BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE TURRIÈRE

Sur un cas de dégénérescence de la géométrie du triangle

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 210-225

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__210_0>

SUR UN CAS DE DÉGÉNÉRESCENCE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Par M. Émile Turrière.

1. Considérons le triangle dégénérescent constitué par trois tangentes infiniment voisines d'une courbe plane. Lorsque les tangentes viennent se confondre avec la tangente en un point O de cette courbe, il se trouve que certains éléments de la géométrie ordinaire du triangle ont une limite intéressante à mettre en évidence et à étudier. C'est ce que nous allons montrer dans les considérations qui suivent.

La courbe (C) est tangente à Ox à l'origine O; le centre γ de courbure correspondant a pour coordonnées $x = 0$, $y = \rho > 0$, ρ étant le rayon de courbure en O de (C). Le cercle osculateur en O a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\rho y = 0.$$

Nous prendrons l'équation de la tangente courante de la courbe sous la forme

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha)$$

avec

$$f = \frac{1}{2}\rho\alpha^2 + \frac{1}{6}\rho'\alpha^3 + \ldots.$$

L'axe Ox correspond à $\alpha = 0$.

Le triangle ABC sera formé par la tangente fixe Ox $(\alpha = 0)$ et par deux tangentes correspondant aux valeurs infiniment petites α et β de l'angle α. Nous prendrons $\beta > \alpha > 0$, pour fixer les idées.

Les angles du triangle auront pour expressions

$$A = \alpha. \qquad B = \pi - \beta, \qquad C = \beta - \alpha,$$

tandis que les longueurs des côtés seront

$$a = \frac{1}{2}\rho\alpha + \frac{1}{6}\rho'\alpha(\alpha + \beta) + \ldots,$$

$$b = \frac{1}{2}\rho\alpha + \frac{1}{6}\rho'\beta(\alpha + \beta) + \ldots,$$

$$c = (\beta - \alpha)\left[\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{6}\rho'(\alpha + \beta) + \ldots\right],$$

en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur.

Les coordonnées des sommets seront :

(A) $x = \frac{1}{2}\rho\alpha + \dots, \qquad y = 0,$

(B) $x = \frac{1}{2}\rho\beta + \dots, \qquad y = 0,$

(C) $x = \frac{1}{2}\rho(\alpha + \beta) + \dots, \qquad y = \frac{1}{4}\rho\alpha\beta + \dots.$

Il en résulte que le rayon du cercle circonscrit a pour limite $\frac{1}{2}\rho$, tandis que le centre de ce cercle tend vers le point $x = 0$, $y = \frac{1}{4}\rho$. *Le cercle circonscrit tend vers le cercle d'équation*

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\rho y = 0.$$

tangent à Ox *en* O *situé du côté du cercle osculateur.*

Le centre de gravité G tend vers O, et l'orthocentre tend vers le point H de coordonnées $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}\rho$. *Le cercle conjugué limite* (H) *est réel*; son rayon est $\frac{1}{2}\rho$; il touche aussi Ox en O, mais extérieurement par rapport au cercle de courbure. L'équation du cercle conjugué-limite est :

$$H \equiv x^2 + y^2 + \rho y = 0.$$

Le cercle des 9 points a pour limite le cercle :

$$x^2 + y^2 + \frac{\rho}{4}y = 0.$$

$$o_9\left(x = 0,\ y = -\frac{1}{8}\rho\right), \qquad R_9 = \frac{\rho}{8}.$$

Le cercle inscrit tend vers le point O, ainsi que deux des cercles ex-inscrits. *Mais le troisième cercle ex-inscrit a pour limite le cercle osculateur.*

