BULLETIN DE LA S. M. F.

B. HOSTINSKY

Résolution d'une équation fonctionnelle considérée par M. Hadamard

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 151-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__151_0>

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD;

PAR M. HOSTINSKÝ.

Introduction. — Le but de ce travail est de résoudre une équation qui a été établie en 1903 par Hadamard dans ce Bulletin [*voir* l'équation (9) du texte suivant]. La fonction g qui figure dans cette équation était (chez Hadamard), la fonction de Riemann relative à l'équation aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique. On sait que g satisfait à l'équation adjointe à l'équation aux dérivées partielles donnée et aux certaines données (14) et (16) sur les caractéristiques. Je montre qu'une fonction qui satisfait à (9) satisfait en même temps aux conditions (14) et (16). Par conséquent, les fonctions de Riemann relatives aux équations du type considéré doivent être comprises dans la solution générale de (9).

La fonction de Riemann $g(x, y, x_0, y_0)$ exprime l'influence des données initiales (données de Cauchy) sur les valeurs de l'intégrale. Construisons le rectangle R dont (x_0, y_0) et (x, y) sont deux sommets opposés et divisons R par une droite $X = x_1$ (où $x_0 < x_1 < x$) en deux rectangles R′ et R″; $g(x, y, x_0, y_0)$ peut être calculée soit au moyen des valeurs qu'elle prend sur R [c'est-à-dire sur les côtés opposés au sommet (x, y)], soit au moyen de celles qu'elle prend sur R′ et sur R″. Hadamard a obtenu l'équation (9) en égalant ces deux expressions. Il en résulte qu'il faut intégrer certaines transformations fonctionnelles linéaires pour résoudre (9) (*voir* n° 2 du texte); c'est cette méthode que j'ai adoptée dans ce travail.

1. Composition des transformations. — Considérons la transformation fonctionnelle linéaire T

$$f_1(y) = f(y) + \int_a^b K(y, y_0) f(y_0)\, dy_0$$

qui fait correspondre à une fonction donnée $f(y)$ une autre fonction $f_1(y)$. Le noyau $K(y, y_0)$ de la transformation T dans le domaine à deux dimensions est une fonction continue de y et de y_0, $a \leq y \leq b$, $a \leq y_0 \leq b$.

Appliquons successivement n transformations de cette forme; pour définir ces transformations, introduisons le noyau $K(\xi, y, y_0)$ qui dépend de y, y_0 et d'un paramètre $\xi (x_0 \leq \xi \leq x_1)$ de sorte que $K(\xi_1, y, y_0)$ sera le noyau de la première transformation, $K(\xi_2, y, y_0)$ celui de la seconde et ainsi de suite. Si nous opérons d'abord la transformation qui correspond à ξ_1, puis celle qui correspond à ξ_2, et enfin celle qui correspond à ξ_n, la transformation composée s'exprime par une formule qui ne diffère pas de celle qui donne T et son noyau $K(y, y_0)$ sera donné par la série à n termes suivante :

$$
\begin{aligned}
K(y, y_0) = & \sum_{i=1}^{n} K(\xi_i, y, y_0) \\
& + \int_a^b \left[\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} K(\xi_i, y, z) K(\xi_k, z, y_0) \right] dz \\
& + \int_a^b \int_a^b \left[\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{i-1} \sum_{l=1}^{k-1} K(\xi_i, y, z_1) K(\xi_k, z_1, z_2) K(\xi_l, z_2, y_0) \right] dz_1 dz_2 + \ldots \\
& + \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(\xi_n, y, z_1) K(\xi_{n-1}, z_1, z_2) \ldots K(\xi_1, z_{n-1}, y_0)\, dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}.
\end{aligned}
$$

2. Intégrale de la transformation par rapport au paramètre. — Soit h une quantité positive et infiniment petite, $A(\xi, y, y_0)$ une fonction finie et continue et envisageons la transformation infinitésimale

$$f_1(y) = f(y) + h \int_a^b A(\xi, y, y_0) f(y_0)\, dy_0$$

dont le noyau hA est infiniment petit. Elle fait correspondre à une fonction donnée $f(y)$ une autre fonction $f_1(y)$ qui en diffère infiniment peu. A chaque valeur de $\xi (x_0 \leq \xi \leq x)$ correspond une telle transformation. Divisons l'intervalle (x_0, x) en n parties égales de longueur $h = \frac{x - x_0}{n}$, désignons par

$$\xi_1 = x_0 + h, \qquad \xi_2 = x_0 + 2h, \ \ldots, \qquad \xi_{n-1} = x_0 + (n-1) h$$

