BULLETIN DE LA S. M. F.

RAZIUDDIN SIDDIQI

Sur quelques séries infinies des intégrales

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 53-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__53_0>

SUR QUELQUES SÉRIES INFINIES DES INTÉGRALES;

PAR M. RAZIUDDIN SIDDIQI.

Introduction.

Nous démontrons les théorèmes suivants :

I. Si n, μ, l_1, l_2, $\ldots$, l_μ prennent toutes valeurs entières, et si

$$y = \sin l_1 x \sin l_2 x \ldots \sin l_\mu x, \qquad f_n = \int_0^\pi y \sin nx \, dx,$$

donc, pour un nombre entier r quelconque, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1} |f_n|}{(l_1 l_2 \ldots l_\mu)^r}$$

est uniformément convergente, à la seule condition que $r \leqq \mu$ lorsque μ est un nombre pair.

II. Si λ_n sont les valeurs caractéristiques, et φ_n les fonctions caractéristiques correspondantes de Sturm-Liouville, et si

$$y = \varphi_{l_1}(x) \varphi_{l_2}(x) \ldots \varphi_{l_\mu}(x), \qquad f_n = \int_0^\pi y \varphi_n(x) \, dx,$$

donc, pour un nombre entier r quelconque, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{r-\frac{1}{2}} |f_n|}{(\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \ldots \lambda_{l_\mu})^r}$$

est uniformément convergente pour tous l_1, l_2, $\ldots$, $l_\mu \geqq 1$.

Ces théorèmes ont une importance profonde dans la théorie des équations différentielles partielles non linéaires des types paraboliques et hyperboliques. Des cas particuliers sont étudiés par l'auteur dans les travaux précédents [1].

---

(1) M. R. SIDDIQI, *Mathematische Zeitschrift*, 35, 1932, p. 464-484; *Bulletin of the Academy of Sciences, U. P.*, 3, 1933, p. 1-10; *Proceedings of the Cambridge Phil. Soc.*, 31, 1935, p. 195-202; *Mathematische Zeitschrift*, 40, 1935, p. 484-496.

1. Théorème I. — *Soient n, l_1, l_2, l_3 des nombres entiers* 1, 2, 3, ...,

$$y = \sin l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x, \tag{1}$$

$$f_n \equiv f_n(l_1, l_2, l_3) = \int_0^\pi y \sin nx \, dx. \tag{2}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1} |f_n|}{l_1^r l_2^r l_3^r} \tag{3}$$

est uniformément convergent pour tous $l_1, l_2, l_3 \geqq 1$, lorsque r est un nombre entier quelconque donné.

Lemme.

$$\left[\frac{d^{2p} y}{dx^{2p}}\right]_0^\pi = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Car nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} = &-(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) y + 2 l_1 l_2 \cos l_1 x \cos l_2 x \sin l_3 x \\ &+ 2 l_2 l_3 \sin l_1 x \cos l_2 \cos l_3 x + 2 l_3 l_1 \cos l_1 x \sin l_2 x \cos l_3 x,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que le second dérivé de y est composé de quatre termes, dont l'un a tous les trois facteurs sin, *et les trois termes restants ont deux facteurs* cos *et un facteur* sin.

Considérons maintenant le second dérivé d'un terme de la dernière catégorie, soit :

$$z = \sin l_1 x \cos l_2 x \cos l_3 x.$$

Nous trouvons que

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx^2} = &-(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) z - 2 l_1 l_2 \cos l_1 x \sin l_2 x \cos l_3 x \\ &+ 2 l_2 l_3 \sin l_1 x \cos l_2 x \cos l_3 x - 2 l_3 l_1 \cos l_1 x \cos l_2 x \sin l_3 x.\end{aligned}$$

