BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS KRYLOFF

NICOLAS BOGOLIOUBOFF

Sur les propriétés ergodiques de l’équation de Smoluchovsky

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 49-56

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__49_0>

SUR LES PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DE L'ÉQUATION DE SMOLUCHOVSKY,

PAR MM. NICOLAS KRYLOFF ET NICOLAS BOGOLIOUBOFF.

1. Soit donné un système dynamique et soit Ω son espace des phases.

Nous admettons ici que Ω est un espace distancié, compact et connexe.

Soit m une mesure définie dans cet espace, positive pour tout ensemble ouvert non vide.

Supposons qu'il existe une probabilité bien définie $\mathcal{I}_t\{P, \mathfrak{M}\}$ afin que le système qui se trouve à un instant du temps dans l'état P se trouvera après l'écoulement du temps t dans un des états $Q \subset \mathfrak{M}$.

Supposons enfin que cette probabilité peut être mise sous la forme

$$\mathcal{I}_t\{P, \mathfrak{M}\} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(P, Q, t)\, dm_Q,$$

où $\varphi(P, Q, t)$ est une fonction continue de P, Q, t pour $t > 0$. Il est clair d'abord que cette fonction doit vérifier l'équation dite de Smoluchowsky

$$\varphi(P, Q, t+\tau) = \int_{\Omega} \varphi(P, R, t)\, \varphi(R, Q, \tau)\, dm_R, \tag{1}$$

ainsi que les conditions supplémentaires suivantes

$$\int_{\Omega} \varphi(P, Q, t)\, dm_Q = 1, \qquad \varphi(P, Q, t) \geqq 0. \tag{2}$$

Dans le présent article nous allons étudier, en partant de ces relations, l'allure asymptotique de la densité de probabilité $\varphi(P, Q, t)$ pour $t \to +\infty$.

2. Remarquons d'abord que de l'équation (1) il s'ensuit que $\varphi(P, Q, n\tau)$ est le noyau n fois itéré relatif au noyau

$$\varphi(P, Q, \tau).$$

D'autre part, en vertu des théorèmes bien connus de M. Fréchet on peut affirmer que si $K(P, Q)$ est un noyau borné vérifiant les conditions

$$(3) \qquad \int_\Omega K(P, Q)\, dm_Q = 1, \qquad K(P, Q) \gtreqq 0,$$

alors les noyaux itérés $K_n(P, Q)$ peuvent être mis sous la forme

$$K_n(P, Q) = \Phi_n(P, Q) + R_n(P, Q),$$

où

$$|R_n(P, Q)| \leqq H\gamma^n, \qquad A = \text{const.}, \qquad 0 \leqq \gamma < 1,$$

et où $\Phi_n(P, Q)$ est périodique par rapport à l'indice n avec une certaine période N (N étant un entier).

Par conséquent nous avons pour notre cas

$$(4) \quad |\varphi(P, Q, t + nN_\tau\tau) - \varphi(P, Q, t)| \leqq Me^{-\alpha t}, \qquad M = \text{const.}, \qquad \alpha > 0,$$

où n et N_τ sont des entiers et où τ et t sont des nombres positifs quelconques.

Prenons deux valeurs τ_0, τ_1 de τ de façon que le rapport $\frac{\tau_1}{\tau_0}$ soit irrationnel.

Alors à chaque nombre x nous pouvons faire correspondre des telles suites $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$ des nombres entiers que

$$N_{\tau_0} n_1 \tau_0 = N_{\tau_1} n_2 \tau_1 + x + \varepsilon,$$

où $\varepsilon \to 0$ quand

$$n_1 \to +\infty, \qquad n_2 \to +\infty.$$

Or, nous avons d'après (4)

$$|\varphi(P, Q, t + nN_{\tau_0}\tau_0) - \varphi(P, Q, t)| \leqq Me^{-\alpha t},$$
$$|\varphi(P, Q, t + nN_{\tau_1}\tau_1) - \varphi(P, Q, t)| \leqq Me^{-\alpha t};$$

donc

$$|\varphi(P, Q, t + x) - \varphi(P, Q, t)| \leqq Me^{-\alpha t}(1 + e^{-\alpha x}),$$

et d'ici il s'ensuit que *la fonction* $\varphi(P, Q, t)$ *tend uniformément vers une fonction limite* $\varphi(P, Q)$ *quand* $t \to +\infty$.

On voit aussi que

$$|\varphi(P, Q, t) - \varphi(P, Q)| \leqq M e^{-\alpha t}. \tag{5}$$

En passant à la limite dans (1), (2) on s'assure que

$$\varphi(P, Q) = \int_\Omega \varphi(P, R, t)\,\varphi(R, Q)\,dm_R, \tag{6}$$

$$\varphi(P, Q) = \int_\Omega \varphi(P, R)\,\varphi(R, Q, t)\,dm_R, \tag{7}$$

$$\int_\Omega \varphi(P, Q)\,dm_Q = 1, \qquad \varphi(P, Q) \geqq 0. \tag{8}$$

Il est clair en outre que $\varphi(P, Q)$ est une fonction continue de P, Q.