les points de division et opérons successivement les transformations qui correspondent à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, et à $\xi_n = x$. La transformation composée sera définie par

$$f_1(y) = f(y) + \int_a^b K(y, y_0) f(y_0)\, dy_0,$$

où

$$\begin{aligned} y, y_0) = {} & h \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i, y, y_0) \\ & + h^2 \int_a^b \left[\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} A(\xi_i, y, \eta_1) A(\xi_k, \eta_1, y_0) \right] d\eta_1 \\ & + h^3 \int_a^b \int_a^b \left[\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{i-1} \sum_{l=1}^{k-1} A(\xi_i, y, \eta_1) A(\xi_k, \eta_1, \eta_2) A(\xi_l, \eta_2, y_0) \right] d\eta_1\, d\eta_2 + \ldots \end{aligned}$$

Faisons croître n indéfiniment. Les sommes qui figurent sous les signes d'intégration deviennent alors des intégrales par rapport aux variables ξ_1 ξ_2, ξ_3, et notre transformation composée tend vers une transformation limite appelée *intégrale de la transformation infinitésimale donnée*. J'ai donné les formules qui définissent cette intégrale dans un travail précédent [1].

Dans la suite nous nous occuperons de transformations d'une nature particulière; nous supposerons que la fonction $A(\xi, y, y_0)$ est égale à zéro pour $y < y_0$ de sorte que la transformation infinitésimale sera donnée par la formule

$$f_1(y) = f(y) + h \int_a^y A(\xi, y, y_0) f(y_0)\, dy_0 \tag{1}$$

avec $a < y$. Intégrons cette transformation par rapport à ξ entre les limites x_0 et x comme nous venons de l'expliquer. La formule écrite à la fin du n° 1 qni donne le noyau $K(y, y_0)$ de la transformation obtenue en composant n transformations successives reste valable; seulement il faut remplacer les domaines d'intégrations relatives aux variables η_i par des autres conformément à ce que maintenant la limite supérieure de l'intégrale (1) est égale à y

(1) *Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités* (*Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk*, n° 156, *Brno*, 1932).

tandis qu'elle était égale à b suivant la première définition de T. On arrive ainsi au résultat suivant : l'intégrale de la transformation (1) prise par rapport à ξ entre les limites x_0 et x est la transformation linéaire

$$f_1(y) = f(y) + \int_a^y \psi(x, y, x_0, y_0) f(y_0)\, dy_0$$

dont le noyau $\psi(x, y, x_0, y_0)$ est égal à la série infinie suivante :

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi(x, y, x_0, y_0) = & \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}(\xi, y, y_0)\, d\xi \\ & + \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi_1} \mathrm{A}(\xi_1, y, \eta)\, \mathrm{A}(\xi_2, \eta, y_0)\, d\xi_2\, d\xi_1\, d\eta \\ & + \int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{\eta_1}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi_1}\int_{x_0}^{\xi_2} \mathrm{A}(\xi_1, y, \eta_1)\, \mathrm{A}(\xi_2, \eta_1, \eta_2)\, \mathrm{A}(\xi_3, \eta_2, y_0) \\ & \quad \times d\xi_3\, d\xi_2\, d\xi_1\, d\eta_2\, d\eta_1 + \ldots . \end{aligned}$$

Le $m^{\text{ième}}$ terme de cette série est égal à une intégrale $(2m - 1)$-uple; il faut intégrer la fonction

$$\mathrm{A}(\xi_1, y_1, \eta_1)\, \mathrm{A}(\xi_2, \eta_1, \eta_2) \ldots \mathrm{A}(\xi_{m-1}, \eta_{m-2}, \eta_{m-1})\, \mathrm{A}(\xi_m, \eta_{m-1}, y_0)$$

par rapport aux variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ dans le domaine

$$x_0 \leqq \xi_m \leqq \xi_{m-1} \leqq \ldots \leqq \xi_1 \leqq x_0, \qquad y_0 \leqq \eta_{m-1} \leqq \eta_{m-2} \leqq \ldots \leqq \eta_1 \leqq y.$$

