PAUL MENTRÉ

Étude géométrique des caractéristiques

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 265-273
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__265_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES CARACTÉRISTIQUES;

PAR M. PAUL MENTRÉ.

1. Je me propose de montrer l'intérêt que présente la théorie géométrique des Caractéristiques dans l'étude des propriétés infinitésimales des Variétés.

Je donnerai de préférence des exemples de variétés réglées car la fécondité de la méthode s'affirme d'une manière simple dans le domaine des droites de l'Espace. Je démontrerai sans calcul de nombreuses propriétés classiques et je grouperai des résultats que j'ai indiqués dans diverses Notes aux *Comptes rendus*.

Je me bornerai pour abréger aux Caractéristiques de variétés dépendant d'un paramètre mais beaucoup de raisonnements s'adapteraient aux Caractéristiques de variétés dépendant de plusieurs paramètres.

2. **Caractéristiques de différents ordres.** — Considérons une famille continue de ∞^1 variétés (surfaces, congruences, etc.), formées par des éléments générateurs (points, droites, etc.). Imposons à une variété A, mobile et modifiable, de venir coïncider successivement avec chacune des variétés de la famille; numérotons les positions successives très voisines qui donnent la coïncidence de la variété mobile A avec les variétés fixes A_0, A_1, A_2, A_3, ... de la famille donnée (A).

Supposons que les deux variétés très voisines A_j et A_{j+1} ($j = 0, 1, 2, 3, \ldots$) admettent des éléments communs; faisons tendre la variété A_{j+1} vers la variété A_j; l'ensemble des éléments communs constitue une variété dont la limite A'_j s'appelle la caractéristique de la variété A_j.

A chaque position de la variété A correspond une position A' de sa caractéristique; on peut dire que la variété A entraîne sa caractéristique qui vient coïncider successivement avec les variétés A'_0, A'_1, A'_2, A'_3, ...

Nous avons une nouvelle famille (A') de variétés. Il pourra arriver que la variété A' admette dans chacune de ses positions une caractéristique A″ que nous appellerons alors « deuxième caractéristique » de la variété mobile A. Il est facile de voir que la « deuxième caractéristique » est formée par les éléments communs à trois variétés A infiniment voisines. En effet la variété A''_j est formée de la limite de l'ensemble des éléments communs aux deux variétés A'_j et A'_{j+1}, c'est-à-dire des éléments communs aux trois variétés A_j, A_{j+1}, A_{j+2}.

D'une manière générale on définit la $p^{\text{ième}}$ caractéristique comme étant la caractéristique de la $(p-1)^{\text{ième}}$ caractéristique. On voit aisément que la $p^{\text{ième}}$ caractéristique d'une variété mobile A est formée par l'ensemble des éléments communs à $p+1$ variétés A infiniment voisines.

3. **Dernières caractéristiques.** — Supposons que les ∞^1 variétés A aient en commun des éléments. Ceux-ci appartiennent manifestement aux caractéristiques des différents ordres. Nous appellerons « dernière caractéristique » l'ensemble des éléments fixes communs.

Considérons par exemple un complexe linéaire variable A contenant trois droites fixes, ce qui lui impose de contenir une demi-quadrique fixe. Celle-ci est la deuxième et dernière caractéristique; elle sert de caractéristique fixe A″ à la congruence linéaire caractéristique variable A′.

Supposons maintenant que les ∞^1 positions de la variété mobile A n'aient aucun élément commun. Il n'existe alors que des caractéristiques dont l'ordre ne dépasse pas une certaine valeur. La variété mobile entraîne donc une « dernière caractéristique » mobile et modifiable occupant successivement ∞^1 positions.

Considérons par exemple un plan A mobile dans l'espace ordinaire. Donnons-lui un déplacement à un paramètre de manière que les ∞^1 positions n'aient aucun point commun, ce qui exclut les cas simples d'un plan A tournant autour d'une droite fixe ou d'un plan A passant par un point fixe et enveloppant par suite un cône. Le plan A admet une droite caractéristique A′, laquelle admet un point caractéristique A″; le point mobile A″ est la deuxième et dernière caractéristique du plan A.