2. La transformation isogonale-limite. — Soient $P(x, y)$ et $P'(x' y')$ deux points du plan. Le produit de leurs distances à Ox est yy'; écrivons qu'il est égal au produit des distances à la tangente (α)

$$yy' = (-x\sin\alpha + y\cos\alpha + f)(-x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + f);$$

donc

$$\alpha(xy'+yx')+\alpha^2\left[yy'-xx'-\frac{1}{2}\rho(y+y')\right]+\ldots=0.$$

En écrivant que les termes en α et α^2 sont nuls, nous obtenons les deux conditions :

$$xy'+yx'=0,$$

$$yy'-xx'=\frac{1}{2}\rho(y+y').$$

Il résulte qu'à l'approximation considérée, les produits des distances de PP′ à la tangente Ox, à la tangente (α) et aussi à la tangente (β) sont égaux. Les points PP′ sont conjugués dans cette transformation isogonale-limite.

Ce résultat est confirmé par la méthode suivante de calculs. Les coefficients angulaires des droites AP et AP′ sont

$$\frac{y}{x-\frac{1}{2}\rho\alpha},\quad \frac{y'}{x'-\frac{1}{2}\rho\alpha},$$

tandis que la bissectrice intérieure de $B\widehat{A}C$ a pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}\alpha$. Écrivons que AP et AP′ sont symétriques par rapport à cette bissectrice

$$\frac{\dfrac{y}{x-\frac{1}{2}\rho\alpha}-\frac{1}{2}\alpha}{2+\dfrac{y\alpha}{x-\frac{1}{2}\rho\alpha}}+\frac{\dfrac{y'}{x'-\frac{1}{2}\rho\alpha}-\frac{1}{2}\alpha}{2+\dfrac{y'\alpha}{x'-\frac{1}{2}\rho\alpha}}=0,$$

d'où encore

$$yx'+xy'+\alpha\left[yy'-xx'-\frac{1}{2}\rho(y+y')\right]+\ldots=0.$$

En résumé, la correspondance entre les points P et P′ est définie par les formules

$$\frac{y}{x}+\frac{y'}{x'}=0,$$

$$yy'-xx'=\frac{1}{2}\rho(y+y')=0.$$

D'où :

$$-\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{2}\rho y}{x^2+y^2-\frac{1}{2}\rho y}$$

Posons

$$x^2+y^2 = \frac{\rho}{2\sigma}y, \qquad x'^2+y'^2 = \frac{\rho}{2\sigma'}y',$$

$$-\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{1-\sigma}{\sigma} = \frac{1-\sigma'}{\sigma'}$$

avec la condition

$$\sigma + \sigma' = 1.$$

Le point O, l'axe Ox, l'axe Oy sont doubles.

Quand P est sur le cercle osculateur, $\sigma = \frac{1}{4}$,

$$x' = -\frac{1}{3}x, \qquad y' = \frac{1}{3}y, \qquad x'^2+y'^2 = \frac{2\rho}{3}y';$$

il y a alors affinité entre P et P'. L'arc de la courbe (C) au voisinage de O ne saurait être invariant dans la transformation.

3. **Limites des coniques circonscrites.** — Ce sont les transformées des droites du plan.

La transformée d'une droite D'

$$ux' + vy' + 1 = 0$$

est la conique circonscrite

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}\rho y(vy - ux - 1) = 0;$$

elle touche Ox en O.

En particulier, à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit

$$x^2+y^2 = \frac{1}{2}\rho y.$$

comme dans la géométrie ordinaire du triangle. Lorsque la droite D' est tangente à ce cercle, la conique correspondante est une parabole.

Lorsque la droite D' passe par un point fixe (a', b'), les coniques forment un faisceau ponctuel. *La conique des 9 points*, lieu de leurs centres, a pour équation

$$2b'x^2 + 4a'xy + (\rho - 2b')y^2 + \frac{b'\rho}{2}y = 0.$$

En particulier, les coniques circonscrites qui sont équilatères correspondent au cas $a' = 0$, $b' = \frac{\rho}{4}$ (centre du cercle circonscrit); elles passent par l'orthocentre H et le lieu de leurs centres est le cercle des 9 points

$$x^2 + y^2 + \frac{\rho}{4}y = 0,$$

comme en géométrie ordinaire du triangle.