3. Équation fonctionnelle satisfaite par la fonction $\psi(x, y, x_0, y_0)$. — Opérons successivement deux fransformations linéaires dont la première fait correspondre la fonction $f_1(y)$ à la fonction $f(y)$:

$$f_1(z) = f(z) + \int_a^z \mathrm{K}(z, y_0) f(y_0)\, dy_0;$$

la seconde fait correspondre $f_2(y)$ à $f_1(y)$:

$$f_2(y) = f_1(y) + \int_a^y \mathrm{L}(y, z) f_1(z)\, dz.$$

La transformation ainsi composée qui fait correspondre $f_2(y)$ à $f(y)$ peut s'écrire sous la forme

$$f_2(y) = f(y) + \int_a^y \mathrm{M}(y, y_0) f(y_0)\, dy_0,$$

et son noyau M est défini par la formule de composition

$$M(y, y_0) = K(y, y_0) + L(y, y_0) + \int_{y_0}^{y} L(y, z) K(z, y_0)\, dz.$$

Soit maintenant x_1 un nombre tel que $x_0 < x_1 < x$ et intégrons la transformation (1) par rapport à ξ entre les limites x_0 et x_1, ensuite entre les limites x_1 et x. La première intégrale sera une transformation linéaire dont nous désignons le noyau par $\psi(x_1, y, x_0, y_0)$; la seconde aura $\psi(x, y, x_1, y_0)$ comme noyau. Opérons successivement ces deux transformations; d'après la définition d'intégrale la transformation composée ne sera autre chose que l'intégrale de la transformation (1) prise par rapport à ξ entre les limites x_0 et x, et la formule de composition donne

$$(3) \qquad \psi(x, y, x_0, y_0) = \psi(x_1, y, x_0, y_0) + \psi(x, y, x_1, y_0) + \int_{y_0}^{y} \psi(x, y, x_1, \eta)\psi(x_1, \eta, x_0, y_0)\, d\eta.$$

4. Transformation généralisée. — Considérons la transformation infinitésimale

$$f_1(y) = f(y) + h\int_{a}^{y} A(\xi, y, y_0) f(y_0)\, dy_0 + h\, b(\xi, y) f(y),$$

où h est infiniment petit, b et A des fonctions données et

$$x_0 \leqq \xi \leqq x_1, \qquad a \leqq y \leqq b, \qquad a \leqq y_0 \leqq b.$$

Cette transformation peut être mise sous la forme

$$f_1(y) = f(y) + h \lim_{\varepsilon=0} \int_{a}^{y} B(\varepsilon, \xi, y, y_0) f(y_0)\, dy_0,$$

où ε désigne une quantité positive infiniment petite et où la fonction B possède les propriétés suivantes :

1° $B(\varepsilon, \xi, y, y_0)$ est finie pour toutes les valeurs des variables telles que

$$x_0 \leqq \xi \leqq x, \qquad a \leqq y \leqq b, \qquad a \leqq y_0 \leqq b, \qquad \varepsilon > 0.$$

2° $$\lim_{\varepsilon=0} B(\varepsilon, \xi, y, y_0) = A(\xi, y, y_0), \qquad \text{si } y_0 < y.$$

3° $$B(\varepsilon, \xi, y, y_0) = 0, \qquad \text{si } y < y_0.$$

4° B devient infiniment grande, si y tend vers y_0 (avec $y_0 < y$) et si l'on fait ensuite $\lim \varepsilon = 0$ (avec $\varepsilon > 0$) et l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{y-\varepsilon}^{y} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\, dy_0 = \lim_{\varepsilon=0} \int_{y}^{y+\varepsilon} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y_0, y)\, dy_0 = b(\xi, y).$$

Pour obtenir une telle fonction il suffit, par exemple, de prendre, pour $y_0 < y$,

$$\mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0) = \mathrm{A}(\xi, y, y_0) + \frac{e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}}{c\varepsilon} b(\xi, y),$$

où

$$c = \int_0^1 e^{-u^2}\, du.$$

A chaque valeur du paramètre $\xi (x_0 \leqq \xi \leqq x)$ correspond une transformation (h étant infiniment petit)

$$(4) \qquad f_1(y) = f(y) + h \int_a^y \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0) f(y_0)\, dy_0.$$

Intégrons-la par rapport à ξ de x_0 à x. La transformation ainsi obtenue sera définie par la formule

$$f_1(y) = f(y) + \int_a^y \Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0) f(y_0)\, dy_0$$

et son noyau Φ_ε sera donné par la formule (2) où il faut remplacer $\mathrm{A}(\xi, y, y_0)$ par $\mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)$:

$$(5) \qquad \Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\, d\xi$$
$$+ \int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\xi_1} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_1, y, \eta) \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_2, \eta, y_0)$$
$$\times\, d\xi_2\, d\xi_1\, d\eta + \ldots.$$

Le $m^{\text{ième}}$ terme de cette série est une intégrale $(2m-1)$-uple; $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ sont les variables d'intégration, la fonction à intégrer est égale à

$$\mathrm{B}(\varepsilon, \xi_1, y, \eta_1) \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \ldots \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_{m-1}, \eta_{m-2}, \eta_{m-1}) \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_m, \eta_{m-1}, y_0)$$

et le domaine d'intégration est défini par les formules

$$x_0 \leqq \xi_m \leqq \xi_{m-1} < \ldots < \xi_1 \leqq x; \qquad y_0 \leqq \eta_{m-1} \leqq \eta_{m-2} \leqq \ldots \leqq \eta_1 \leqq y.$$

