BULLETIN DE LA S. M. F.

MENAHEM SCHIFFER

Sur un principe nouveau pour l'évaluation des fonctions holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 231-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__231_0>

SUR UN PRINCIPE NOUVEAU POUR L'ÉVALUATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES;

PAR MENAHEM SCHIFFER
à Jérusalem.

Dans la présente Note je veux montrer l'importance d'une nouvelle conception qui permet d'évaluer beaucoup de propriétés des fonctions holomorphes. J'obtiens d'ailleurs quelques théorèmes concernant les domaines, obtenus par la représentation du cercle-unité à l'aide des fonctions analytiques.

Nous nous occuperons de la famille des fonctions

$$(1) \qquad w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

holomorphes dans le cercle-unité, et nous étudierons les ensembles-images qu'on obtient de ce cercle à l'aide de ces fonctions. Ce sont des domaines, éventuellement couverts plusieurs fois et de connection multiple, mais jamais ne contenant l'infini dans leur intérieur. Ainsi nous obtenons pour chaque fonction $f(z)$ un domaine D dans le plan w qui possède une frontière, éventuellement composée de plusieurs continus. Parmi eux il y en a un, que nous appellerons la « frontière extérieure » dont on peut relier es points avec l'infini sans passer par des points de D. C'est la conception de la frontière extérieure $\mathcal{R}$ qui joue un rôle important dans nos recherches.

1. L'ensemble continu $\mathcal{R}$ définit un domaine $\hat{D}$ de connection simple (contenant l'origine) dont il est la frontière, et ce domaine peut être représenté simplement sur le cercle-unité à l'aide d'une fonction univalente $\varphi(z)$, normée de manière que son inverse est de la forme

$$(2) \qquad F(z) = \gamma(z + \alpha_2 z^2 + \ldots) \qquad \text{avec} \qquad \gamma > 0.$$

La fonction (2) représente le cercle-unité simplement sur le domaine $\acute{D}$. Une méthode de conclusion intéressante dont M. Rogosinski s'est spécialement servi avec succès [1], fournit

$$\gamma \geqq 1 \tag{3}$$

parce que

$$F^{-1}\{f(z)\} = \frac{1}{\gamma} z + \left(\frac{a_2}{\gamma} - \frac{\alpha_2}{\gamma^2}\right) z^2 + \ldots \tag{4}$$

représente le cercle-unité sur lui-même et que l'inégalité de Cauchy exige

$$\frac{1}{\gamma} \leqq 1.$$

Nous relions ce fait au théorème de Koebe-Faber sur les fonctions univalentes dans le cercle-unité. Ce théorème dit [2] que la frontière du domaine fourni par une fonction univalente dans le cercle-unité

$$f(z) = \gamma z + \beta z^2 + \ldots \tag{1'}$$

ne s'approche jamais de l'origine jusqu'à une distance moindre de $\frac{\gamma}{4}$. Nous obtenons ainsi le théorème I :

Théorème I. — *La frontière extérieure d'un domaine dans lequel une fonction* (1) *transforme le cercle-unité reste toujours à une distance plus grande que* $\frac{1}{4}$ *de l'origine* [3].

Nous nous servirons aussi de l'énoncé plus précis

$$|\alpha| \geqq \frac{\gamma}{4} \tag{5}$$

---

[1] Rogosinski, *Über den Wertevorrat einer analyt. Funktion, Schriften der Königsberger gelehrten Gesellschaft, Naturwissensch. Klasse* (8, *Jahr, Heft*, 1, 1931, p. 2, Satz A.).

[2] P. Koebe, *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II, Math. Annalen*, 69, 1910. S. 46. — G. Faber, *Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes...* (*Sitz. Ber. d. math. phys. Kl. d. Kgl. Bayr-Akad. d. Wiss.*, 1916, S. 39-42).

[3] M. Rogosinski a eu l'obligeance de m'informer que ce résultat a été déjà trouvé par lui-même et par M. Dieudonné.

si α est un point quelconque de la frontière extérieure de D. Nous verrons que la valeur de γ est importante pour beaucoup de propriétés du domaine D et ainsi indirectement aussi de la fonction $f(z)$. La frontière extérieure à son tour donne une évaluation par excès pour ce coefficient et de là l'importance de cette dernière.