4. Limites des coniques conjuguées. — Partons de l'équation en coordonnées trilinéaires

$$\mathcal{L}X^2 + \mathcal{M}Y^2 + \mathcal{N}Z^2 = 0$$

des coniques conjuguées; cette équation est ici la suivante

$$\mathcal{L}y^2 + \mathcal{M}[-x\sin\alpha + y\cos\alpha + f(\alpha)]^2 + \mathcal{N}[-x\sin\beta + y\cos\beta + f(\beta)]^2 = 0,$$

$$\mathcal{L}y^2 + \mathcal{M}[y^2 - 2\alpha xy + \alpha^2(x^2 + y^2 + \rho y)] + \mathcal{N}[y^2 - 2\beta xy + \beta^2(x^2 + y^2 + \rho y)] = 0;$$

c'est une équation linéaire entre

$$y^2, \quad xy \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + \rho y.$$

Par conséquent, l'équation

$$x^2 + y^2 + \rho y = y(2Ax + By),$$

avec deux arbitraires A et B, représente les limites des coniques conjuguées. Parmi ces coniques, se trouve le cercle conjugué (H)

$$x^2 + y^2 + \rho y = 0,$$

mis directement en évidence (§ 1).

Toutes ces coniques touchent Ox en O.

Les hyperboles équilatères conjuguées sont à la limite des courbes

$$x^2 - y^2 + \rho y = 2Axy;$$

le lieu de leur centre est bien le cercle circonscrit-limite.

Les hyperboles équilatères conjuguées sont les solutions de la question suivante : *Déterminer les courbes telles que la tangente en chacun de leurs points passe constamment par le point conjugué dans la transformation isogonale.*

Des formules générales, résultent les expressions :

$$x - x' = \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2-\frac{1}{2}\rho y}, \qquad y - y' = \frac{y(x^2+y^2-\rho y)}{x^2+y^2-\frac{1}{2}\rho y}.$$

L'équation différentielle des courbes cherchées est :

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-\rho y)};$$

son intégrale générale est :

$$x^2 - y^2 + \rho y = 2\lambda x y.$$

5. **Le théorème de Steiner.** — Le cercle conjugué H est donc le cercle tangent à la courbe (C), extérieurement au cercle de courbure et de rayon $\frac{\rho}{2}$.

Lorsque (C) est une conique, ce cercle est orthogonal au cercle de Monge. C'est un théorème dû à Steiner : « Si, en un point d'une ellipse, on prend sur la normale, en dehors de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure en ce point, le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle orthoptique de l'ellipse. »

Considérons deux coniques (C) et (c) tangentes en un point O; soient N et n les centres de courbure respectifs de ces coniques au point O; la condition pour que (C) soit harmoniquement circonscrite à (c) se met sous la forme géométrique suivante :

$$n\mathrm{O} + 2\mathrm{ON} = 0.$$

Le théorème général ainsi obtenu contient évidemment le théorème de Steiner comme cas particulier : il suffit de supposer que (C) est un cercle et d'appliquer le théorème de Faure.

Le théorème de Steiner est une propriété caractéristique des coniques à centre. Cherchons à déterminer une courbe plane (M) par la condition que, M étant un point quelconque de (M), N le centre de courbure en M, N′ le symétrique de N par rapport à M, le cercle de diamètre NN′ soit orthogonal à un cercle fixe. Prenons pour origine des coordonnées le centre O du cercle fixe

$$x^2 + y^2 = K^2;$$

considérons la courbe (M) comme enveloppe de la droite

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \varpi;$$

la fonction ϖ de φ satisfait à l'équation différentielle du second-ordre

$$\varpi \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2 + 2\varpi^2 = K^2;$$

cette équation n'est autre que celle des coniques de centre O et qui admettent le cercle fixe pour cercle orthoptique. Le théorème de Steiner est donc caractéristique des coniques à centre.