5. Propriétés de la fonction Φ_ε. — Nous venons de construire la fonction Φ_ε comme noyau de la transformation obtenue en intégrant la transformation (4) par rapport à ξ de x_0 à x. Par conséquent l'équation (3) aura lieu, c'est-à-dire

$$(6)\qquad \Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0) = \Phi_\varepsilon(x_1, y, x_0, y_0) + \Phi_\varepsilon(x, y, x_1, y_0) + \int_{y_0}^{y} \Phi_\varepsilon(x, y, x_1, \eta_1)\,\Phi(x_1, \eta_1, x_0, y_0)\,d\eta_1.$$

Nous nous proposons d'étudier ce que devient cette équation lorsque ε tend vers zéro ($\varepsilon > 0$).

Commençons par observer que, si $\delta > 0$, la quantité

$$\lim_{\delta=0} \Phi_\varepsilon(x, y_0 + \delta, x_0, y_0)$$

augmente indéfiniment, lorsque ε tend vers zéro. En effet, on voit que déjà le premier terme de la série (5) devient infiniment grand. Mais si l'on fait tendre d'abord ε vers zéro, Φ_ε tend vers une fonction continue que nous désignons par $\Phi(x, y, x_0, y_0)$ et qui reste finie et continue même si l'on fait $\lim \delta = 0$; elle tend vers une valeur déterminée quand $\lim y = y_0$. Cette fonction Φ est définie par les formules suivantes (avec $\delta > 0$) :

$$(7)\qquad \begin{aligned} \Phi(x, y, x_0, y_0) &= \lim_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0), \qquad \text{si} \quad y \neq y_0;\\ \Phi(x, y_0, x_0, y_0) &= \lim_{\delta=0}\ \lim_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon(x, y_0 + \delta, x_0, y_0). \end{aligned}$$

Pour obtenir une expression analytique de $\Phi(x, y, x_0, y_0)$ on peut employer la formule (5). Faisons d'abord tendre ε vers zéro dans chaque terme de cette série en supposant que $y \neq y_0$; nous obtenons ainsi une série qui représente Φ pour $y_0 \neq y$ et la définition de Φ s'achève suivant la seconde formule (7).

Revenons à l'équation (6) et cherchons ce qu'elle devient pour $\lim \varepsilon = 0$. Supposons d'abord que $y_0 < y$. Le premier membre de (6) ainsi que les deux premiers termes du second membre tendent respectivement vers $\Phi(x, y, x_0, y_0)$, $\Phi(x_1, y, x_0, y_0)$ et $\Phi(x, y, x_1, y_0)$. Pour étudier l'intégrale qui figure au second membre de (6), remplaçons-la par la somme de trois intégrales dont la première I_1 est prise entre les limites $y_0 + \delta$, $y - \delta$ (avec $\delta > 0$), la seconde I_2 entre y_0 et $y_0 + \delta$ et la troisième I_3

entre $y - \delta$ et y. Si ε tend vers zéro, la première intégrale I_1 tend vers

$$\int_{y_0+\delta}^{y-\delta} \Phi(x, y, x_1, \eta)\,\Phi(x_1, \eta, x_0, y_0)\,d\eta.$$

L'intégrale I_2 a pour limite

$$\Phi(x, y, x_1, y_0 + \alpha) \lim_{\varepsilon=0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \Phi_\varepsilon(x_1, \eta, x_0, y_0)\,d\eta,$$

où $\lim\limits_{\delta=0} \alpha = 0$; enfin l'intégrale I_3 tend vers

$$\Phi(x_1, y + \beta, x_0, y_0) \lim_{\varepsilon=0} \int_{y-\delta}^{y} \Phi_\varepsilon(x, y, x_1, \eta)\,d\eta,$$

où $\lim\limits_{\delta=0} \beta = 0$.