Ceci est un terme caractéristique de $\frac{d^4 y}{dx^4}$, ce qui démontre que les termes de $\frac{d^4 y}{dx^4}$ sont tels qu'ils ont, soit tous les trois facteurs sin, soit deux facteurs cos et un facteur sin. Il s'ensuit immédiatement que le même résultat est obtenu pour chaque dérivé d'ordre pair. Nous voyons ainsi que chacun des termes de $\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}$ contient au moins un facteur sin, et en conséquence disparaît à la fois lorsque $x = 0$ et lorsque $x = \pi$, de sorte que $\left[\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}\right]_0^\pi = 0$, ce qui établit notre lemme. Ceci est aussi évident si nous remarquons que y est une fonction impaire de x, et que

$$y(x \pm \pi) = -y(x).$$

Or, de f_n, nous obtenons par intégration répétée, lorsque nous remarquons que les termes intégrés disparaissent à chaque phases,

$$
\begin{aligned}
(5 \qquad f_n &= \int_0^\pi \sin nxy\,dx \\
&= -\frac{1}{n}[\cos nxy]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx \frac{dy}{dx}\,dx \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sin nx \frac{dy}{dx}\right]_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \sin nx \frac{d^2y}{dx^2}\,dx \\
&= \frac{1}{n^3}\left[\cos nx \frac{d^2y}{dx^2}\right]_0^\pi - \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \cos nx \frac{d^3y}{dx^3}\,dx \\
&= -\frac{1}{n^4}\left[\sin nx \frac{d^3y}{dx^3}\right]_0^\pi + \frac{1}{n^4}\int_0^\pi \sin nx \frac{d^4y}{dx^4}\,dx \\
&= -\frac{1}{n^5}\left[\cos nx \frac{d^4y}{dx^4}\right]_0^\pi + \frac{1}{n^5}\int_0^\pi \cos nx \frac{d^5y}{dx^4}\,dx, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Nous observons que le terme intégré consiste, abstraction faite du facteur numérique, soit de $\sin nx \frac{d^{2p-1}y}{dx^{2p-1}}$ qui disparaît à o et π en raison de $\sin nx$, soit de $\cos nx \frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}$ qui disparaît en raison de $\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}$, ainsi qu'il appert du lemme. Nous obtenons ainsi, après avoir intégré r fois,

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad f_n &= \pm \frac{1}{n^r}\int_0^\pi \cos nx \frac{d^ry}{dx^r}\,dx, \qquad \text{si } r \text{ est impair,} \\
&= \pm \frac{1}{n^r}\int_0^\pi \sin nx \frac{d^ry}{dx^r}\,dx, \qquad \text{si } r \text{ est pair.}
\end{aligned}
$$

Nous avons alors

$$(7) \qquad n^{r-1}\,|f_n| = \frac{1}{n}\left|\int_0^\pi {}^{\sin}_{\cos}\, nx \frac{d^ry}{dx^r}\,dx\right|.$$

Or, les termes de $\frac{d^r y}{dx^r}$ contiennent, en tant que facteurs numériques, les diverses puissances de l_1, l_2, l_3, et la somme de ces puissances est toujours r, de sorte que si nous divisons $n^{r-1}|f_n|$ par $l_1^r l_3^r l_2^r$, le quotient peut être rendu plus petit que les mêmes intégrales qui ne contiennent plus ces puissances de l_1, l_2, l_3

$$(8)\qquad \frac{n^{r-1}|f_n|}{l_1^r l_2^r l_3^r} \leqq \frac{A}{n}\left\{\left|\int_0^\pi \sin nx \sin l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \, dx\right| + \text{intégrales analogues dans lesquelles un ou plusieurs sin sont remplacés par cos}\right\},$$

lorsque A est une constante, dépendant seulement de r, mais indépendant de n, x, l_1, l_2, l_3.

Écrivons

$$(9)\qquad \begin{cases} a_n = \left|\int_0^\pi \sin nx \sin l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \, dx\right| \\ \text{(qui est naturellement la même que } f_n\text{)}, \\ b_n = \left|\int_0^\pi \sin nx \cos l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \, dx,\right| \\ c_n = \left|\int_0^\pi \cos nx \sin l_1 x \cos l_2 x \sin l_3 x \, dx,\right| \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons, en raisons de (8),

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1}|f_n|}{l_1^r l_2^r l_3^r} \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + b_n + c_n + \ldots + z_n).$$

En la portant au carré, et nous servant de l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$(11)\qquad \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1}|f_n|}{l_1 l_2^r l_3^r}\right\}^2 \leqq A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n + \ldots + z_n)^2$$
$$\leqq 2^4 A^2 \sum_n \frac{1}{n^2} \sum_n (a_n^2 + b_n^2 + \ldots + z_n^2),$$

où nous avons employé l'inégalité $2ab < a^2 + b^2$.