Généralisons ce qui précède. Observons que l'équation différentielle s'écrit

$$\varpi R = K^2 - \overline{OM}^2,$$

en introduisant le rayon de courbure

$$R = -(\varpi + \varpi''),$$

et le rayon vecteur $\overline{OM} = r$

$$r^2 = \overline{OM}^2 = \varpi^2 + \varpi'^2;$$

ϖ a également une signification géométrique simple : c'est la distance du pôle O à la tangente.

Prenons sur la normale un sens positif : celui de M vers le centre de courbure N, point qui, par définition, sera repéré par R. Portons sur la normale à partir de M un segment $M\omega = \lambda = \frac{1}{2} f(R)$ et écrivons que le cercle de centre ω et de rayon ωM est orthogonal à un cercle fixe. La condition est

$$2\varpi\lambda = 2\varpi f(R) = K^2 - \overline{OM}^2;$$

en remarquant que l'on a toujours

$$\frac{dr^2}{d\varpi} = -2R,$$

l'équation différentielle prend la forme d'une équation linéaire homogène générale en $K^2 - r^2$ et ϖ

$$f\left(\frac{1}{2}\frac{d(K^2-r^2)}{d\varpi}\right)+\frac{K^2-r^2}{\varpi}=0.$$

On intégrera donc cette équation; soit $r^2 = \theta(\varpi)$ une intégrale. On aura l'argument φ par une quadrature

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{\theta(\varpi)-\varpi^2}} + \text{const};$$

c'est là l'équation de la courbe (M). Ce calcul a plusieurs applications à des courbes connues, en prenant $\lambda = R$, $\lambda = \frac{R}{2} \cdots$

Dans le cas de la parabole, le théorème de Steiner constitue la propriété bien connue et caractéristique de la parabole, d'avoir le point H sur sa directrice.

6. **Propriété dynamique de l'orthocentre limite.** — Le point H intervient dans l'étude du mouvement, sans frottement, d'un point pesant sur une courbe plane située dans un plan vertical.

Par exemple, dans le cas du pendule simple (masse $m = 1$), l'équation des forces vives étant

$$l^2\theta'^2 = 2g(y_1 - y),$$

la réaction N est

$$N = g\cos\theta + l\theta'^2,$$
$$lN = g(2y_1 - 3y).$$

Introduisons la projection H_1 de H sur la droite $y = y_1$,

$$lN = 2g\,HH_1.$$

La formule s'étend immédiatement au cas d'une courbe plane quelconque. La droite $y = y_1$ étant l'horizontale pour laquelle la vitesse serait théoriquement nulle, la réaction N de la courbe est exprimée par la formule

$$N = \frac{2g}{\rho} HH_1,$$

où ρ désigne le rayon de courbure et HH_1, la distance de l'orthocentre limite associé au point m à la droite $y = y_1$.

En particulier si $N\rho$ est constant, il doit, d'après cette formule générale, décrire une horizontale fixe. La courbe doit être une parabole d'axe vertical.

On sait que la formule $N\rho = \text{const.}$, dans le mouvement du point, caractérise un mouvement contraint sur une courbe qui, pour une vitesse initiale convenablement choisie, est la trajectoire du mouvement libre sous l'action de la même force. Dans le cas de la pesanteur, la courbe est la parabole balistique.

7. Limites des coniques tritangentes. — Nous avons initialement indiqué que l'un des cercles ex-inscrits devenait le cercle de courbure, tandis que le cercle inscrit et les deux autres cercles ex-inscrits tendaient vers le point O.

D'autre part la relation

$$\frac{y}{x} + \frac{y'}{x'} = 0,$$

montre que OP et OP′ sont symétriques par rapport à Ox.

Une conique de foyers P et P′, passant par O et tangente à Ox, est la limite d'une conique tritangente.

