BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI MILLOUX

Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-H. Cartan

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 65-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__65_0>

SUR UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE P. BOUTROUX-H. CARTAN;

PAR M. HENRI MILLOUX

(Bordeaux).

Introduction.

L'étude de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes dans le plan, utilise, avec succès, un théorème de P. Boutroux, limitant l'ensemble des points du plan où un polynome de degré n est inférieur à une quantité donnée. On peut aussi utiliser une propriété plus précise due, après un énoncé intermédiaire proposé par M. André Bloch, à M. Henri Cartan; cette propriété est la suivante :

Soit n points P_i dans le plan. L'ensemble des points M pour lesquels on a l'inégalité

$$\text{produit } \mathrm{MP}_i \leqq h^n.$$

peut être enfermé dans des cercles dont la somme des rayons est inférieure à $2eh$ (1).

L'application de cette proposition à l'étude des fonctions méromorphes *dans un cercle* a conduit à des résultats intéressants, mais d'un ordre de perfection nettement inférieur aux résultats analogues qui concernent les fonctions méromorphes *dans le plan*.

Cette imperfection relative m'a conduit à penser que l'instrument euclidien que constitue le théorème de P. Boutroux-Henri Cartan, n'est pas pleinement approprié à ce genre d'études. Aussi ai-je été amené à donner une transcription non euclidienne de

(1) *Voir* H. CARTAN. *Thèse* [*Sur les systèmes de fonctions holomorphes...* (*Annales de l'École Norm. sup.*, 1928)].

l'énoncé rappelé plus haut. Cette transcription, ainsi que quelques applications utiles à une étude qui sera ultérieurement publiée, fait l'objet du présent article.

1. **Définitions.** — Soit, dans le cercle $|x| = 1$, deux points P et Q, dont la distance non euclidienne est d, et dont les affixes sont x et x'. On sait que l'on a

$$\left| \frac{x - x'}{1 - x\overline{x'}} \right| = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}.$$

Désignons par (x, x') cette quantité $\frac{e^d - 1}{e^d + 1}$. Nous l'appellerons *pseudo-distance non euclidienne* des deux points xx'. Elle est invariante dans toute transformation homographique du cercle $|x| = 1$ sur lui-même. Elle est comprise entre 0 et 1.

Lorsque l'un des points xx' est à l'origine, *la pseudo-distance non euclidienne se réduit alors à la distance euclidienne.*

Le lieu des points Q pour lesquels la pseudo-distance non euclidienne au point fixe P est constante et égale à λ (inférieur à 1) est un cercle dont le centre non euclidien est P ; nous dirons que λ est son *pseudo-rayon non euclidien.* C'est le rayon euclidien du cercle transformé du cercle précédent, lorsqu'on amène P à l'origine, dans une transformation homographique respectant le cercle $|x| = 1$.

2. Considérons deux cercles C et Γ de pseudo-rayons non euclidiens λ et μ, de centres P et M, et tangents entre eux extérieurement. Proposons-nous de comparer la pseudo-distance (MP) à la somme $\lambda + \mu$.

Comme toutes ces quantités sont invariantes dans toute transformation homographique respectant le cercle $|x| = 1$, nous pouvons supposer que P est en O et que M d'affixe x est sur l'axe réel et positif. Soit Q le point de contact, d'affixe positive x'. On a

$$(\mathrm{OQ}) = \mathrm{OQ} = x' = \lambda, \qquad (\mathrm{QP}) = \frac{x - x'}{1 - xx'} = \mu,$$
$$(\mathrm{OP}) = \mathrm{OP} = x = \lambda + \mu(1 - xx'),$$

quantité inférieure à $\lambda + \mu$. D'où la propriété suivante :

Propriété A. — *Soient deux cercles* C *et* Γ *tangents extérieure-*

ment situés dans le cercle $|x| = 1$. *La pseudo-distance de leurs centres non euclidiens est toujours inférieure à la somme de leurs pseudo-rayons.*

Sauf si l'un des cercles se réduit à un point.