Or, le théorème de Parseval nous apprend que les séries $\sum_n a_n^2, \sum_n b_n^2, \ldots, \sum_n z_n^2$ sont toutes convergentes. Nous savons aussi que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il s'ensuit de (11) que la série (3) est uniformément convergente pour tous r entiers, ce qui démontre le théorème I.

2. Considérons ensuite que la fonction y consiste en quatre facteurs sin :

$$y = \sin l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \sin l_4 x. \tag{12}$$

L'on peut aisément vérifier que jusqu'à la troisième dérivée tous les termes contiennent au moins un facteur sin, de sorte que

$$[y]_0^\pi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_0^\pi = \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0^\pi = \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_0^\pi = 0. \tag{13}$$

Mais la quatrième dérivée contient un terme

$$4\, l_1 l_2 l_3 l_4 \cos l_1 x \cos l_2 x \cos l_3 x \cos l_4 x,$$

et. par conséquent,

$$\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right]_0^\pi \neq 0. \tag{14}$$

Ceci signifie que pour la fonction

$$f_n = \int_0^\pi y \sin n x \, dx, \tag{15}$$

lorsque nous employons le procédé d'intégration répétée, il arrive un moment où le terme intégré $\frac{1}{n^5}\left[\cos n x \frac{d^4y}{dx^4}\right]_0^\pi$ ne disparaît pas. Nous obtenons alors :

$$f_n = -\frac{1}{n^4}\int_0^\pi \sin n x \frac{d^4y}{dx^4}\, dx,$$

ou

$$n^3 f_n = -\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin n x \frac{d^4y}{dx^4}\, dx.$$

Si l'on utilise le même raisonnement qu'au paragraphe 1, on voit que

$$(16)\qquad \frac{n^3\,|f_n|}{(l_1 l_2 l_3 l_4)^4} \leqq \frac{B}{n}\,(|a_n| + |b_n| + \ldots + |z_n|),$$

où B est une constante, et a_n, b_n, ..., z_n sont des intégrales du type

$$a_n = \int_0^\pi \sin n x \sin l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \sin l_4 x\, dx,$$

$$b_n = \int_0^\pi \sin n x \cos l_1 x \sin l_2 x \sin l_3 x \cos l_4 x\, dx,$$

....

Si l'on emploie l'inégalité de Schwarz ainsi que l'inégalité $2ab < a^2 + b^2$, comme auparavant, on obtient :

$$(17)\qquad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\,|f_n|}{(l_1 l_2 l_3 l_4)^4} \right\}^2 \leqq 2\,B^2 \sum_n \frac{1}{n^2} \sum_n (a_n^2 + b_n^2 + \ldots + z_n^2).$$

Suivant le théorème de Parseval que $\sum_n a_n^2$, $\sum_n b_n^2$, ... sont convergents, nous pouvons conclure que :

Théorème II.

$$(18)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\,|f_n|}{(l_1 l_2 l_3 l_4)^4}$$

est uniformément convergent pour tous l_1, l_2, l_3, $l_4 \geqq 1$.

