condition

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

⁽¹⁾ *Problème général de la stabilité du mouvement (Annales de Toulouse, 1907)*. Traduit du russe par M. E. Davaux.

admettent un système de solutions X_i tel que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = 0 \quad (1) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Considérons d'abord les équations (1) où $a_{ik}(t)$ sont des constantes, c'est-à-dire les équations

$$(3) \quad \frac{d\bar{X}_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{X}_k = f_i(t).$$

En posant

$$(4) \quad \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = \bar{y}_i \quad \text{ou} \quad \bar{X}_i = y_i e^{-(\lambda - \varepsilon)t},$$

les équations (3) deviennent

$$(5) \quad \frac{d\bar{y}_i}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) \bar{y}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} \bar{y}_k = f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t}.$$

Soient r_i et r'_i les racines des équations caractéristiques correspondant respectivement aux systèmes (3) et (5), on aura

$$r'_i = r_i + \lambda - \varepsilon.$$

Nous allons distinguer deux cas :

1° Les racines $r'_i = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *distinctes*. Les équations (5), après la substitution

$$(6) \quad \bar{z}_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} \bar{y}_k,$$

deviennent

$$(7) \quad \frac{d\bar{z}_i}{dt} = r'_i \bar{z}_i + \varphi_i(t) = (r_i + \lambda - \varepsilon) \bar{z}_i + \varphi_i(t).$$

(2) Poincaré a résolu cette question pour l'équation

$$X^{(n)} + A_1(t)X^{(n-1)} + \dots + A_n(t)X = 0$$

[*Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal of Mathematics*, vol. VII, 1885, p. 1)]. Concernant la même question, il faut voir *Traité d'Analyse de M. Picard*, t. III, Chap. XIV, et les travaux de M. O. Perron (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 142, 1913, p. 254; 143, 1913, p. 25, et *Mathematische Zeitschrift*, B. 1, 1918).

où

$$(8) \quad \varphi_i(t) = \sum_{k=1}^n b_{ik} f_k(t) e^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

sont des fonctions continues pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$. Les intégrales générales des équations (7) sont

$$\bar{z}_i = e^{(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_i(t) dt + C_i \right],$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t} |\varphi_i(t)| dt + C_i}{e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t}} \\ &= \frac{1}{|\rho_i + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_i(t)| \quad (1), \end{aligned}$$

ou, d'après (8) et (2),

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i| \leq \frac{1}{|\rho_i + \lambda - \varepsilon|} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| \lim_{t \rightarrow \infty} |f_k(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t}| = 0.$$

Les transformations (6), qui peuvent être écrites sous la forme

$$(6) \quad \bar{y}_i = \sum_{k=1}^n d_{ik} \bar{z}_k,$$

donnent, d'après (9) et (4),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = 0.$$

(1) Nous allons distinguer deux cas :

1° Pour $\rho_i + \lambda \leq 0$, on aura $\rho_i + \lambda - \varepsilon < 0$, et l'intégrale générale tendra vers zéro (ρ_i est la partie réelle de r_i).

2° Pour $\rho_i + \lambda > 0$, on aura $\rho_i + \lambda - \varepsilon > 0$, car ε est aussi petite que l'on veut : la solution qui tend vers zéro est de la forme

$$\bar{z}_i = e^{(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \int_{t_0}^t e^{-(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_i(t) dt$$

[Voir mon Mémoire : *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 1, 1932)].

2° Les racines $r' = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *multiples*. Les équations (5), après la substitution (6), se partagent en un certain nombre de groupes d'équations. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= (r_k + \lambda - \varepsilon) \bar{z}_1 + \varphi_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= \bar{z}_1 + (r_k + \lambda - \varepsilon) \bar{z}_2 + \varphi_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\bar{z}_k}{dt} &= \bar{z}_{k-1} + (r_k + \lambda - \varepsilon) \bar{z}_k + \varphi_k(t), \end{aligned}$$

dont les intégrales générales sont

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= e^{(r_k + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(r_k + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_1(t) dt + C_1 \right], \\ \bar{z}_2 &= e^{(r_k + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(r_k + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_2(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-(r_k + \lambda - \varepsilon)t} \bar{z}_1(t) dt + C_2 \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où (1)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_1| &\leq \frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_1(t)|, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_2| &\leq \frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_2(t)| + \frac{1}{(\rho_k + \lambda - \varepsilon)^2} \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_1(t)|, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ou, d'après (8) et (2),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_k = 0.$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines. Les dernières équations, d'après (6') et (4), donnent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = 0.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

I. Les équations (3) admettent un système de solutions \bar{X}_i ;

(1) Pour $\rho_k + \lambda > 0$, on aura $t_0 = \infty$, $C_k = 0$.

satisfaisant, sous les conditions (2), aux relations

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où λ est le nombre caractéristique des fonctions $f_i(t)$ (1). Ce système dépend d'un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des racines, dont les parties réelles satisfont aux conditions $\rho_i + \lambda \leq 0$.