Il faut déterminer la valeur limite de $I_1 + I_2 + I_3$ lorsque δ tend vers zéro. Or I_1 tend évidemment dans ce cas vers la valeur

$$\int_{y_0}^{y} \Phi(x, y, x_1, \eta)\,\Phi(x_1, \eta, x_0, y_0)\,d\eta.$$

Pour calculer la limite de I_2, employons la formule (5) qui donne

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y_0+\delta} \Phi_\varepsilon(x_1, \eta, x_0, y_0)\,d\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_0+\delta} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\,dy\,d\xi \\ + \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{\xi_1}\int_{y_0}^{y_0+\delta}\int_{y_0}^{y} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_1, y, \eta)\,\mathrm{B}(\varepsilon, \xi_2, \eta, y_0) \\ \times d\eta\,dy\,d\xi_2\,d\xi_1 + \ldots.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la fonction B (*voir* n° 4) le premier terme au second membre donne

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_0+\delta} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\,dy\,d\xi = \int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\,d\xi + u, \qquad \lim_{\delta=0} u = 0;$$

le second terme donne, pour $\lim \varepsilon = 0$,

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{\xi_1} b(\xi_1, y_0)\,b(\xi_2, y_0)\,d\xi_2\,d\xi_1 + v = \frac{\left[\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\,d\xi\right]^2}{2!} + v, \quad \lim_{\delta=0} v = 0$$

et le $m^{\text{ième}}$ terme tend, si l'on fait d'abord $\lim \varepsilon = 0$ et ensuite $\lim \delta = 0$, vers la valeur

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{\xi_1}\cdots\int_{x_0}^{\xi_{m-1}} b(\xi_1, y_0)\, b(\xi_2, y_0)\ldots b(\xi_m, y_0)\, d\xi_m\, d\xi_{m-1}\ldots d\xi_1$$
$$= \frac{\left[\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi\right]^m}{m!}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\delta=0}\lim_{\varepsilon=0}\int_{y_0}^{y_0+\delta}\Phi_\varepsilon(x_1, \eta, x_0, y_0)\, d\eta = \sum_{m-1}^{\infty}\frac{\left[\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi\right]^m}{m!}$$
$$= e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} - 1,$$

et l'on trouve par un calcul analogue

$$\lim_{\delta=0}\lim_{\varepsilon=0}\int_{y_0-\delta}^{y_0}\Phi_\varepsilon(x, y, x_1, \eta)\, d\eta = e^{\int_{x_1}^{x} b(\xi, y)\, d\xi} - 1.$$

On arrive ainsi à ce que $\lim\limits_{\delta=0}\ \lim\limits_{\varepsilon=0}(I_1 + I_2 + I_3)$ est égale à l'expression

$$\int_{y_0}^{y}\Phi(x, y, x_1, \eta)\,\Phi(x_1, \eta, x_0, y_0)\, d\eta$$
$$+ \Phi(x, y, x_1, y_0)\left[e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} - 1\right] + \Phi(x_1, y, x_0, y_0)\left[e^{\int_{x_1}^{x} b(\xi, y)\, d\xi} - 1\right]$$

6. **Solution d'une équation fonctionnelle.** — Les résultats précédents nous permettent de résoudre l'équation fonctionnelle qui s'obtient en faisant $\lim \varepsilon = 0$ dans l'équation (6). En effet, d'une part la fonction Φ_ε qui satisfait à (6) tend pour $\lim \varepsilon = 0$ vers la fonction Φ définie par les formules (7); la série (5) conduit à une expression analytique de Φ, si l'on prend la limite de ses termes pour $\lim \varepsilon = 0$, et cette expression contient une fonction arbitraire $A(\xi, y, y_0)$ de trois variables. D'autre part, nous avons vu comment il faut calculer la limite pour $\lim \varepsilon = 0$ de l'intégrale qui figure au second membre de (6). L'équation (6) se réduit pour

$\lim \varepsilon = 0$ à

$$(8)\quad \Phi(x, y, x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \Phi(x, y, x_1, \eta)\,\Phi(x_1, \eta, x_0, y_0)\,d\eta$$
$$+ \Phi(x, y, x_1, y_0)\,e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\,d\xi} + \Phi(x_1, y, x_0, y_0)\,e^{\int_{x_1}^{x} b(\xi, y)\,d\xi},$$

c'est cette équation qui est satisfaite par la série infinie Φ que nous venons de construire et qui dépend d'une fonction arbitraire de trois variables.

7. **Équation de Hadamard.** — Étant donnée l'équation générale aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = 0,$$

le problème de Cauchy consiste à trouver la fonction inconnue u si ses valeurs ainsi que les valeurs que prend une des dérivées premières de u sont données sur un arc de courbe. La fonction u est une fonctionnelle linéaire de ces données et son expression [1] contient une fonction appelée fonction de Riemann; elle joue ici un rôle analogue à celui de la fonction de Green dans le cas du problème de Dirichlet. Hadamard a montré [2] que la fonction de Riemann $g(x, y, x_0, y_0)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante que je propose d'appeler *équation de Hadamard :*

$$(9)\quad g(x, y, x_0, y_0) - g(x, y, x_1, y_0)\,e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\,d\xi}$$
$$= \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta)\left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\,g(x_1, \eta, x_0, y_0)\right] d\eta.$$

Nous ne ferons pas dans la suite aucun usage de ce rapport entre (9) et entre l'équation aux dérivées partielles; nous nous proposons seulement de construire une solution de l'équation (9) contenant une fonction arbitraire de trois variables. Pour cela nous allons ramener l'étude de l'équation (9) à celle de l'équation (8).