Considérons, comme autre exemple, un complexe linéaire A mobile dans l'Espace projectif réglé et supposons que les ∞^1 positions n'admettent aucune droite commune. Puisque cinq complexes linéaires n'ont en général aucune droite commune, tandis que quatre complexes linéaires ont en général deux droites communes, la dernière caractéristique du complexe linéaire A est en général du troisième ordre et comporte deux droites mobiles.

Si le complexe linéaire A se déplace de manière que cinq positions successives admettent une droite commune, cette droite mobile est une dernière caractéristique du quatrième ordre.

4. **Théorie de la contrainte.** — Étudions le déplacement de la première caractéristique A′ d'une variété A.

A'_j est formé par les éléments communs à A_j et A_{j+1}, A'_{j+1} est de même formé par les éléments communs à A_{j+1} et A_{j+2} ; donc A'_j et A'_{j+1} sont situés dans A_{j+1} ; autrement dit, *deux positions successives de* A′ *sont situées dans une même variété* A. Nous dirons que la variété A′ subit la contrainte de la variété A.

Réciproquement, si une variété V subit la contrainte d'une autre variété U, il est facile de voir que V est la caractéristique de U.

En effet V_j et V_{j+1} sont situées dans une variété U que l'on peut désigner par U_{j+1} ; de même V_{j+1} et V_{j+2} sont situées dans U_{j+2} ; par suite la variété V_{j+1} est formée par les éléments communs aux deux variétés successives U_{j+1} et U_{j+2}.

On peut aisément généraliser et définir des contraintes de différents ordres.

Considérons dans l'Espace réglé projectif une quadrique mobile dont la biquadratique caractéristique est dégénérée en un quadrilatère gauche. L'une quelconque V des deux demi-quadriques subit la contrainte d'une congruence linéaire. En effet les deux demi-quadriques successives V_j et V_{j+1} s'appuient sur deux côtés opposés du quadrilatère caractéristique ; elles sont donc situées dans une congruence linéaire U_{j+1}. Mais la congruence linéaire mobile U subit à son tour la contrainte d'un complexe linéaire T. En effet les deux directrices de U_{j+1} rencontrent les droites de V_j et V_{j+1} ; les deux directrices de U_{j+2} rencontrent les droites de V_{j+1} et V_{j+2}. Nous voyons que deux positions successives des deux directrices de U sont situées sur une même demi-quadrique ; il en résulte que deux congruences linéaires U successives sont situées dans un même complexe linéaire T. La demi-quadrique V est donc la deuxième caractéristique d'un complexe linéaire mobile T :

de même la demi-quadrique $\overline{\overline{V}}$, complémentaire de V, est la deuxième caractéristique d'un complexe linéaire mobile $\overline{T}$.

5. **Variétés ponctuelles linéaires.** — Considérons dans l'espace ponctuel projectif à n dimensions un hyperplan A qui subit un déplacement à un paramètre.

Les caractéristiques des différents ordres sont formées par l'ensemble des points communs à 2, 3, 4, . . . positions successives de l'hyperplan A. Toutes les caractéristiques sont donc des variétés linéaires.

On sait que n hyperplans ont en général un seul point commun. La dernière caractéristique est donc en général un point mobile, lequel décrit une courbe; la dernière caractéristique est alors d'ordre $n-1$.

L'ensemble des points communs à p hyperplans constitue en général une variété linéaire (ou plan) à $n-p$ dimensions; par suite la caractéristique d'ordre $p-1$ est en général un plan mobile à $n-p$ dimensions.

Le déplacement à un paramètre de cette caractéristique d'ordre $p-1$ n'est pas arbitraire : deux positions successives sont « contraintes » à se trouver dans la caractéristique d'ordre $p-2$ et elles ont en commun une caractéristique d'ordre p.