2. Prenons par exemple la fonction

$$\text{(4)} \qquad F^{-1}\{f(z)\} = \frac{1}{\gamma}z + \left(\frac{a_2}{\gamma} - \frac{\alpha_2}{\gamma^2}\right)z^2 + \ldots$$

qui satisfait pour $|z| \leqq 1$ à l'inégalité

$$\text{(6)} \qquad |F^{-1}\{f(z)\}| \leqq 1.$$

La fonction

$$h(z) = \frac{\dfrac{F^{-1}\{f(z)\}}{z} - \dfrac{1}{\gamma}}{1 - \dfrac{F^{-1}\{f(z)\}}{z} \cdot \dfrac{1}{\gamma}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a_2}{\gamma} - \dfrac{\alpha_2}{\gamma^2}\right)z + \ldots}{1 - \dfrac{1}{\gamma^2} - \left(\dfrac{a_2}{\gamma^2} - \dfrac{\alpha_2}{\gamma^3}\right)z - \ldots} = \frac{\left(\dfrac{a_2}{\gamma} - \dfrac{\alpha_2}{\gamma^2}\right)}{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}}z + \ldots$$

satisfait de manière analogue pour $|z| \leqq 1$ à l'inégalité

$$|h(z)| \leqq 1.$$

L'inégalité de Cauchy exige donc

$$\left|\frac{a_2}{\gamma} - \frac{\alpha_2}{\gamma^2}\right| \leqq 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

ou

$$\text{(7)} \qquad |a_2| \leqq \gamma - \frac{1}{\gamma} + \frac{|\alpha_2|}{\gamma}.$$

D'après un théorème de M. Bieberbach sur les coefficients de fonctions univalentes (¹) on a l'inégalité

$$\text{(8)} \qquad |\alpha_2| \leqq 2.$$

(¹) L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derj. Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* (*Berl. Ber.*, 940-955, 1916, p. 946).

Ainsi nous obtenons à l'aide de (5) et (7)

$$|a_2| \leqq 4|\alpha| + \frac{|\alpha_2| - 1}{\gamma}.$$

Pour se servir de (3) il faut distinguer deux cas.

a. $|\alpha_2| \geqq 1$. Alors (3) et (8) fournissent :

(9) $$|a_2| \leqq 4|\alpha| + 1.$$

b. $|\alpha_2| \leqq 1$. Dans ce cas (9) vaut également.

Donc nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit α un point de la frontière extérieure d'un domaine donné par une fonction* (1)*; alors on a l'inégalité*

$$|a_2| \leqq 4|\alpha| + 1.$$

Ce théorème est le plus exact qu'on peut trouver, parce que pour

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

on a, en effet,

$$\alpha = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad 2 = 4.\left|-\frac{1}{4}\right| + 1.$$

On peut évaluer de la même manière les autres coefficients à l'aide de la frontière extérieure. A cette fin on se servira de l'algorithme de M. Schur pour les coefficients de fonctions bornées ([1]) dont nous avons fait ici le premier pas. Ces évaluations sont naturellement d'intérêt spécial, si la fonction $f(z)$ n'est pas bornée, mais possède une frontière extérieure. Au lieu du point le plus éloigné de l'origine du domaine, c'est-à-dire du module-maximum de la fonction dont se sert l'inégalité de Cauchy, nous nous servons dans l'évaluation d'un point choisi à volonté sur la frontière extérieure, même du plus rapproché.

D'un autre côté l'inégalité (9) fournit une évaluation intéressante pour α à l'aide de a_2. Nous constatons à l'aide de (9) qu'une valeur β, que la fonction (1) ne prend pas, doit être plus grande

([1]) I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind* (*Journal für die reine und angew. Math.*, 147, 1916, p. 206-232).

que $\frac{|a_2|-1}{4}$ ou sera point d'un trou dans la représentation du cercle-unité, fourni par $f(z)$.

3. Nous nous occuperons de la même manière de l'inégalité de Jensen. Supposons que $0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ soient des zéros de $f(z)$ se trouvant dans le cercle-unité. Dans ce cas ils seront aussi zéros de la fonction (4). Appliquons à cette fonction dont le module pour $|z| < 1$ est toujours < 1 l'inégalité de Jensen

$$\left|\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\right| \leqq \gamma \leqq 4|\alpha|. \tag{10}$$

Donc nous avons :

THÉORÈME III. — *Soient* $0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *des zéros d'une fonction* (1) *et* α *un point de la frontière extérieure correspondante; alors on a*

$$\left|\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\right| \leqq 4|\alpha|.$$

4. Au lieu de l'inégalité de Schwarz qui se sert du maximum, nous trouverons une inégalité analogue également à l'aide de la frontière extérieure. Appliquons l'inégalité de Schwarz à la fonction (1) donnant pour $|z| < 1$,

$$|F^{-1}\{f(z)\}| \leqq |z|. \tag{11}$$

Nous en tirons pour

$$f(z) = F[F^{-1}\{f(z)\}]$$

à l'aide de l'inégalité de M. Bieberbach

$$|F(\eta)| \leqq \frac{\gamma|\eta|}{(1-|\eta|)^2}$$

pour $|\eta| < 1$ et pour des fonctions univalentes (1')

$$|f(z)| \leqq \frac{\gamma|z|}{(1-|z|)^2}$$

pourvu que $|z| \leqq 1$. En vertu de (5) nous avons donc :