3. Dans les deux sections précédentes, nous nous sommes borné, pour plus de commodité, à trois ou quatre facteurs de y. Il est évident, toutefois, que le raisonnement peut être étendu, avec de légères modifications, à un nombre quelconque de facteurs. Nous pouvons donc considérer que le théorème général suivant est établi :

Théorème III. — *Si* n, μ, r, l_1, l_2, ..., l_μ *prennent toutes valeurs entières, et si*

$$(19)\qquad y = \sin l_1 x \sin l_2 x \ldots \sin l_\mu x,$$

$$(20)\qquad f_n = \int_0^\pi y \sin n x\, dx,$$

donc, pour toutes les valeurs de $l_1, l_2, \ldots, l_\mu \geqq 1$, *et pour tout nombre entier* r *donné, la série infinie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1} |f_n|}{(l_1 l_2 \ldots l_\mu)^r} \tag{21}$$

est uniformément convergente, à la seule condition que $r \leqq \mu$ *lorsque* μ *est un nombre pair.*

4. Une généralisation plus étendue est obtenue lorsque, au lieu des fonctions sin, nous prenons les fonctions caractéristiques de Sturm-Liouville.

Soient λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ les valeurs caractéristiques et $\varphi_n(x)$ les fonctions caractéristiques correspondantes de l'équation de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}\left\{ p(x) \frac{du}{dx} \right\} + \lambda u = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi), \tag{22}$$

avec les conditions données

$$u(0) = 0, \qquad u(\pi) = 0. \tag{23}$$

Nous pouvons alors annoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si* $n, \mu, r, l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ *prennent toutes les valeurs entières, et si*

$$y = \varphi_{l_1}(x)\, \varphi_{l_2}(x) \ldots \varphi_{l_\mu}(x), \tag{24}$$

$$f_n = \int_0^\pi y\, \varphi_n(x)\, dx, \tag{25}$$

alors, pour un nombre entier quelconque r, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{r-1} |f_n|}{(\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \ldots \lambda_{l_\mu})^r} \tag{26}$$

est uniformément convergente pour tous $l_1, l_2, \ldots, l_\mu \geqq 1$.

Nous démontrerons ce théorème pour le cas particulier $\mu = 3$, $r = 2$. Le raisonnement s'applique aussi bien au cas général.

Ainsi, soit pour tous $j, k, l \geqq 1$:

$$y = \varphi_j(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(x) \tag{27}$$

et

$$(28) \qquad f_n \equiv f_n(j, k, l) = \int_0^\pi y\,\varphi_n(x)\,dx.$$

Or, remarquant que la fonction φ_n satisfait à l'équation (22), et aux conditions (23), nous trouvons en intégrant (28) successivement

$$(29) \qquad f_n = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi y\,\frac{d}{dx}(p\,\varphi'_n)\,dx \qquad \left(\varphi'_n = \frac{d\varphi_n}{dx}\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n}\left[yp\,\varphi'_n\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi'_n(py')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\left[\varphi_n py'\right]_0^\pi - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n\,\frac{d}{dx}(py')\,dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n\,\frac{d}{dx}(py')\,dx,$$

parce que le terme intégré disparaît chaque fois.

Or, de (27) nous obtenons, en le différentiant,

$$y' = \varphi'_j\,\varphi_k\,\varphi_l + \varphi'_k\,\varphi_l\,\varphi_j + \varphi'_l\,\varphi_j\,\varphi_k$$

et

$$(30) \qquad \frac{d}{dx}(py') = -(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)\,y$$
$$+ p\left\{\varphi'_j\,\frac{d}{dx}(\varphi_k\,\varphi_l) + \varphi'_k\,\frac{d}{dx}(\varphi_l\,\varphi_j) + \varphi'_l\,\frac{d}{dx}(\varphi_j\,\varphi_k)\right\}.$$

Ainsi, de (29) nous avons

$$(31) \qquad f_n = \frac{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n y\,dx - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n v\,dx$$

ou

$$(32) \qquad v = p\left\{\varphi'_j\,\frac{d}{dx}(\varphi_k\,\varphi_l) + \varphi'_k\,\frac{d}{dx}(\varphi_l\,\varphi_j) + \varphi'_l\,\frac{d}{dx}(\varphi_j\,\varphi_k)\right\}.$$