Cette propriété est encore valable si C *et* Γ *se coupent;* en effet, amenons C à avoir pour centre l'origine, et Γ à avoir son centre non euclidien ξ sur l'axe réel et positif. Soit Γ' le cercle de même pseudo-rayon que Γ, dont le centre non euclidien ξ' est aussi sur l'axe réel et positif, et tangent extérieurement à Γ : ξ' est évidemment à droite de ξ.

De la propriété A on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ A'. — *Soient trois points* M_1, M_2, M_3 *situés sur l'axe réel, rangés par ordre d'affixes croissantes. Entre leurs pseudo-distances, on a l'inégalité*

$$(M_1 M_3) < (M_1 M_2) + (M_2 M_3).$$

Il en est de même si M_1, M_2, M_3 sont situés sur un cercle orthogonal au cercle fondamental $|x| = 1$.

PROPRIÉTÉ A''. — *Soient deux cercles* C *et* Γ *de pseudo-rayons* λ *et* μ. *Si la pseudo-distance de leurs centres est supérieure à* $\lambda + \mu$ (on suppose $\lambda + \mu$ inférieur à 1), *ces cercles sont extérieurs l un à l'autre.*

PROPRIÉTÉ B. — *Soit* C *un cercle de centre non euclidien* P *et de pseudo-rayon* λ *inférieur à* $\frac{1}{2}$, *et soit* C' *le cercle de même centre non euclidien et de pseudo-rayon double. Tout point* M *situé à l'extérieur ou sur le pourtour de* C' *est à une pseudo-distance de tout point intérieur à* C *ou sur* C, *supérieure à* λ.

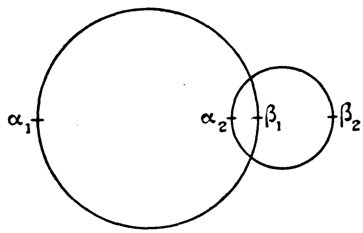
5. Nous utiliserons aussi dans la suite la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ C. — *Soient* C_1 *et* C_2 *deux cercles sécants ou tangents. On peut toujours trouver un cercle* Γ *englobant* C_1 *et* C_2 *et dont le pseudo-rayon soit inférieur à la somme des pseudo-rayons de* C_1 *et* C_2.

Démonstration. — Soient λ_1 et λ_2 les pseudo-rayons de C_1 et C_2. Si $\lambda_1 + \lambda_2$ atteint ou surpasse 1, on a le cercle fondamental $|x| = 1$, qui a pour pseudo-rayon 1. Ce cas n'est pas intéressant, ni celui où C_1 est tangent intérieurement à C_2, cas où l'on peut prendre pour Γ le cercle C_2.

Nous pouvons donc supposer $\lambda_1 + \lambda_2$ inférieur à 1, et C_1 et C_2 sécants ou tangents extérieurement.

Quitte à effectuer une transformation homographique, on peut supposer que les cercles C_1 et C_2 sont centrés sur l'axe réel. Désignons par C_1 le cercle le plus à gauche, et C_2 l'autre cercle; par α_1, β_1 les points de C_1 situés sur l'axe réel; α_2, β_2 ceux de C_2. Ces quatre points se trouvent dans l'ordre α_1, α_2, β_1, β_2.



Nous prendrons comme cercle Γ le cercle centré sur l'axe réel et passant par α_1 et β_2; il englobe C_1 et C_2.

Quitte à effectuer une transformation homographique, on peut supposer le cercle Γ centré en O.