THÉORÈME IV. — *Soit* $f(z)$ *une fonction de la famille* (1) *et α un point de la frontière extérieure correspondante; alors on a*

$$|f(z)| \leqq \frac{4|\alpha||z|}{(1-|z|)^2} \tag{12}$$

5. Transformons enfin en vue de la conception de la frontière extérieure l'inégalité

$$|g'(z)| \leqq \left|\frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}\right|,$$

valable dans le cercle-unité pour la dérivée d'une fonction (1) satisfaisant à $|g(z)| \leqq 1$. Appliquons cette inégalité à la fonction (4) ayant la dérivée

$$[F^{-1}\{f(z)\}]' = \frac{f'(z)}{F'\{F^{-1}[f(z)]\}}.$$

Nous obtenons

$$|f'(z)| \leqq \frac{1}{1-|z|^2} \cdot |F'\{F^{-1}[f(z)]\}|. \tag{13}$$

D'après un théorème de MM. Bieberbach-Pick sur les fonctions univalentes ([1]), on a pour $|\eta| < 1$

$$|F'(\eta)| \leqq \frac{\gamma(1+|\eta|)}{(1-|\eta|)^3}.$$

Maintenant d'après l'inégalité de Schwarz nous avons

$$|F^{-1}[f(z)]| \leqq |z|.$$

Ainsi on a

$$|F'\{F^{-1}[f(z)]\}| \leqq \frac{\gamma(1+|z|)}{(1-|z|)^3},$$

et d'après (13) et (5)

$$|f'(z)| \leqq \frac{4|\alpha|}{(1-|z|)^4}. \tag{14}$$

Donc :

THÉORÈME V. — *Soit $f(z)$ une fonction de la famille* (1) *et α un point de la frontière extérieure, alors on a*

$$|f'(z)| \leqq \frac{4|\alpha|}{(1-|z|)^4}.$$

---

(1) PICK, *Über den Koebeschen Verzerrungssatz*, *Leipz. Ber.*, 68, 1916, p. 58-64.

BIEBERBACH, l. c., p. 946.

On voit déjà quel est le principe commun à toutes ces évaluations et aussi qu'on peut trouver ainsi beaucoup d'autres inégalités. Mais nous quittons ces considérations pour nous occuper maintenant de propriétés géométriques de la frontière extérieure et de sa relation avec les autres continus de la frontière.

6. Soient α et β deux points de la frontière de D qu'on peut relier sans passer par des points de D. Nous construisons la fonction

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}} = z + b_2 z^2 + \ldots \tag{15}$$

appartenant aussi à la famille (1). Pour elle

$$\beta' = \frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

est un point de la frontière extérieure, parce que la transformation

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \tag{15'}$$

fait correspondre β' à β, et ∞ à α, et à la courbe continue entre les deux points donnés une courbe semblable reliant les deux points nouveaux. Du théorème I nous déduisons

$$|\beta'| \geqq \frac{1}{4}.$$

Donc nous en tirons

Théorème VI. — *Si α et β sont deux points d'un même trait continu de la frontière de* D *on a*

$$\left| \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right| \leqq 4. \tag{16}$$

Ce théorème est aussi valable pour toute paire de points de la frontière d'un trou de D et dans ce cas il présente un intérêt spécial. Interprétons-le géométriquement; supposons que β soit le point du trou le plus rapproché de l'origine. On a

$$|\alpha - \beta| \leqq 4 |\alpha| \cdot |\beta| \tag{17}$$

pour tous les points α du trou. Cela nous donne une borne supérieure pour $|\alpha|$

(18) $$|\alpha| \leqq \frac{|\beta|}{1-4|\beta|}.$$

Donc

(19) $$|\alpha-\beta| \leqq \frac{4|\beta|}{1-4|\beta|}|\beta|.$$

Définissons l'angle ε par l'égalité

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{4|\beta|}{1-4|\beta|},$$

alors nous tirons de l'inégalité (17) que tous les points α se trouvent dans un cercle autour de β qu'on voit de l'origine sous un angle moindre de ε. Nous pouvons donc associer à tout nombre ε un rayon ρ de manière que nous voyons le trou de l'origine sous un angle moindre de ε, si un seul point du trou se trouve plus prochain de l'origine que ρ. M. Valiron a étudié plus profondément tous ces problèmes concernant les valeurs exceptionnelles ([1]).