Nous dirons qu'une variété linéaire mobile subit une « contrainte linéaire » quand deux positions successives sont situées dans une variété linéaire possédant une dimension immédiatement supérieure. Par exemple une droite (à une dimension) mobile subit une contrainte linéaire si deux positions successives sont situées dans un même plan (à deux dimensions); cette contrainte a pour effet de donner à la droite mobile un point caractéristique. Toutes les caractéristiques successives d'un hyperplan mobile subissent, d'après ce qui précède, une contrainte linéaire.

Considérons un plan à $n-p$ dimensions subissant un déplacement avec contrainte linéaire. Cette variété est définie, pour chacune de ses positions, par p équations linéaires et indépendantes entre les n coordonnées projectives; mais nous pouvons choisir ces équations de telle manière qu'il y en ait $p-1$ qui soient valables pour deux positions successives. Les points communs à deux telles positions sont donc communs à $p+1$ hyperplans. Par suite, en imposant au plan mobile à $n-p$ dimensions d'être la caractéristique d'un plan mobile à $n-p+1$ dimensions, on lui fournit une caractéristique à $n-p-1$ dimensions; la contrainte linéaire entraîne l' « épanouissement » de la caractéristique (car sans contrainte la caractéristique d'un plan à $n-p$ dimensions est une variété linéaire à $n-2p$ dimensions).

Il est facile de savoir si une variété linéaire mobile à $n-p$ dimensions peut être considérée comme la caractéristique (d'ordre $p-1$) d'un hyperplan; pour qu'il en soit ainsi il faut que p positions successives soient situées dans un même hyperplan.

Un point mobile peut donc en général être considéré comme la caractéristique (d'ordre $n-1$) d'un hyperplan.

6. **Contacts et raccords de deux variétés.** — Considérons d'abord deux courbes dont l'une est formée par les points successifs infiniment voisins m_0, m_1, m_2, ... Supposons que l'autre courbe « passe par les points m_0, m_1, ..., m_s », c'est-à-dire que cette courbe est la limite d'une courbe passant par $s+1$ points très voisins qui se rapprochent de manière à venir coïncider avec l'un d'entre eux (m_0 par exemple). Les deux courbes ont par définition un contact d'ordre s au voisinage d'un point commun m_0.

Considérons maintenant deux variétés dont l'une est formée par des « génératrices » successives infiniment voisines M_0, M_1, M_2, ..., lesquelles génératrices sont elles-mêmes formées par des éléments de l'Espace. Supposons que l'autre variété « contienne les génératrices M_0, M_1, ..., M_s ». Les deux variétés « se raccordent », avec un contact d'ordre s, au voisinage de la génératrice M_0.

Soit μ_0 un élément de M_0. Traçons *arbitrairement* dans la première variété une suite simplement infinie d'éléments en partant de l'élément μ_0, ce qui oblige à « traverser » les génératrices successives M_1, M_2, ..., M_s en leur empruntant les éléments μ_1, μ_2, ..., μ_s. Tous ces éléments appartiendront à la deuxième variété donnée. Celle-ci a donc par définition un contact d'ordre s avec la première variété, au voisinage de l'élément commun μ_0.

Le raccord suivant la génératrice M_0 entraîne donc le contact au voisinage des différents éléments μ_0 de cette génératrice.

Remarquons que la deuxième variété doit avoir au moins la même dimension que la première variété.

Soient par exemple deux surfaces ponctuelles réglées, dont l'une contient trois droites génératrices successives infiniment voisines de l'autre surface. Les deux surfaces réglées se raccordent avec un contact du deuxième ordre; une courbe tracée sur l'une est osculatrice à l'autre surface.

Nous allons rencontrer des exemples de raccord de variétés n'ayant pas le même nombre de dimensions.

7. **Enveloppes.** — Revenons à la variété mobile A considérée au n° 2. La première caractéristique A' engendre dans son déplacement une variété (A') qui s'appelle la première enveloppe de la variété A.