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. IV.

(2) *Voir* HADAMARD, *Bulletin de la Société math. de France,* t. 31, 1903, p. 208-224.

8. Les relations entre les équations (8) et (9); solution de l'équation de Hadamard. — Soient $\Phi(x, y, x_0, y_0)$ une fonction continue de quatre variables x, y, x_0 et y_0, $g(x, y, x_0, y_0)$ une fonction continue et dérivable, $a(x, y)$ et $b(x, y)$ deux fonctions données et supposons que la relation suivante ait lieu entre Φ et g :

(10) $$g(x, y, x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \Phi(x, \eta_1, x_0, y_0)\, e^{\int_{\eta_1}^{y} a(x,\eta_1)\, d\eta_1} + e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} a(x,\eta_1)\, d\eta_1}$$

Il en résulte que

(10 *bis*) $$g(x, y_0, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi}$$

et

(11) $$\Phi(x, z, x_0, y_0) = \frac{\partial g(x, y, x_0, y_0)}{\partial y} - a(x, y)\, g(x, y, x_0, y_0).$$

Posons

$$\begin{aligned} L(g) = {} & g(x, y, x_0, y_0) \\ & - \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta) \left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta) g(x_1, \eta, x_0, y_0)\right] d\eta \\ & - g(x, y, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M(\Phi) = \Phi(x, y, x_0, y_0) - \int_{y_0} & \Phi(x, y, x_1, \eta)\, \Phi(x_1, \eta, x_0, y_0)\, d\eta \\ & - \Phi(x_1, y, x_0, y_0)\, e^{\int_{x_1}^{x} b(\xi, y)\, d\xi} \\ & - \Phi(x, y, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} \end{aligned}$$

Remplaçons, dans l'expression $L(g)$, la fonction g par le second membre de (10). L'expression $L(g)$ ainsi transformée contient deux termes indépendants de Φ qui se détruisent mutuellement. $L(g)$ contient — abstraction faite des intégrales simples qui figurent comme exposants de e — quatre termes qui dépendent de Φ. Un de ces termes est une intégrale double, les autres sont des intégrales simples. En transformant l'intégrale double au moyen de la formule de Dirichlet

$$\int_{y_0}^{y}\int_{\eta}^{y} F(\eta, \eta_1)\, d\eta_1\, d\eta = \int_{y_0}^{y}\int_{y}^{\eta_1} F(\eta, \eta_1)\, d\eta\, d\eta_1,$$

on trouve par un calcul simple

$$L(g) = \int_{y_0}^{y} e^{\int_{\eta_1}^{y} a(x,u)\,du}\, M[\Phi(x, \eta_1, x_0, y_0)]\, d\eta_1,$$

d'où résulte que

$$\frac{\partial L[g(x, y, x_0, y_0)]}{\partial y} - a(x, y)\, L[g(x, y, x_0, y_0)] = M[\Phi(x, y, x_0, y_0)].$$

Si donc la fonction g satisfait à l'équation $L(g) = 0$, la fonction correspondante Φ déterminée par la formule (11) satisfait à l'équation $M(\Phi) = 0$. Et inversement, si une fonction Φ satisfait à l'équation $M(\Phi) = 0$, on a pour la fonction g qui correspond à Φ d'après (10)

$$\frac{\partial L[g(x, y, x_0, y_0)]}{\partial y} - a(x, y)\, L[g(x, y, x_0, y_0)] = 0.$$

Cette équation différentielle linéaire détermine $L(g)$ en fonction de y. On a, pour $y = y_0$, d'après (10) et (10 *bis*),

$$L[g(x, y_0, x_0, y_0)] = g(x, y_0, x_0, y_0) - g(x, y_0, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi}$$
$$= e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi} - e^{\int_{x_1}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} = 0,$$

donc $L[g(x, y, x_0, y_0)]$ est identiquement égale à zéro.

La résolution de l'équation de Hadamard (9) ou $L(g) = 0$ est ainsi ramenée à celle de l'équation (8). *Pour obtenir la solution de l'équation de Hadamard* (9) *il suffit d'appliquer la transformation* (10) *à la fonction* Φ *qui satisfait à l'équation* (8).