3. Considérons maintenant les équations

$$(10) \quad \frac{dX_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) X_k = f_i(t),$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions continues de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$, qui tendent vers des limites finies,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = a_{ik}.$$

Posons

$$(11) \quad X_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = y_i \quad \text{ou} \quad X_i = y_i e^{-(\lambda - \varepsilon)t},$$

les équations (10) deviennent

$$(12) \quad \frac{dy_i}{dt} + [a_{ii}(t) - \lambda + \varepsilon] y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}(t) y_k = f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t}$$

ou sous la forme

$$\frac{dy_i}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} y_k = f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t} + \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) y_k.$$

où l'on a posé

$$\delta_{ik}(t) = a_{ik} - a_{ik}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{ik}(t) = 0.$$

Soit $\bar{X}_i = X_i^0$ un système de solutions des équations (3) tel que les produits $X_i^0 e^{(\lambda - \varepsilon)t}$ sont bornés pour $t \geq t_0 \geq 0$ (2), où λ est le

(1) Il est facile de démontrer que les équations (3) admettent un système de solutions \bar{X}_i tel que les produits $\bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t}$ tendent vers des limites finies si les produits $f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t}$ tendent vers des limites finies pour $t \rightarrow \infty$ (voir mon Mémoire cité).

(2) Ce qui arrivera si les produits $f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t}$ sont bornés pour $t \geq t_0 \geq 0$.

nombre caractéristique des fonctions $f_i(t)$. Les équations (5) admettent alors, d'après (4), un système de solutions $\bar{y}_i = y_i^0$ bornées pour $t \geq t_0 \geq 0$.

En partant du système $\bar{y}_i = y_i^0$ de solutions des équations (5), on peut déterminer les suites des fonctions

$$y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^m, \dots$$

comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dy_i^m}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) y_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} y_k^m = f_i(t) e^{(\lambda - \varepsilon)t} + \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) y_k^{m-1}$$

ou, en posant

$$z_i^0 = y_i^0, \quad z_i^1 = y_i^1 - y_i^0, \dots, \quad z_i^m = y_i^m - y_i^{m-1}, \dots,$$

on obtient des fonctions $z_i^m (m = 1, 2, \dots)$ comme les solutions successives des équations

$$(13) \quad \frac{dz_i^m}{dt} + (a_{ii} - \lambda + \varepsilon) z_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} z_k^m = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) z_k^{m-1}.$$

Nous allons distinguer deux cas :

1^o Les racines $r_i' = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont *distinctes*. Les équations (13), après la substitution linéaire à coefficients constants :

$$(14) \quad u_i^m = \sum_{k=1}^n b_{ik} z_k^m,$$

deviennent

$$(15) \quad \frac{du_i^m}{dt} = r_i' u_i^m + \varphi_i^m(t) = (r_i + \lambda - \varepsilon) u_i^m + \varphi_i^m(t),$$

où

$$(16) \quad \begin{aligned} \varphi_i^m(t) &= b_{i1} \sum_{k=1}^n \delta_{1k}(t) z_k^{m-1} \\ &+ b_{i2} \sum_{k=1}^n \delta_{2k}(t) z_k^{m-1} + \dots + b_{in} \sum_{k=1}^n \delta_{nk}(t) z_k^{m-1}. \end{aligned}$$

Les intégrales générales des équations (15) sont

$$(17) \quad u_i^m = e^{(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(r_i + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_i^m(t) dt + C_i^m \right].$$

Considérons maintenant les solutions successives u_i^m ($m = 1, 2, \dots$) des équations ci-dessus.

Pour $m = 1$, on aura

$$(18) \quad |u_i^1| \leq \frac{\int_{t_0}^t e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t} |\varphi_i^1(t)| dt + |C_i^1|}{e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t}} \quad (1).$$

Puisque les fonctions $\varphi_i^m(t)$, pour $m = 1$, d'après l'hypothèse

$$|z_i^0| = |\varphi_i^0| \leq C,$$

donnent

$$(19) \quad |\varphi_i^1(t)| \leq C \delta_i(t)$$

où l'on a

$$\delta_i(t) = |b_{i1}| \sum_{k=1}^n |\delta_{1k}(t)| + \dots + |b_{in}| \sum_{k=1}^n |\delta_{nk}(t)|, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = 0,$$

on aura

$$|u_i^1| \leq C \frac{\int_{t_0}^t e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t} \delta_i(t) dt + D_i}{e^{-(\rho_i + \lambda - \varepsilon)t}} \quad (2),$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_i^1| \leq C \frac{1}{|\rho_i + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = 0;$$

c'est-à-dire on aura

$$|u_i^1| \leq C \eta_i(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_i(t) = 0,$$

ou, d'après (14) pour $m = 1$, on obtient

$$(20) \quad |z_i^1| \leq C \varepsilon(t) \leq C \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \max_{t \geq t_0 \geq 0} \varepsilon(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i^1 = 0.$$

(1) ρ_i est la partie réelle de r_i .