Il est facile de démontrer que la variété A se raccorde dans chacune de ses positions avec la variété-enveloppe (A'), le contact étant du premier ordre.

On peut, en effet, envisager les variétés caractéristiques A'_j comme étant les « génératrices » de la variété-enveloppe (A'). La variété A'_j est formée par les éléments communs aux variétés A_j et A_{j+1}; la variété A'_{j+1} est formée par les éléments communs aux variétés A_{j+1} et A_{j+2}; les deux variétés A'_j et A'_{j+1} sont donc situées dans A_{j+1}, ce qui revient à dire que la variété A_{j+1} se raccorde avec la variété-enveloppe (A') au voisinage de la caractéristique A'_{j+1}, par un contact du premier ordre.

Par le même procédé de raisonnement on peut étudier le contact de la variété A avec sa deuxième enveloppe.

Les variétés A''_j, A''_{j+1}, A''_{j+2} sont formées par les éléments qui sont communs respectivement à A_j, A_{j+1} et A_{j+2}; à A_{j+1}, A_{j+2} et A_{j+3}; à A_{j+2}, A_{j+3} et A_{j+4}; ces trois variétés A'' sont donc situées dans la variété A_{j+2}. On en déduit que la variété A_{j+2} se raccorde avec la variété (A''), par un contact du deuxième ordre, au voisinage de la caractéristique A''_{j+2}.

On démontrerait de même que la variété A garde un contact d'ordre p avec l'enveloppe d'ordre p, en se raccordant suivant la caractéristique d'ordre p.

Un exemple simple est fourni par un plan qui subit un déplacement à un paramètre dans l'espace ordinaire. La première enveloppe est une surface réglée développable. La deuxième enveloppe est l'arête de rebroussement, courbe à laquelle le plan reste osculateur.

Pour avoir un exemple plus intéressant, considérons un complexe A variable et mobile dans l'Espace réglé où il vient coïncider successivement avec ∞^1 complexes de droites. On a, *en général*, une congruence A′ caractéristique du premier ordre, une surface réglée A″ caractéristique de second ordre, un ensemble de droites isolées A‴ formant la caractéristique du troisième ordre. Le complexe A reste tangent au complexe (A′); il reste osculateur à la congruence (A″); il garde un contact du troisième ordre avec les surfaces réglées (A‴).

Lorsque A est un complexe linéaire subissant un déplacement projectif, on obtient en général comme première enveloppe un complexe d'une nature particulière : ce dernier complexe est engendré par une congruence linéaire qui se déplace de telle manière que deux positions successives des deux directrices soient situées sur une même demi-quadrique. La deuxième enveloppe est une congruence dont les deux surfaces focales sont réglées; il s'agit d'une congruence W puisque le complexe linéaire A lui reste osculateur. La troisième enveloppe est formée par deux surfaces réglées dont les génératrices sont mises en correspondance par le complexe linéaire A, lequel contient quatre génératrices infiniment voisines de l'une et de l'autre surface (1). Il y a certains cas intéressants; notamment il peut arriver que la congruence linéaire caractéristique soit spéciale (2); les deux surfaces réglées engendrées par la caractéristique du troisième ordre peuvent se confondre (3).

Lorsque A est un complexe quadratique, la congruence caractéristique est de degré 4 et de classe 4; la surface réglée qui est la caractéristique du deuxième ordre est de degré 16 et de classe 16; la caractéristique du troisième ordre se compose de 32 droites et elle engendre 32 surfaces réglées, enveloppes dont les génératrices sont mises en correspondance par le contact simultané du complexe quadratique A. Il y aurait évidemment une foule de cas particuliers à envisager. On pourra notamment supposer que A est le complexe quadratique hyperosculateur à une surface réglée donnée en sorte que A contient 19 génératrices infiniment voisines : la congruence

(1) P. Mentré, *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 724; t. 184, 1927, p. 428.
(2) P. Mentré, *Comptes rendus*, t. 178, 1924, p. 290.
(3) P. Mentré, *Comptes rendus*, t. 185, 1927, p. 1179.

caractéristique A′ contient 18 génératrices infiniment voisines; la surface réglée A″ contient 17 génératrices infiniment voisines (en sorte qu'elle garde avec la surface réglée donnée un contact du seizième ordre); parmi les 32 droites de la caractéristique du troisième ordre, il y en a 16 qui sont confondues; il existe une caractéristique du quatrième ordre formée par 15 droites confondues; il existe une caractéristique du dix-huitième ordre formée par une droite simple.