Le rayon de courbure d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$MF = r, \qquad MF' = r',$$

est

$$R = \frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

en fonction des rayons vecteurs focaux. Dans le cas actuel où PP′ sont les foyers FF′ d'une conique, on a

$$r^2 = \frac{\rho y}{2\sigma}, \qquad \frac{r'}{r} = \frac{\sigma}{1-\sigma},$$

$$2a = r + r' = \frac{r}{1-\sigma},$$

$$b^2 = yy' = \frac{\sigma}{1-\sigma}y^2,$$

d'où

$$R = \frac{2\sigma r^2}{y} = \rho.$$

Les coniques inscrites limites sont donc identiques aux coniques osculatrices en O *à la courbe* (C).

Les équations ponctuelle et tangentielle des coniques osculatrices en O sont respectivement :

$$A x^2 + 2 B xy - \lambda y^2 - y = 0,$$

$$\frac{1}{4} u^2 + (B^2 + \lambda A) v^2 + w(Bu - Av) = 0$$

avec

$$A = \frac{1}{2\rho}.$$

Il est bien connu que le lieu de leurs centres est le diamètre de la parabole osculatrice, tandis que le lieu de leurs foyers est la cubique circulaire à point double d'équation

$$2(Ax + By)(x^2 + y^2) = xy,$$

inverse par rapport à O d'une hyperbole équilatère.

L'axe focal PP′ enveloppe alors une parabole.

8. Les courbes invariantes. — D'après la génération même de la cubique précédente, cette courbe est invariante dans la transformation isogonale-limite.

La courbe invariante générale dans la transformation isogonale limite s'obtient comme lieu des points conjugués PP′ tels que la droite PP′ les joignant enveloppe une courbe imposée.

L'équation de la droite PP′ est :

$$X y (x^2 + y^2 - \rho y) - Y x (x^2 + y^2) + \rho x y^2 = 0.$$

Si donc,

$$f(u, v, w) = 0$$

est l'équation tangentielle de l'enveloppe imposée, le lieu de P et P′ est la courbe d'équation

$$f[y(x^2 + y^2 - \rho y), \; -x(x^2 + y^2), \; \rho x y^2] = 0.$$

Telle est l'équation générale des courbes invariantes dans la transformation.

Parmi elles se trouve le *cercle invariant* (de diamètre Oγ)

$$x^2 + y^2 - \rho y = 0,$$

il correspond au cas $\sigma = \sigma' = \frac{1}{2}$ pour les cercles associés

$$x^2 + y^2 - \frac{\rho}{2\sigma} y = 0, \qquad x^2 + y^2 - \frac{\rho}{2\sigma'} y = 0,$$

du paragraphe 2. La droite PP′ est alors parallèle à l'axe Ox.

En exprimant que la droite PP′ pivote autour d'un point fixe A (a, b), on obtient un réseau de *cubiques invariantes* dont l'équation est

$$ay(x^2 + y^2 - \rho y) - bx(x^2 + y^2) + \rho x y^2 = 0;$$

elles admettent O et Ox pour point et tangente de rebroussement.

Lorsque le point fixe A est sur Oy, la cubique se décompose en cet axe et en deux droites également inclinées sur les axes.

Lorsque le point fixe est sur Ox, la cubique se décompose en l'axe Ox et une conique

$$x^2 + y^2 - \rho y + \frac{\rho}{a} xy = 0.$$

On obtient ainsi le *faisceau ponctuel*

$$x^2 + y^2 - \rho y = 2\lambda xy$$

des coniques invariantes. Elles touchent Ox en O, avec le cercle invariant comme cercle osculateur, et passent par le centre γ de courbure.

Le lieu des centres des coniques de ce faisceau est l'hyperbole équilatère d'équation

$$x^2 - y^2 + \frac{\rho}{2} y = 0,$$

d'axe Oy, de sommet O, dont le cercle principal est le cercle circonscrit-limite.