3. Cela étant envisageons un noyau continu $K(P, Q)$ vérifiant les conditions (3) et considérons une équation intégrale

$$x(P) = \int_\Omega K(Q, P)\,x(Q)\,dm_Q. \tag{9}$$

Il est clair d'abord que si $x(P)$ est une solution de cette équation alors l'expression $|x(P)|$ est aussi une solution de cette équation.

Nous avons en effet, d'après (3) et (9).

$$|x(P)| \leqq \int_\Omega K(Q, P)\,|x(Q)|\,dm_Q,$$

d'où vient en vertu de (3)

$$\int_\Omega \left| |x(P)| - \int_\Omega K(Q, P)\,|x(Q)|\,dm_Q \right| dm_P \tag{10}$$
$$= \int_\Omega \int_\Omega K(Q, P)\,|x(Q)|\,dm_Q\,dm_P - \int_\Omega |x(P)|\,dm_P = 0.$$

Or, vu la continuité du noyau K, l'expression

$$|x(P)| - \int_\Omega K(Q, P)\,|x(Q)|\,dm_Q$$

est dans le cas actuel une fonction continue.

Par conséquent de (10) il s'ensuit qu'on a partout

$$|x(P)| = \int_\Omega K(Q, P) |x(Q)| \, dm_Q,$$

ce que nous avons voulu mettre en évidence.

Vu le caractère linéaire de l'équation (9), il est clair que les fonctions non négatives

$$|x(P)| + x(P), \quad |x(P)| - x(P),$$

sont aussi ses solutions.

Soient maintenant $x_1(P)$, $x_2(P)$ deux solutions différentes du système intégral

$$(11) \qquad x(P) = \int_\Omega K(Q, P)\, x(Q)\, dm_Q, \qquad \int_\Omega x(P)\, dm_P = 1.$$

Posons

$$(12) \qquad \begin{cases} y_1(P) = |x_1(P) - x_2(P)| + x_1(P) - x_2(P), \\ y_2(P) = |x_1(P) - x_2(P)| + x_2(P) - x_1(P), \end{cases}$$

et remarquons que ces fonctions non négatives sont les solutions de l'équation intégrale (9).

Remarquons de plus que, vu que les fonction $x_1(P)$, $x_2(P)$ sont différentes, on trouve évidemment

$$\int_\Omega y_1(P)\, dm_P = \int_\Omega y_2(P)\, dm_P = \int_\Omega |x_1(P) - x_2(P)|\, dm_P \neq 0.$$

Nous pouvons donc définir les fonctions suivantes :

$$(13) \qquad z_1(P) = \frac{y_1(P)}{\int_\Omega y_1(P)\, dm_P}, \qquad z_2(P) = \frac{y_2(P)}{\int_\Omega y_2(P)\, dm_P},$$

qui sont évidemment des solutions non négatives du système intégral (11). D'autre part de (12) et de (13) il s'ensuit que ces solutions vérifient l'identité

$$z_1(P)\, z_2(P) = 0.$$

En poussant ces raisonnements plus loin on arrive à la conclusion suivante.

Si a est le nombre des solutions linéairement indépendantes du système (11), on peut construire exactement a solutions non négatives de ce système

$$\rho_1(P), \quad \ldots, \quad \rho_a(P),$$

telles qu'on aurait identiquement

$$\rho_k(P)\rho_q(P) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq q. \tag{14}$$

Il est clair aussi que toute solution non négative du système (11) peut être mise sous la forme

$$x(P) = c_1\rho_1(P) + \ldots + c_a\rho_a(P),$$

où

$$c_1 \geqq 0, \quad \ldots, \quad c_a \geqq 0, \quad c_1 + \ldots + c_a = 1.$$

4. Cela étant, appliquons ces résultats au cas du noyau

$$K(P, Q) = \varphi(P, Q, t)$$

et remarquons que dans ce cas, d'après (7), l'expression

$$x(P) = \varphi(R, P)$$

considérée comme une fonction de P sera justement la solution non négative de (11), quelle que soit la position fixe du point R.