Nous avons exposé au n° 5 comme on peut construire cette fonction Φ; elle contient une fonction arbitraire A de trois variables, donc l'expression de g contiendra elle-même cette fonction arbitraire.

9. Propriétés de l'équation de Hadamard. — Soit

$$z_1(y) = \int_{y_0}^{y} g(x_1, y, x_0, \eta)\left[\frac{\partial z(\eta)}{\partial \eta} - a(x_0, \eta)\, z(\eta)\right] d\eta \tag{12}$$

une transformation fonctionnelle linéaire en z et en $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ qui fait correspondre à $z(y)$ une autre fonction $z_1(y)$. Nous nous proposons de déterminer les fonctions continues g et a de telle manière que la suite de deux transformations T_1 et T_2 du type (12) soit équivalente à une seule transformation T du même type. Pour préciser, appelons $g(x_1, y, x_0, \eta)$ le noyau de la transformation (12); η est la variable d'intégration, y est la variable indépendante et x_1, x_0 sont deux paramètres. Nous supposons que la transformation T_1 correspond au noyau $g(x_1, y, x_0, \eta)$, celle de T_2 au noyau $g(x, y, x_1, \eta)$ et celle de T au noyau $g(x, y, x_0, \eta)$. T_1 est exprimée par la formule (12); T_2 s'exprime par

$$z_2(y) = \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta)\left[\frac{\partial z_1(\eta)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\, z_1(\eta)\right] d\eta.$$

Éliminons $z_1(\eta)$ et $\frac{\partial z_1(\eta)}{\partial \eta}$ à l'aide de (12); l'expression de $z_2(y)$ contiendra alors deux intégrales doubles et une intégrale simple. Appliquons aux intégrales doubles la transformation de Dirichlet comme au n° 8; $z_2(y)$ prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} z_2(y) = \int_{y_0}^{y} &\left[\frac{\partial z(\eta_1)}{\partial \eta_1} - a(x_0, \eta_1)\, z(\eta_1)\right] \\ &\times \Big\{ g(x, y, x_1, \eta)\, g(x_1, \eta, x_0, \eta_1) + \int_{\eta_1}^{y} g(x, y, x_1, \eta) \\ &\quad \times \left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, \eta_1)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\, g(x_1, \eta, x_0, \eta_1)\right] d\eta \Big\}\, d\eta_1. \end{aligned}$$

Cette formule doit être équivalente à

$$z_2(y) = \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_0, \eta)\left[\frac{\partial z(\eta)}{\partial \eta} - a(x_0, \eta)\, z(\eta)\right] d\eta,$$

il suffit pour cela que g satisfasse à la condition

$$\begin{aligned} g(x, y, x_0, y_0) = g(x, y, x_1, y_0)\, g(x_1, y_0, x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta) \\ \times \left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\, g(x_1, \eta, x_0, y_0)\right] d\eta. \end{aligned} \tag{13}$$

Nous allons montrer que l'équation (13) ne diffère pas de l'équation de Hadamard (9). En effet, si $y = y_0$, l'équation (13) se réduit à

$$g(x, y_0, x_0, y_0) = g(x, y_0, x_1, y_0)\, g(x_1, y_0, x_0, y_0).$$

Dérivons cette équation par rapport à x; il est visible que le rapport

$$\frac{\dfrac{\partial g(x, y_0, x_0, y_0)}{\partial x}}{g(x, y_0, x_0, y_0)} = \frac{\dfrac{\partial g(x, y_0, x_1, y_0)}{\partial x}}{g(x, y_0, x_1, y_0)}$$

ne dépend ni de x_0 ni de x_1; il est donc égal à une fonction $b(x, y_0)$ de x et de y_0. L'équation

$$\frac{\partial g(x, y_0, x_0, y_0)}{\partial x} - b(x, y_0)\, g(x, y_0, x_0, y_0) = 0$$

donne

$$g(x, y_0, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi + C},$$

où C est une constante. Substituons le second membre de cette formule à la place de $g(x, y_0, x_0, y_0)$ dans l'équation (13) et posons-y $x = x_1 = x_0$, $y = y_0$; elle se réduit à

$$e^{C} = e^{2C},$$

donc $C = 0$. Par conséquent toute fonction dérivable g qui satisfait à l'équation (13) satisfait en même temps à la condition

$$(14) \qquad g(x, y_0, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi},$$

ce qui montre que l'équation (13) ne diffère pas de l'équation (9) ou $L(g) = 0$, L étant le symbole introduit au n° **8**.