Soient R son rayon, ξ_1 et ξ_2 les centres non euclidiens de C_1 et C_2. On a :

$$-R = \frac{\xi_1 - \lambda_1}{1 - \xi_1 \lambda_1}, \qquad \text{d'où} \quad \xi_1 = \frac{\lambda_1 - R}{1 - \lambda_1 R};$$

$$R = \frac{\lambda_2 + \xi_2}{1 + \xi_2 \lambda_2}, \qquad \text{d'où} \quad \xi_2 = \frac{R - \lambda_2}{1 - \lambda_2 R}.$$

Écrivons que β_1 a une affixe supérieure ou égale à celle de α_2.

$$\frac{\xi_2 - \lambda_2}{1 - \lambda_2 \xi_2} \leqq \frac{\xi_1 + \lambda_1}{1 + \lambda_1 \xi_1}$$

et en transcrivant en R

$$[R(1+\lambda_2^2) - 2\lambda_2][(1+\lambda_1^2) - 2\lambda_1 R] \leqq [2\lambda_1 - R(1+\lambda_1^2)][(1+\lambda_2^2) - 2R\lambda_2].$$

Ou

$$R^2(\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2) - R[(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2) + 4\lambda_1\lambda_2] + (\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2) \geqq 0.$$

Il s'agit de démontrer que l'on a : $R < \lambda_1 + \lambda_2$.

Remarquons que le trinome précédent, en R, a deux racines inverses et positives. Comme R est inférieur à 1, l'inégalité, trinome positif ou nul signifie que R est inférieur à la plus petite racine.

Si le résultat de la substitution de $\lambda_1 + \lambda_2$ à la place de R dans le trinome donne un résultat négatif, c'est que $\lambda_1 + \lambda_2$ est supérieur à la plus petite racine. Donc R sera inférieur à $\lambda_1 + \lambda_2$.

Il nous reste à vérifier que l'on a

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^3 (1 + \lambda_1 \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) [(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2) + 4\lambda_1 \lambda_2] + (\lambda_1 + \lambda_2)(1 + \lambda_1 \lambda_2) \leqq 0.$$

Toutes réductions faites, il vient

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \leqq 1 + \lambda_1 \lambda_2.$$

Cette dernière inégalité est évidente, puisque déjà $\lambda_1 + \lambda_2$ est inférieur ou égal à 1. Ce qui démontre la propriété C.

Corollaire C. — *Supposons une chaîne de cercles* $C_1\, C_2 \ldots, C_p$ *se coupant les uns les autres deux à deux. On pourra toujours trouver un cercle* Γ *unique englobant tous ces cercles, et dont le pseudo-rayon est inférieur à la somme des pseudo-rayons des cercles de la chaîne.*

Il suffit d'appliquer la propriété C de proche en proche.

4. Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant, traduction non euclidienne du théorème de Henri Cartan :

Soient n points P_i *intérieurs au cercle* $|x| = 1$. *L'ensemble* E *des points* M *pour lesquels on a l'inégalité*

$$\text{produit } (MP_i) < h^n$$

peut être enfermé dans des cercles (intérieurs au cercle $|x| = 1$*) et dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à* $2eh$.

Nous supposerons $2eh$ inférieur à 1, de façon que dans le cas le plus défavorable, l'ensemble E ne couvre pas tout le cercle $|x| = 1$.

La démonstration qui va suivre est presque identique à la démonstration de M. H. Cartan, dans l'espace euclidien. Mais comme il n'y a pas identité partout, je préfère reproduire tous les points de cette démonstration.

Premier cas. — Il existe une circonférence C de pseudo-rayon h contenant tous les points P_i à son intérieur.

Traçons alors la circonférence C' de même centre non euclidien et de pseudo-rayon double. D'après la propriété B du n° 2, tous les points M extérieurs à C' sont à des pseudo-distances des points P_i supérieures à h, de sorte que l'ensemble E est certainement inclus dans l'unique cercle C'.

Deuxième cas. — Soit λ_1 le plus grand entier tel qu'il existe un cercle C_{λ_i} de pseudo-rayon $\frac{\lambda_1 eh}{n}$ contenant λ_1 points P_i. λ_1 est inférieur à n mais supérieur ou égal à 1. Écartons des P_i ceux qui sont intérieurs à C_{λ_1}; soit $P^{(1)}$ les points restants ; λ_2 le plus grand entier (inférieur ou égal à λ_1) tel qu'il existe un cercle C_{λ_2} de pseudo-rayon $\frac{\lambda_2 eh}{n}$ contenant λ_2 points $P^{(1)}$, et ainsi de suite. Au bout de p opérations (au plus n) on a épuisé tous les points P_i.