AU SUJET DES CERCLES ASSOCIÉS DANS LA TRANSFORMATION ISOGONALE.

9. Considérons maintenant le système d'axes mobiles formés par la tangente MX et la normale MY au point courant M de la

courbe (C). Les formules de changement d'axes sont :

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha + f',$$
$$Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - f,$$
$$\rho = f + f''.$$

Cherchons l'enveloppe d'une courbe d'équation

$$\mathcal{F}(X, Y, \lambda, \mu, \ldots) = 0,$$

λ, μ étant les fonctions données de α.

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\alpha}, \qquad \mu' = \frac{d\mu}{d\alpha},$$

les points caractéristiques sont à l'intersection des courbes d'équations $\mathcal{F} = 0$ et

$$(Y - \rho)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X} - X\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial Y} + \lambda'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda} + \mu'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu} = 0.$$

En particulier un cercle tangent en M à la courbe (C)

$$X^2 + Y^2 - 2\lambda Y = 0$$

touchera son enveloppe en un point Q autre que M, défini par la condition

$$\frac{Y}{X} = \frac{\lambda - \rho}{\lambda'};$$

soit ω l'inclinaison de OQ sur la tangente MX ;

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\lambda'}{\lambda - \rho}.$$

Pour $\lambda = \rho$, $\omega = 0$ (cercle osculateur), pour $\lambda =$ const., $\omega = \frac{\pi}{2}$ (courbes-parallèles).

10. Comme application, considérons le système

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0,$$

de cercles tangents à la courbe (C) et proposons-nous d'associer deux cercles λ et λ_1, tangents à C au même point M, par la condition que les points caractéristiques correspondants Q et Q_1, restent tels que OQ et OQ_1 soient en direction symétriques par rapport à la normale. La condition

$$\omega + \omega_1 = \pi$$

se traduit par la relation différentielle suivante entre ρ, λ et λ_1 :

$$\frac{d\lambda}{\lambda - \rho} + \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - \rho} = 0;$$

on peut se donner arbitrairement la fonction $\lambda(\rho)$; λ_1 est alors déterminée par une équation différentielle, linéaire, du premier ordre.

La forme même de cette équation permet de donner une élégante solution, en utilisant une remarque que j'avais autrefois signalée au sujet des normales aux courbes planes [1].

Soit (Ω) un *cercle fixe* quelconque et une courbe (C') quelconque dans le plan. Sur la normale de (C') au point M', où le rayon de courbure a la valeur ρ, le cercle fixe (Ω) détache deux segments λ et λ_1, comptés à partir de M' jusqu'aux points d'intersection respectifs avec la circonférence. J'ai démontré précisément que ρ, λ et λ_1 sont toujours liés par la relation

$$\frac{d\lambda}{\lambda - \rho} + \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - \rho} = 0.$$

Cette remarque rappelée, établissons une correspondance entre les points M et M' des courbes (C) et (C'), définie par l'égalité des rayons de courbure en ces points associés.

Il suffit de porter à partir de M, sur la normale à (C) des segments égaux à λ et λ_1 pour avoir les centres des cercles associés.

Parmi les solutions de cette question, il convient de noter la solution

$$\lambda + \lambda_1 = \rho, \qquad \lambda^2 + \lambda_1^2 = \text{const}.$$

11. Cherchons maintenant à résoudre la question suivante, plus particulière : *L'association entre les cercles λ et λ_1 doit être telle que les points caractéristiques Q et Q_1 soient constamment conjugués dans la transformation isogonale définie au point commun de contact.*

---

[1] *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XXXVI, 1913, p. 369-378).

Nous savons que les cercles

$$x^2+y^2=\frac{\rho}{2\sigma}y$$

se correspondent sous la condition $\sigma+\sigma_1=1$ dans la transformation isogonale. Avec la notation actuelle, les deux cercles λ et λ_1 seront associés dans la transformation isogonale si la relation

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}=\frac{4}{\rho}$$

est satisfaite.