Si nous appliquons de nouveau cette formule, nous obtenons

$$(33) \qquad f_n = \frac{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{\lambda_n}\left\{\frac{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n y\,dx - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n v\,dx\right\}$$
$$- \frac{1}{\lambda_n}\left\{-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi \varphi_n\,\frac{d}{dx}(pv')\,dx\right\}.$$
$$= \frac{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)^2}{\lambda_n^2}\int_0^\pi \varphi_n y\,dx - \frac{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{\lambda_n^2}\int_0^\pi \varphi_n v\,dx$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^\pi \varphi_n\,\frac{d}{dx}(pv')\,dx.$$

ou, puisque λ_l, λ_k, λ_l est toujours $\geqq 1$, nous trouvons

$$(34)\qquad \frac{\lambda_n\,|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2} < \frac{A}{\lambda_n}\left\{\int_0^\pi |\varphi_n y|\,dx + \int_0^\pi \left|\varphi_n \frac{v}{\lambda_j\lambda_k\lambda_l}\right| dx + \int_0^\pi \left|\varphi_n \frac{\dfrac{d}{dx}(pv')}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}\right| dx\right\},$$

où A est une constante $\leqq 9$.

Or, de (32) nous trouvons que

$$(35)\qquad v = 2p\omega$$

ou

$$(36)\qquad \omega = \varphi_j'\varphi_k'\varphi_l + \varphi_k'\varphi_l'\varphi_j + \varphi_l'\varphi_j'\varphi_k.$$

En conséquence, si l'on écrit

$$p'' = \frac{d^2p}{dx^2}, \qquad \omega'' = \frac{d^2\omega}{d^2x};$$

$$v' = 2p'\omega + 2p\omega', \qquad pv' + 2pp'\omega + 2p^2\omega',$$

$$(37)\qquad \frac{d}{dx}(pv') = (2pp'' + 2p'^2)\omega + 6pp'\omega' + 2p^2\omega'',$$

où, en raison de (36), si l'on écrit

$$\varphi_n''' = \frac{d^3\varphi_n}{dx^3}, \qquad \ldots,$$

$$\omega' = \varphi_j''(\varphi_k'\varphi_l + \varphi_l'\varphi_k) + \varphi_k''(\varphi_l'\varphi_j + \varphi_j'\varphi_l) + \varphi_l''(\varphi_j'\varphi_k + \varphi_k'\varphi_j) + 3\varphi_j'\varphi_k'\varphi_l'$$

et

$$\begin{aligned}(38)\qquad \omega'' = {}& \varphi_j'''(\varphi_k'\varphi_l + \varphi_l'\varphi_k) + \varphi_k'''(\varphi_l'\varphi_j + \varphi_j'\varphi_l) + \varphi_l'''(\varphi_j'\varphi_k + \varphi_k'\varphi_j)\\ &+ 2\varphi_j''\varphi_k''\varphi_l + 2\varphi_k''\varphi_l''\varphi_j + 2\varphi_l''\varphi_j''\varphi_k\\ &+ 5\varphi_j''\varphi_k'\varphi_l' + 5\varphi_k''\varphi_l'\varphi_j' + 5\varphi_l''\varphi_j'\varphi_k'.\end{aligned}$$

Or, les développements asymptotiques de λ_n et φ_n sont (¹) :

$$(39)\qquad \lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{a^2} + O(1), \qquad \varphi_n(x) \doteq c_n \frac{\sin nq}{\{p(x)\}^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &a = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \qquad q(x) = \frac{\pi}{a}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p(x)}},\\ &\frac{1}{c_n^2} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 nq}{\sqrt{p(x)}}\,dx.\end{aligned}\right.$$

(¹) Courant-Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, t. I, p. 291.

De ces expressions, il résulte évidemment que c_n et, en conséquence, φ_n, $\frac{\varphi'_n}{\sqrt{\lambda_n}}$, $\frac{\varphi'''_n}{\lambda_n}$, $\frac{\varphi'''_n}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}$ sont uniformément bornés pour tous les n.

C'est pourquoi les expressions $\frac{c}{\lambda_j\lambda_k\lambda_l}$, $\frac{\frac{d}{dx}(pv')}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}$ et, en même temps, les intégrales dans (34), sont uniformément bornées pour tous les n, j, k, l.

