BULLETIN DE LA S. M. F.

DIMITRIE POMPEIU

Sur les équations fonctionnelles des polynômes à variables réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 185-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__185_0>

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DES POLYNOMES A VARIABLES RÉELLES;

PAR M. DIMITRIE POMPEIU.

1. Dans la théorie des fonctions holomorphes, dépendant d'une variable complexe, on peut prendre comme définition de l'*holomorphie* la condition fonctionnelle de Morera

$$\int_C f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

la *continuité* de $f(z)$ étant sous-entendue et le domaine où l'on trace les courbes fermées arbitraires C étant supposé simplement connexe.

On peut démontrer après que le produit de deux fonctions holomorphes est aussi une fonction holomorphe, et, passer ensuite par le procédé classique connu à la *représentation* de $f(z)$ autour d'un point régulier $z = a$, par une série entière :

$$f(z) = \Sigma A_m (z-a)^m. \tag{2}$$

2. Dans ce qui suit je me propose de montrer que pour les polynomes entiers, dans le domaine réel, on peut passer des *équations fonctionnelles*, analogues à (1), à la *représentation*, de la forme (2), par un procédé de raisonnement qui rappelle de très près celui esquissé, au numéro précédent, pour les fonctions holomorphes, dans le domaine complexe.

C'est, d'ailleurs, dans ce seul procédé de raisonnement que peut résider l'intérêt des développements qui vont suivre car les équations fonctionnelles des polynomes entiers à variables réelles (de degré quelconque) ont été données depuis longtemps par M. Fréchet (*Nouvelles Annales*, t. IX, 1909, p. 145) qui a fait aussi remarquer que leur résolution se ramène à la classique équation de Cauchy

$$f(x, y) = f(x) + f(y).$$

Pour plus de simplicité, dans l'exposition, je me suis borné aux polynomes du premier et du second dégré et, d'ailleurs, j'ai pris les équations fonctionnelles sous la forme même qui nous est imposée par les applications.

3. On dit, en Cinématique, que le mouvement d'un point est *uniforme* lorsque ce point parcourt, sur sa trajectoire (nous la supposerons *rectiligne*) des espaces égaux en temps égaux.

Si

$$s = f(t)$$

est la relation entre *temps* et *espace* la définition du mouvement *uniforme* s'exprime par la condition fonctionnelle suivante :

$$(3) \qquad f(t + \tau) - f(t) = f(t + \tau + \theta) - f(t + \theta),$$

satisfaite quels que soient les nombres réels t, τ et θ.

4. Considérons une parabole et prenons, dans le plan de cette parabole, un système de référence Oxy tel que Oy soit parallèle à l'axe de la parabole. On sait que la parabole, comme toute conique, admet des diamètres rectilignes et que, pour la parabole, ces diamètres sont tous parallèles à l'axe.

Mais, comme Bertrand l'a montré (*Journal de Liouville*, 1842), la propriété des diamètres rectilignes est caractéristique aux coniques et alors la parabole peut être définie comme une courbe continue qui ne peut être rencontrée par une droite qu'en deux points, au plus, et qui possède des diamètres rectilignes tous parallèles.

D'après cela si nous écrivons

$$y = f(x),$$

pour équation de la parabole, la fonction continue $f(x)$ est caractérisée par la condition fonctionnelle suivante :

$$(4) \qquad \frac{f(x_1) - f(x_4)}{x_1 - x_4} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3},$$

les quatre points

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

étant, sauf la condition de former deux segments (x_1, x_4), (x_2, x_3) *concentriques* :

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

absolument quelconques.

5. Nous avons obtenu ainsi, pour définir le mouvement uniforme, en Cinématique, et la courbe nommée parabole, en Géométrie, deux équations fonctionnelles (3) et (4) de la résolution desquelles nous allons nous occuper maintenant.

6. Commençons par l'équation (3) : comme l'instant t est un instant quelconque on peut le prendre comme instant initial $t = 0$ et, changeant les notations, écrire l'équation sous la forme de M. Fréchet :

$$f(x + y) - f(y) = f(x) - f(0), \tag{3}$$

x et y étant des nombres réels *quelconques*.