7. Nous établirons enfin une relation intéressante entre les points des frontières différentes de D. Nous construisons la fonction automorphe

(20) $$g(z) = \gamma(z + a_2 z_2 + \ldots), \qquad \gamma > 0,$$

définie pour $|z| < 1$, qui représente son domaine fondamental contenant l'origine simplement sur le domaine $\hat{D}_1$ qu'on déduit de $\hat{D}$ en y supprimant le domaine T qui était un trou de D. L'inégalité de Schwarz fournit

(3′) $$\gamma \geqq 1,$$

parce que

$$g^{-1}\{f(z)\} = \frac{1}{\gamma}z + \ldots$$

est holomorphe dans le cercle-unité et le représente sur lui-même. Le groupe de la fonction $g(z)$ est composé de translations non euclidiennes et possède un seul paramètre.

([1]) G. Valiron, *Sur un théorème* de MM. Koebe et Landau [*Bull. sc. Math.* (2), 51, p. 34-42].

La fonction

$$G(z) = -\rho \log \left\{ 1 - \frac{g(z)}{\rho} \right\}, \qquad G(0) = 0, \tag{21}$$

est holomorphe dans le cercle-unité, si ρ est un point du trou. En des points différents homologues pour la fonction $g(z)$, $G(z)$ prend des valeurs qui se distinguent par des multiples de $2\pi i \rho$ différents de zéro. Ainsi nous voyons que la fonction

$$G(z) = \gamma z + \left(\frac{\gamma^2}{2\rho} + \gamma a_2 \right) z^2 + \dots \tag{22}$$

est univalente. D'après l'inégalité (8) de Bieberbach nous trouvons

$$\left| \frac{\gamma}{2\rho} + a_2 \right| \leqq 2,$$

$$\left| \frac{\gamma}{2\rho} \right| \leqq 2 + |a_2|. \tag{23}$$

De (3) et (9) suit

$$\left| \frac{1}{2\rho} \right| \leqq 4 \left(|\alpha| + \frac{3}{4} \right),$$

si α est un point de la frontière extérieure. Si nous appelons tout trait continu de la frontière qui n'est pas la frontière extérieure, une frontière intérieure, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soit α un point de la frontière extérieure de g et ρ un point d'une frontière intérieure; alors ils satisfont à l'inégalité*

$$\frac{1}{8} \leqq |\rho| \left(|\alpha| + \frac{3}{4} \right). \tag{24}$$

En combinant cette inégalité avec (5) nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Soit α un point de la frontière extérieure et ρ un point d'une frontière intérieure de* D; *alors ils satisfont à l'inégalité*

$$|\alpha| \cdot |\rho| \geqq \frac{1}{32}. \tag{25}$$

En effet (25) suit immédiatement de (5), si $|\rho| \geqq \frac{1}{8}$, tandis que autrement (24) fournit

$$|\rho\alpha| \geqq \frac{1}{8} - \frac{3}{4} |\rho| \geqq \frac{1}{32}.$$

Les théorèmes VII et VIII montrent qu'un point très rapproché de l'origine d'une frontière intérieure force toute la frontière extérieure de rester à grande distance de l'origine. D'après VIII α et ρ se comportent réciproquement. Maintenant nous verrons que $|\alpha|$ se comporte asymptotiquement comme $|\rho| e^{\frac{\text{const.}}{|\rho|}}$.

8. Pour voir cela prenons la fonction (21). Si α est un point de la frontière extérieure de D, alors

$$-\rho \log \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right\}, \qquad \left| \mathcal{I} \log \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right\} \right| \leqq \pi$$

sera un point de la frontière extérieure du domaine, obtenu du cercle-unité à l'aide de la fonction (21). Ainsi nous obtenons du théorème I :

Théorème IX. — *Soit* α *un point de la frontière extérieure de* D, ρ *un point d'une frontière intérieure; alors ils satisfont à l'inégalité*

$$(26) \qquad \left| \rho \log \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right\} \right| \geqq \frac{1}{4}$$

Pour $|\rho| \leqq \frac{1}{8}$ nous sommes certains que

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right| \geqq \left| \frac{\alpha}{\rho} \right| - 1 \geqq 1$$

parce que $|\alpha| \geqq \frac{1}{4}$. Donc, pour des $|\rho|$ très petits,

$$\log \left| \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right\} \right|$$

n'est pas très grand que pour des $|\alpha|$ très grands. Pour l'ordre de grandeur de $|\alpha|$ nous tirons de (26) l'information suivante :

$$|\rho| \log |\alpha| \geqq \frac{1}{4} + O\left(|\rho| \log \frac{1}{|\rho|} \right).$$

Toutes ces évaluations faites ici peuvent être améliorées ou extendues. Mais dans cette Note nous avons voulu seulement montrer les relations générales et attirer l'attention sur l'importance de la frontière extérieure.