Remarque fondamentale. — S'il existe un cercle Γ de pseudo-rayon inférieur ou égal à $\frac{\lambda eh}{n}$ (λ entier inférieur à n) contenant au moins λ points P_i, l'un de ces points P_i est aussi déjà intérieur à un C_{λ_i} dont l'indice λ_i est supérieur ou égal à λ; sinon la construction des C_{λ_i} eût été mal faite. Construisons les cercles $C'_{\lambda i}$ de mêmes centres non euclidiens que les $C_{\lambda i}$ et de pseudo-rayons doubles. La somme des pseudo-rayons de ces cercles C' est

$$\frac{2eh}{n}[\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p] = 2eh.$$

Démontrons le lemme suivant

Lemme. — *Soit* M *un point extérieur aux cercles* C', *ou situé sur ces cercles. Dans la circonférence* Γ *de centre non euclidien* M *et de pseudo-rayon* $\frac{\lambda eh}{n}$ (λ *entier*) *il y a au plus* $(\lambda - 1)$ *points* P_i.

Supposons, en effet, qu'il y en ait au moins λ. D'après la remarque fondamentale, la circonférence serait sécante à un cercle C_{λ_i}, avec λ_i supérieur ou égal à λ. Soit P_i le centre non euclidien de ce cercle. La pseudo-distance $(P_i M)$ est, par construction, supérieure ou égale à $2\lambda_i$. Donc la pseudo-distance de M au cercle C_{λ_i} est, d'après la propriété B du n° 2, supérieure ou égale à λ_i. Ceci interdit au cercle Γ de couper C_{λ_i}, ou même de lui être tangent.

Le lemme est donc démontré.

Rangeons les P_i par ordre de pseudo-distance croissante à partir de M. Il n'y en a pas à moins de $\frac{eh}{n}$; 1 au plus à moins de $\frac{2eh}{n}$, etc.

Par suite

$$\text{produit}(MP_i) > (eh)^n \frac{n!}{n^n} > h^n.$$

Donc l'ensemble E est nécessairement inclus dans les cercles $C'_{\lambda i}$, dont la somme des pseudo-rayons vaut $2eh$, ce qui démontre le théorème.

5. **Remarque.** — Si certains des cercles C′ se coupent, d'après le corollaire C, on pourra les remplacer par un cercle unique les englobant : on ne fait que diminuer la somme des pseudo-rayons.

Donc on peut dire que *l'ensemble* E *est inclus dans des cercles tous extérieurs les uns aux autres, et dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à* $2eh$. Ces cercles sont en nombre au plus égal à n.

6. Pseudo-mesure non euclidienne. — *Un ensemble de points* Q *est dit de pseudo-mesure non euclidienne* μ *si, étant donnée une quantité positive* ε, *on peut enfermer les points* Q *dans un nombre fini de cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure ou égale à* $\mu + \varepsilon$. *Il ne doit pas être possible de diminuer* μ.

Ainsi le théorème du n° 4 montre que *l'ensemble* E *de points* M *pour lesquels on a*

$$\text{produit}(MP_i) \leqq h^n$$

est de pseudo-mesure inférieure à $2eh$.

7. Voici quelques propriétés évidentes de la pseudo-mesure :

a. Si les points Q sont en nombre fini ou en infinité dénombrable, leur pseudo-mesure est nulle.

b. La pseudo-mesure d'un ensemble somme est supérieure ou égale à la pseudo-mesure de chacun des ensembles composants, et inférieure ou égale à la somme de ces pseudo-mesures.

c. Si les points Q *forment un ensemble continu* D, *leur pseudo-mesure est le plus petit des pseudo-rayons des cercles englobant* D.