Puisque la différence

$$f(x_2) - f(x_1)$$

conserve la même valeur dans tout intervalle (x_1, x_2) de même amplitude, nous allons démontrer que le rapport

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

est constant, c'est-à-dire conserve la même valeur quel que soit l'intervalle (x_1, x_2) considéré.

En effet, supposons d'abord que les deux intervalles considérés (a, b) et (a', b') admettent comme commune mesure l'intervalle (a, b), lui-même, supposé inférieur en amplitude à (a', b').

On a donc

$$\text{ampl.}\,(a', b') = n \text{ fois ampl.}\,(a, b).$$

Nous écrirons alors

$$a' = x_0, \qquad b' = x_n \qquad (a' < b')$$

et, insérant, entre x_0 et x_n, $n-1$ points en progression arithmétique :

$$x_1 - x_0 = x_{k+1} - x_k,$$

nous formerons le rapport

$$\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\,\frac{x_0-x_1}{x_0-x_n} + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\,\frac{x_1-x_2}{x_0-x_n} + \ldots$$
$$+ \frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n}\,\frac{x_{n-1}-x_n}{x_0-x_n},$$

où il y a *identité* entre les deux membres, comme on le voit tout de suite.

Mais le rapport du premier membre est compris entre le plus grand et le plus petits des rapports

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}$$

écrits au second membre. Comme ces derniers rapports sont tous égaux, les amplitudes

$$x_{k+1} - x_k$$

étant toutes égales, on doit conclure

$$\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

ou

$$\frac{f(a')-f(b')}{a'-b'} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

ce qu'il fallait établir.

7. Passons maintenant au cas où les deux intervalles considérés (a, b) et (a', b'), le premier inférieur en amplitude au second, ont comme commune mesure un intervalle (a'', b'') inférieur à (a, b).

Dans ce cas on fait la démonstration, comme au numéro précédent, pour (a'', b'') et (a, b) d'abord et l'on arrive à

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(a'')-f(b'')}{a''-b''},$$

ensuite pour (a', b') et (a'', b'') pour arriver à l'égalité

$$\frac{f(a')-f(b')}{a'-b'}=\frac{f(a'')-f(b'')}{a''-b''}$$

et l'on peut alors conclure

$$\frac{f(a')-f(b')}{a'-b'}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

8. Enfin dans le cas où il n'y a pas de commune mesure pour les intervalles (a, b) et (a', b') on fait usage de l'hypothèse que $f(x)$ est une fonction *continue* et par un procédé, classique en pareille circonstance, on arrive à la même conclusion.

9. Une fois établi le fait que le rapport

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

est constant, quel que soit l'intervalle (x_1, x_2) considéré, nous introduisons l'identité

$$y=y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(x-x_0),$$

où

$$y_0=f(x_0),$$

x_0 étant, lui-même, un point quelconque.

Mais, d'après les résultats obtenus aux nos 6, 7 et 8, nous pouvons écrire

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$$

et alors nous avons

$$y=y_0+k(x-x_0),$$

comme *représentation* de la fonction $y=f(x)$ à partir du point (x_0, y_0).

Ainsi la solution des équations fonctionnelles (3) ou (3′) est une *fonction linéaire*.

10. Passons maintenant à l'équation fonctionnelle (4).

Si l'on prend quatre points en progression arithmétique : x_1, x_2, x_3, x_4 on aura d'abord

$$3(x_3-x_2)=x_4-x_1$$

et ensuite, de la relation

$$\frac{f(x_4)-f(x_1)}{x_4-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

la conséquence

$$(5) \qquad y_1-3y_2+3y_3-y_4=0,$$

en posant

$$y_k=f(x_k).$$

De la relation (5) on tire

$$y_2-2y_3+y_4=y_1-2y_2+y_3.$$

Cette relation nous permet d'affirmer que la *différence*

$$\Delta=f(a)-2f(a+h)+f(a-2h),$$

conserve la même valeur quel que soit a, pourvu que h reste le même.