(2) Pour $\rho_i + \lambda > 0$, il faut poser

$$D_i = 0 \quad (|C_i| = CD_i), \quad t_0 = \infty$$

(voir mon Mémoire cité).

Connaissant les fonctions z_i^1 satisfaisant aux relations (20), les équations (17) pour $m = 2$, d'après (16), donnent

$$|u_1^2| \leq C \varepsilon \eta_i(t)$$

ou, d'après (14), pour $m = 2$,

$$|z_i^2| \leq C \varepsilon \varepsilon(t) \leq C \varepsilon^2.$$

Il s'ensuit donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i^2 = 0.$$

En continuant ainsi, on obtient pour $t \geq t_0 \geq 0$

$$|z_i^m| \leq C \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) \leq C \varepsilon^m,$$

d'où

$$(21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_i^m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour que l'on ait

$$\varepsilon = \max_{t \geq t_0 > 0} \varepsilon(t) < 1,$$

les séries

$$(22) \quad y_i = z_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m = y_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m = \bar{y}_i + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m$$

convergent uniformément pour $t \geq t_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (12), qui, d'après (21), satisfont aux relations

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}_i,$$

d'où, d'après (11) et (4),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i e^{(\lambda - \varepsilon)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon)t}.$$

2° Les racines $r_i' = r_i + \lambda - \varepsilon$ sont multiples. Les équations (13), après la substitution (14), se partagent en un certain nombre de groupes d'équations. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\begin{aligned} \frac{du_1^m}{dt} &= (r_k + \lambda - \varepsilon) u_1^m + \varphi_1^m(t), \\ \frac{du_2^m}{dt} &= u_1^m + (r_k + \lambda - \varepsilon) u_2^m + \varphi_2^m(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{du_k^m}{dt} &= u_{k-1}^m + (r_k + \lambda - \varepsilon) u_k^m + \varphi_k^m(t), \end{aligned}$$

dont les intégrales générales sont

$$u_1^m = e^{(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_1^m(t) dt + C_1^m \right],$$

$$u_2^m = e^{(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \left[\int_{t_0}^t e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \varphi_2^m(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} u_1^m(t) dt + C_2^m \right],$$

.....

Considérons les solutions successives u_i^m ($m = 1, 2, \dots$) des équations ci-dessus. Pour $m = 1$, on aura, d'après (19),

$$|u_1^1| \leq C \frac{\int_{t_0}^t e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \delta_1(t) dt + D_1}{e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t}} \quad (1),$$

$$|u_2^1| \leq C \frac{\int_{t_0}^t e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t} \delta_2(t) dt + \int_{t_0}^t dt_1 \left[\int_{t_0}^{t_1} e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t_2} \delta_1(t_2) dt_2 + D_1 \right] + D_2}{e^{-(\rho_k + \lambda - \varepsilon)t}},$$

.....

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_1^1| \leq C \frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_2^1| \leq C \left[\frac{1}{|\rho_k + \lambda - \varepsilon|} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_2(t) + \frac{1}{(\rho_k + \lambda - \varepsilon)^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) \right] = 0,$$

.....

c'est-à-dire que l'on aura

$$|u_k^1| \leq C \eta_k(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_k(t) = 0.$$

Il s'ensuit, d'après (14), que l'on a

$$|z_k^1| \leq C \varepsilon(t) \leq C \varepsilon,$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \max_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines.

En continuant comme au cas des racines distinctes, il est facile de voir que les séries (22) convergent uniformément pour $t \geq t_0 > 0$.

(1) Pour $\rho_k + \lambda > 0$, il faut poser

$$t_0 = \infty, \quad D_k = 0.$$

t_0 étant assez grand, et satisfont aux relations

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{y}_i,$$

d'où, d'après (11) et (4),

$$\lim_{l \rightarrow \infty} X_i e^{(\lambda - \varepsilon) t} = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon) t}.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

II. Soit \bar{X}_i un système de solutions des équations (3) tel que les produits $\bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon) t}$ sont bornés pour $t \geq t_0 \geq 0$, où λ est le nombre caractéristique des fonctions $f_i(t)$. Au système \bar{X}_i correspond un système de solutions des équations (10), qui, sous les conditions

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = a_{ik},$$

satisfait aux relations

$$\lim_{l \rightarrow \infty} X_i e^{(\lambda - \varepsilon) t} = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{X}_i e^{(\lambda - \varepsilon) t}$$

pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand. Ce système X_i dépend d'un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des racines, dont les parties réelles satisfont aux conditions $\rho_i + \lambda \leq 0$.