On généraliserait aisément au cas d'un complexe algébrique d'un ordre élevé.

8. **Théorie de la réciprocité.** — Étudions maintenant le déplacement *simultané* à un paramètre de deux variétés A et B ayant ou n'ayant pas le même nombre de dimensions. Nous supposerons que A et B ont sans cesse une propriété mutuelle (d'appartenance, de parallélisme, de perpendicularité, d'intersection dégénérée, etc.). Par exemple A est un plan, B est une droite : nous pourrons supposer que B reste située dans A ou bien reste parallèle à A ou bien passe par le pôle du plan A par rapport à une quadrique fixe; suivant le cas il en résulte que A contient B, que A reste parallèle à B ou que A passe par la droite conjuguée de la droite B par rapport à la quadrique fixe.

Pour abréger nous dirons que les deux variétés A et B sont conjuguées et nous emploierons le symbole A *cj* B.

Une conjugaison simple n'a guère d'intérêt, mais nous allons étudier les conjugaisons multiples. Supposons que, dans chacune de ses positions, la variété A reste conjuguée à k positions successives, infiniment voisines, de la variété B. Il est facile de voir que réciproquement la variété B dans chacune de ses positions sera conjuguée à k positions successives, infiniment voisines, de la variété A.

En effet raisonnons, pour fixer les idées, avec $k = 5$. Nous aurons :

$$
\begin{array}{l}
B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4\ \ cj\ \ A_2;\\
B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5\ \ cj\ \ A_3;\\
B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6\ \ cj\ \ A_4;\\
B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ B_7\ \ cj\ \ A_5;\\
B_4,\ B_5,\ B_6,\ B_7,\ B_8\ \ cj\ \ A_6.
\end{array}
$$

Comme B_4 intervient dans les cinq conjugaisons, il en résulte que l'on a

$$B_4 \quad cj \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \quad A_6,$$

et par suite, plus généralement,

$$B_i \quad cj \quad A_{i-2}, \quad A_{i-1}, \quad A_i, \quad A_{i+1}, \quad A_{i+2}.$$

Bien plus, en nous plaçant toujours pour fixer les idées dans le cas d'une conjugaison quintuple, il pourra arriver qu'exceptionnellement pour une position de A la conjugaison devienne sextuple : il est facile de voir qu'il y a encore réciprocité.

Supposons par exemple que B_4 reste conjuguée à A_7, ce qui revient à dire que A_7 est conjuguée à six positions successives de B : alors B_4 sera conjuguée à six positions de A, savoir : A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. On peut appeler ce phénomène le « renforcement de la conjugaison ».

Par exemple, la caractéristique d'ordre $p-1$ d'une variété A peut jouer le rôle de la variété B; comme elle est située dans p positions successives de A, par réciprocité d'appartenance, chaque position de la variété B contient p positions successives de la caractéristique considérée. Nous avons d'ailleurs déjà établi directement cette propriété qui nous a servi à l'étude des enveloppes, de différents ordres, de A.

On obtient des résultats intéressants en considérant une droite mobile A qui rencontre k positions successives d'une droite mobile B. On trouve ainsi, avec $k=4$, une propriété des deux surfaces réglées qui sont les transformées flecnodales d'une surface réglée.

Si A et B sont deux complexes linéaires mobiles (dans l'espace projectif) qui restent en involution d'une façon quintuple, on obtient des propriétés remarquables; notamment les deux demi-quadriques A'' et B'' sont complémentaires.