Les points Q et Q_1 seront donc conjugués dans la transformation isogonale définie au point M si λ et λ_1 satisfont au système des deux conditions suivantes :

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}=\frac{4}{\rho}, \qquad \frac{d\lambda}{\lambda-\rho}+\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-\rho}=0.$$

Il en résulte, entre λ et λ_1, l'équation homogène

$$\frac{d\lambda}{\lambda(\lambda-3\lambda_1)}+\frac{d\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_1-3\lambda)}=0,$$

qui s'intègre par les formules suivantes :

$$\rho=4C\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^3, \qquad \lambda=\frac{Ct}{(1+t^2)^2}, \qquad \lambda_1=\frac{Ct^3}{(1+t^2)^2};$$

ou encore (en posant $t=\operatorname{tang}\tau$)

$$\lambda=a\sin\tau\cos^3\tau,$$
$$\lambda_1=a\cos\tau\sin^3\tau,$$
$$\rho=\frac{1}{2}a\sin^3 2\tau;$$

ρ étant connu, on calculera τ, puis λ et λ_1.

D'ailleurs, on peut observer que la condition différentielle peut être mise sous la forme

$$d(\lambda\lambda_1)=\rho\, d(\lambda+\lambda_1);$$

la question est résolue par les formules

$$\lambda+\lambda_1=4A\rho^{\frac{1}{3}},$$
$$\lambda\lambda_1=A\rho^{\frac{4}{3}}$$

(A est une constante arbitraire), qui fait connaître les expressions des segments λ et λ_1 en fonction de ρ.

12. Pour compléter l'étude de cette dernière question, cherchons celles des courbes (C) du plan qui jouissent de la propriété que le cercle fixe Ω

$$x^2 + y^2 = a^2$$

détermine précisément sur les normales de (C), les segments λ et λ_1.

La courbe (C) étant définie comme enveloppe de la droite

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = \varpi,$$

λ et λ_1 sont les racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2 - 2\lambda\varpi + \varpi^2 + \varpi'^2 - a^2 = 0$$

et aussi de l'équation

$$\lambda^2 - 4\,A\rho^{\frac{1}{3}}\lambda + A\,\rho^{\frac{4}{3}} = 0.$$

Les courbes correspondantes sont homothétiques aux courbes définies par la condition

$$r^2 - a^2 = \frac{1}{b^2}\varpi^4,$$

d'où

$$\rho = \frac{2\varpi^3}{b^2},$$

$$\alpha - \alpha_0 = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{a^2 - \varpi^2 + \frac{\varpi^4}{b^2}}}.$$

Ces courbes comprennent les courbes

$$\varpi = sn \frac{\alpha}{\sqrt{1 + k^2}} \qquad (\text{module } k),$$

$$\varpi = cn \frac{\alpha}{\sqrt{2k^2 - 1}} \qquad (\text{module } k).$$

Il y a deux cas de dégénérescence des fonctions elliptiques.

Il est connu que les courbes

$$\frac{\rho}{\varpi^n} = \text{const.}$$

comprennent comme cas particuliers les spirales sinusoïdes. Pour $n = 3$, la spirale sinusoïde correspondante est la parabole.

Dans le cas du cercle (Ω) réduit à un cercle-point O, la courbe (C) correspond à la solution

$$\frac{\varpi^2}{r} = \text{const}.$$

Par exemple, avec $\varpi^2 = r$, on a

$$\rho = 2\varpi r = 2\varpi^3.$$

la courbe est une parabole de foyer O.

Un second cas de dégénérescence est celui des courbes homothétiques aux courbes d'équation

$$\varpi = \operatorname{th}(m\alpha),$$
$$\varpi = \cot(m\alpha),$$

pour lesquelles

$$\rho = \varpi^3:$$

ce sont des podaires négatives de *nœuds interscendants* (par voie complexe).