Calculons encore la valeur de $g(x_0, y, x_0, y_0)$, g étant une fonction dérivable qui satisfait à (9). Pour cela écrivons l'équation (9) en y substituant $x = x_1 = x_0$:

$$(15) \qquad \int_{y_0}^{y} g(x_0, y, x_0, \eta) \left[\frac{\partial g(x_0, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_0, \eta)\, g(x_0, \eta, x_0, y_0) \right] d\eta = 0,$$

Dérivons cette équation par rapport à y et posons, pour abréger,

$$f(y, y_0) = -a(x_0, y)\, g(x_0, y, x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y, x_0, y_0)}{\partial y}.$$

En tenant compte de ce que (14) donne $g(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$, il vient

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial g(x_0, y, x_0, \eta)}{\partial y} f(\eta, y_0)\, d\eta + f(y, y_0) = 0.$$

Multiplions l'équation (15) par $a(x_0, y)$ et retranchons-la de la précédente; le résultat peut s'écrire

$$\int_{y_0}^{y} f(y, \eta) f(\eta, y_0)\, d\eta + f(y, y_0) = 0$$

ou bien

$$f(y, y_0) = \int_{y}^{y_0} f(y, \eta) f(\eta, y_0)\, d\eta.$$

Cette équation donne, si l'on remplace $f(\eta, y_0)$ sous le signe d'intégration par intégrale

$$\int_{\eta}^{y_0} f(\eta, \eta_1) f(\eta_1, y_0)\, d\eta_1,$$

$$f(y, y_0) = \int_{y}^{y_0} \int_{\eta}^{y_0} f(y, \eta) f(\eta, \eta_1) f(\eta_1, y_0)\, d\eta_1\, d\eta,$$

d'où l'on déduit facilement la formule plus générale

$$f(y, y_0) = \int_{y}^{y_0} \int_{\eta}^{y_0} \cdots \int_{\eta_{n-2}}^{y_0} f(y, \eta) f(\eta, \eta_1) \cdots \times f(\eta_{n-1}, y_0)\, d\eta_{n-1}\, d\eta_{n-2} \ldots d\eta_1\, d\eta.$$

Si $|f(y, y_0)| < \mathrm{M}$, où M est une constante, on a

$$|f(y, y_0)| < \mathrm{M}^n \int_{y}^{y_0} \int_{\eta}^{y_0} \cdots \int_{\eta_{n-2}}^{y_0} d\eta_{n-1}\, d\eta_{n-2} \ldots d\eta = \frac{\mathrm{M}^n}{n!};$$

n est un entier abitraire, donc $|f(y, y_0)|$ est plus petit qu'un nombre positif arbitraire. Par conséquent (¹), $f(y, y_0) = 0$ ou

$$\frac{\partial g(x_0, y, x_0, y_0)}{\partial y} - a(x_0, y)\, g(x_0, y, x_0, y_0) = 0,$$

d'où

$$(16)\qquad g(x_0, y, x_0, y_0) = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)d\eta};$$

a constante d'intégration à l'exposant doit être égale à zéro, car $g(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$ d'après (14).

En résumé, l'équation $L(g) = 0$ ou (9) exprime la condition nécessaire pour que les transformations fonctionnelles (12) forment un groupe en ce sens que la suite de deux transformations dont la première correspond à $g(x_1, y, x_0, \eta)$ et la seconde à $g(x, y, x_1, \eta)$ soit équivalente à la transformation qui correspond à $g(x, y, x_0, \eta)$. Une fonction dérivable g qui satisfait à l'équation (9) satisfait en même temps aux équations (14) et (16).

Remarquons que l'équation (14) apparaît ici comme une conséquence de (9) tandis que (*voir* n° 8) l'équation (10 *bis*), identique à (14), résultait de la relation particulière (10) entre les fonctions Φ et g.

10. Conclusion. — Nous avons vu comment on peut former une solution de l'équation (9) contenant une fonction arbitraire A de trois variables. La fonction de Riemann rappellée au n° 7 est-elle comprise dans cette solution? On sait que la fonction de Riemann satisfait à l'équation adjointe à l'équation aux dérivées partielles introduite au n° 7 [*voir* Darboux, *loc. cit.*] ainsi qu'aux conditions (14) et (16). Ces deux conditions sont vérifiées par toute fonction qui satisfait à (9). Le problème, pas encore résolu, consiste à déterminer la fonction A qui entre dans notre solution générale de (9) de telle manière que la fonction inconnue satisfasse à une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. Le problème de Cauchy relatif aux équations de ce type apparaît ainsi comme un cas particulier du problème plus général qui consiste à résoudre l'équation de Hadamard (9).

---

(1) Ce raisonnement connu sert à démontrer qu'une équation de Volterra de seconde espèce et homogène n'admet que la solution zéro.