Je ne m'arrêterai pas aux détails de la démonstration qui ne présente aucune difficulté.

Je passerai à la démonstration du fait que le rapport

$$\frac{f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)}{h^2}$$

est *constant*, c'est-à-dire indépendant de a et de h :

Pour cela je reprends la notation

$$y_k=f(x_k)$$

et supposant que pour les deux rapports

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)}{h^2}, \\[2ex] \dfrac{f(a')-2f(a'+h')+f(a'+2h')}{h'^2}, \end{array}\right.$$

on a la relation $h < h'$ avec

$$h'=nh,$$

je poserai

$$a'=x_0 \qquad \text{et} \qquad a'+2h'=x_{2n}$$

et je marquerai, entre x_0 et x_{2n} les $2n-1$ points x_1, x_2, ... qui forment avec x_0 et x_{2n} une progression arithmétique.

Cela posé, je forme le rapport

$$\begin{aligned}
\frac{y_0 - 2y_n + y_{2n}}{(x_n - x_0)^2} = {} & \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(x_1 - x_0)^2}\left(\frac{x_1 - x_0}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + 2.\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(x_2 - x_1)^2}.\left(\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + 3.\frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{(x_3 - x_2)^2}.\left(\frac{x_3 - x_2}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (n-1).\frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2}\left(\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + \quad n.\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{(x_n - x_{n-1})^2}.\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + (n-1).\frac{y_n - 2y_{n+1} + y_{n+1}}{(x_{n+1} - x_n)^2}.\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 3.\frac{y_{2n-4} - 2y_{2n-3} + y_{2n-2}}{(x_{2n-3} + x_{2n-4})^2}.\left(\frac{x_{2n-3} - x_{2n-4}}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + 2.\frac{y_{2n-3} - 2y_{2n-2} + y_{2n-1}}{(x_{2n-2} - x_{3n-3})^2}.\left(\frac{x_{2n-2} - x_{2n-3}}{x_n - x_0}\right)^2 \\
& + \quad \frac{y_{2n-2} - 2y_{2n-1} + y_{2n}}{(x_{2n+1} - x_{2n-2})^2}.\left(\frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{x_n - x_0}\right)^2,
\end{aligned}$$

où il y a *identité* entre les deux membres, comme on le voit facilement.

D'ailleurs l'identité, entre nombres entiers

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

permet d'affirmer, ici comme au n° 6, que le rapport du premier membre est compris entre le plus grand et le plus petit des rapports

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{(x_k - x_{k-1})^2}$$

écrits au second membre. Mais ces derniers rapports sont tous égaux : on en conclut l'égalité des rapports (8).

11. Si le rapport $\frac{h'}{h}$ est égal à une fraction $\frac{mh''}{nh''}$ en raisonnant comme au n° 7, on établit encore l'égalité des rapports (8).

Enfin si le rapport $\frac{h'}{h}$ est incommensurable l'hypothèse faite sur $f(x)$ qu'elle est une fonction *continue* permet de maintenir la conclusion relative aux rapports (8) :

Ils sont égaux quels que soient a, a', h et h'.

12. Ce résultat une fois obtenu, je considère la relation

$$y = y_0 + \frac{y - y_1}{x - x_1}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{y_1 - 2y_0 + y}{(x - x_0)^2}(x - x_0)^2, \tag{9}$$

dans laquelle si l'on suppose

$$2x_0 = x_1 + x,$$

on a une *identité*.

La condition fonctionnelle (4) et le résultat obtenu relativement à

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{(x_k - x_{k-1})^2}$$

nous permettent de poser

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a_0 \text{ (constante)},$$

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y}{(x - x_0)^2} = b_0 \text{ (constante)}$$

et d'écrire la relation (9) sous la forme

$$y = y_0 + a_0(x - x_0) + \frac{1}{2} b_0(x - x_0)^2, \tag{10}$$

qui nous donne une *représentation* de la fonction

$$y = f(x),$$

à partir du point (x_0, y_0).

Ainsi l'équation fonctionnelle (4) a comme solution une fonction représentée par l'expression (10).