Par conséquent

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=1}^{a} \Phi_k(P)\,\rho_k(Q), \tag{15}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{a} \Phi_k(P) = 1, \qquad \Phi_k(P) \geqq 0, \\ &\int_\Omega \rho_k(P)\,dm_P = 1, \qquad \rho_k(P) \geqq 0, \qquad \rho_k(P)\rho_q(P) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq q. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

De (6) et (7) il s'ensuit qu'on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_k(P) &= \int_\Omega \varphi(P, Q, t)\,\Phi_k(Q)\,dm_Q, \\ \rho_k(P) &= \int_\Omega \varphi(Q, P, t)\,\rho_k(Q)\,dm_Q. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Définissons maintenant certains domaines $\mathfrak{E}_k$ à l'aide de la condition suivante :

$$(18) \qquad \begin{cases} \rho_k(P) > 0 & \text{si} \quad P \subset \mathfrak{E}_k, \\ \rho_k(P) = 0 & \text{si} \quad P \subset \Omega - \mathfrak{E}_k. \end{cases}$$

On voit d'après (16) que ces domaines $\mathfrak{E}_k$ que nous appellerons les ensembles ergodiques sont deux à deux sans points communs.

Cela étant, remarquons que de (17) et de (18) il vient

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(Q, P, t)\, \rho_k(Q)\, dm_Q = 0 \qquad \text{si} \quad P \subset \Omega - \mathfrak{E}_k.$$

Donc

$$(19) \qquad \varphi(P, Q, t) = 0 \qquad \text{si} \quad P \subset \mathfrak{E}_k, \qquad Q \subset \Omega - \mathfrak{E}_k.$$

Cette relation nous montre que la probabilité (afin que le système dynamique, qui se trouve à un instant du temps dans l'état appartenant à un ensemble ergodique $\mathfrak{E}_k$, se trouvera à un instant ultérieur dans un état en dehors de $\mathfrak{E}_k$) est nulle.

En ce sens les ensembles ergodiques sont donc invariants. Considérons maintenant l'ensemble des points appartenant à un des ensembles ergodiques

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_1 + \ldots + \mathfrak{E}_n.$$

On a d'après (15), (16) et (18)

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi(P, P)\, dm_Q = 1;$$

d'où vient

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi(P, Q, t)\, dm_Q \to 1 \qquad (t \to +\infty),$$

de sorte que *la probabilité pour que le système dynamique se trouve dans un des états ergodiques* (c'est-à-dire dans un des états $P \subset \mathfrak{R}$) *s'approche à l'unité quand* $t \to +\infty$. D'autre part, si $P \subset \mathfrak{E}_k$, la probabilité des transitions

$$P \to Q, \qquad \text{où} \quad Q \subset \Omega - \mathfrak{E}_k,$$

est nulle.

Par conséquent

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(P, Q)\, dm_Q = 1 \qquad \text{si} \quad P \subset \mathfrak{E}_k,$$

$$\int_{\mathfrak{E}_k} \varphi(P, Q)\, dm_Q = 0 \qquad \text{si} \quad P \subset \mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k;$$

d'où vient

$$\Phi_k(P) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad P \subset \mathfrak{E}_k, \\ 0, & \text{si} \quad P \subset \mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k. \end{cases} \tag{20}$$

On trouve donc

$$\varphi(P, Q) = \rho_k(Q), \qquad \text{si} \quad P \subset \mathfrak{E}_k.$$

Ainsi la densité de la probabilité ne dépend pas du premier état P *tant que cet état reste à l'intérieur d'un ensemble ergodique.*

D'autre part, de (20), il s'ensuit que

$$\Phi_k(P) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad P \subset \overline{\mathfrak{E}}_k, \\ 0, & \text{si} \quad P \subset \overline{\mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k}; \end{cases} \tag{21}$$

car les fonctions $\Phi_k(P)$ doivent être continues. Par conséquent si $a > 1$ (dans ce cas $\mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k$ ne sera pas vide), l'ensemble ouvert $\Omega - \overline{\mathfrak{R}}$ ne peut pas être vide, car autrement on aurait

$$\Omega = \overline{\mathfrak{E}}_k + \overline{\mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k},$$

ce qui serait incompatible avec la connexité de l'espace, étant donné qu'en vertu de (21) les ensembles fermés $\overline{\mathfrak{E}}_k$, $\overline{\mathfrak{R} - \mathfrak{E}_k}$ n'ont pas des points communs. D'ici il résulte entre autre que la condition nécessaire et suffisante, afin que l'espace Ω forme un seul ensemble ergodique

$$\Omega = \mathfrak{E},$$

est qu'il existe une fonction non négative $\rho(P)$ vérifiant l'équation

$$\rho(P) = \int_{\Omega} \varphi(Q, P, t)\, \rho(Q)\, dm_Q, \tag{22}$$

telle que l'ensemble $E_P\{\rho(P) = 0\}$ de ses racines soit de m — mesure nulle.

En particulier cela se présente par exemple quand les densités de probabilité $\varphi(P, Q, t)$ vérifient la condition supplémentaire.

$$\int_{\Omega} \varphi(P, Q, t)\, dm_P = 1;$$

car alors $\rho(P) = 1$ sera une solution de l'équation (22).