De (34) nous obtenons donc

$$\frac{\lambda_n\,|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2} < \frac{AB}{\lambda_n}, \tag{41}$$

où B est une constante indépendante de n, j, k, l.

En conséquence, étant donné que $\sum\frac{1}{\lambda_n}$ est convergent, la série

$$\sum_n \frac{\lambda_n\,|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2} \tag{42}$$

est uniformément convergente pour tous j, k, k, $l > 1$.

5. Cependant, si nous appliquons le théorème analogue à celui de Parseval pour les fonctions caractéristiques de Sturm-Liouville, nous pouvons exprimer le résultat de la précédente section dans une forme plus générale.

Théorème V. — *Prenons n, μ, l_1, l_2, ..., l_μ comme nombres entiers, soit*

$$y = \varphi_{l_1}(x)\,\varphi_{l_2}(x)\ldots\varphi_{l_\mu}(x), \tag{43}$$

$$f_n = \int_0^\pi y\,\varphi_n(x)\,dx;$$

donc, pour un nombre entier quelconque donné, ν et pour tous les l_1, l_2, ..., $l_\mu \geqq 1$, la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{r-\frac{1}{2}}\,|f_n|}{(\lambda_{l_1}\lambda_{l_2}\ldots\lambda_{l_\mu})^r} \tag{44}$$

est uniformément convergente.

Nous démontrerons ce théorème aussi pour le cas particulier $\mu = 3$, $r = 2$ du paragraphe 4.

Dans la section précédente, nous avons trouvé que, d'après (33), en multipliant par $\sqrt{\lambda_n}$, nous obtenons :

$$(45)\qquad \frac{\lambda_n^{\frac{3}{2}}|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2} < \frac{A}{\sqrt{\lambda_n}}\left\{\int_0^\pi |\varphi_n y|\,dx + \int_0^\pi \left|\varphi_n \frac{v}{\lambda_j\lambda_k\lambda_l}\right| dx + \int_0^\pi \left|\varphi_n \frac{\frac{d}{dx}(pv')}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}\right| dx\right\},$$

où, comme il est montré dans la section précédente, les intégrales sont toutes uniformément bornées pour tous les n, j, k, l.

En prenant la somme, et la portant au carré, et en employant l'inégalité de Schwarz, ainsi que l'inégalité $2ab < a^2 + b^2$, nous obtenons de (45) :

$$(46)\qquad \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{\frac{3}{2}}|f_n|}{(\lambda_j\lambda_k\lambda_l)^2}\right\}^2 < 3A^2\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \times \sum_n \left\{\left(\int_0^\pi \varphi_n y\,dx\right)^2 + \left(\int_0^\pi \varphi_n \frac{v}{\lambda_j\lambda_k\lambda_l}\,dx\right)^2 + \left(\int_0^\pi \varphi_n \frac{\frac{d}{dx}(pv')}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}\right)^2\right\}.$$

Or, si nous remarquons que, en prenant

$$F(x) = \sum_n a_n\,\varphi_n(x), \qquad a_n = \int_0^\pi F(x)\,\varphi_n(x)\,dx,$$

la série $\sum_n a_n^2$ est convergente en raison du théorème de Parseval, nous savons, alors, que

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_n \left(\int_0^\pi \varphi_n y\,dx\right)^2, \quad \sum_n \left(\int_0^\pi \varphi_n \frac{v}{\lambda_j\lambda_k\lambda_l}\,dx\right) \\ \sum_n \left(\int_0^\pi \varphi_n \frac{\frac{d}{dx}(pv')}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}\right)^2 \end{array}\right.$$

sont uniformément convergentes.

De même, puisque la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ est convergente, nous trouvons de (46) que $\left\{\sum_n \frac{\lambda_n^{\frac{3}{2}}|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}\right\}^2$ et, en même temps, $\sum_n \frac{\lambda_n^{\frac{3}{2}}|f_n|}{\lambda_j^2\lambda_k^2\lambda_l^2}$ est uniformément convergent. Ce qui établit le théorème V.