Démonstration. — D'après b, la pseudo-mesure μ de D est inférieure ou égale à ce pseudo-rayon ρ. D'autre part, envisageons une suite de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ englobant tous les points de D. Du fait de la continuité de D, ces cercles constituent une chaîne. D'où possibilité d'application du corollaire C, avec remplacement de tous ces cercles par un cercle unique Γ de pseudo-rayon ρ', de sorte que l'on a

$$\rho' < \mu + \varepsilon.$$

Donc $\mu + \varepsilon$ est supérieur au pseudo-rayon d'un certain cercle englobant tout D et par suite supérieur à ρ. D'où la propriété c.

8. **Applications.** — 1° La pseudo-mesure d'un cercle est le pseudo-rayon de ce cercle.

2° Étant donné un ensemble continu Δ joignant deux points A et B, sa pseudo-mesure n'est pas inférieure au plus petit pseudo-rayon du cercle englobant A et B. Par une transformation homographique, on peut amener A et B sur l'axe réel et positif. Le cercle en question admet alors AB comme diamètre. Soit R son pseudo-rayon, D son pseudo-diamètre, c'est-à-dire la pseudo-distance (AB). R et D sont liés par une relation indépendante d'une transformation homographique respectant le cercle unité : il suffit, pour l'avoir, de supposer le cercle centré à l'origine, d'où immédiatement :

$$D = \frac{2R}{1 + R^2}.$$

Inversement, on a

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - D^2}}{D} = \frac{D}{1 + \sqrt{1 - D^2}}.$$

D'où le résultat suivant, indépendant de la position de A et B :

Si un ensemble continu Δ *contient deux points* A *et* B, *sa pseudo-mesure n'est pas inférieure à la quantité*

$$\frac{(AB)}{1 + \sqrt{1 - [(AB)]^2}}$$

fonction de la pseudo-distance (AB) *des deux points. Cette fonction est exactement la pseudo-mesure lorsque, en particulier, les points* A *et* B *sont les points d'affixes positives* r' *et* r''. *Elle est égale à*

$$\frac{r''-r'}{1-r'r''+\sqrt{(1-r'r'')^2-(r''-r')^2}},$$

et, par suite, se trouve comprise entre $\frac{r''-r'}{1-r'r''}$ et sa moitié.

9. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème suivant :

Un ensemble E *de pseudo-mesure inférieure à* $2eh$ *peut-il traverser la couronne circulaire*

$$r' < |x| < r''.$$

Les circonstances les plus favorables pour cette traversée se présentent lorsque tous les points de E sont alignés sur le même rayon issu de O. On peut les créer en soumettant chaque point de E à une rotation autour de O, de façon à l'amener sur l'axe réel et positif. Soit E_1 l'ensemble ainsi obtenu. *Sa pseudo-mesure est inférieure ou égale à celle de* E, car à chaque groupe de cercles englobant les points de E correspond un groupe analogue englobant E_1, et se déduisant du premier par des rotations autour de O, ce qui ne change pas les pseudo-rayons.

Or, il n'est pas possible que E_1 occupe tout le segment $r' \leqq x \leqq r''$, si l'on a

$$\frac{r''-r'}{1-r'r''+\sqrt{(1-r'r'')^2-(r''-r')^2}} \geqq 2eh,$$

ou plus simplement si l'on a

$$\frac{r''-r'}{1-r'r''} \geqq \frac{4eh}{1+4e^2h^2}.$$

Ce qui est réalisé si l'on prend

$$1-r' \geqq (1-r'')\left[\frac{1+2eh}{1-1eh}\right]^2.$$

10. Revenons à l'ensemble E : puisque l'ensemble E_1 laisse

échapper au moins un point du segment $r'r''$, l'ensemble E laissera échapper tout le cercle de centre O passant par ce point. D'où l'énoncé suivant :

Soit E un ensemble de points de pseudo-mesure inférieure à $2eh$. *Toute couronne circulaire*

$$r' \leqq |x| \leqq r''$$

satisfaisant à la condition

$$1 - r' \geqq (1 - r'')\left[\frac{1+2h}{1-2h}\right]^2$$

contiendra au moins un cercle de centre O, *dont tous les points appartiennent à l'ensemble* E' *complémentaire de* E (1).

Exemple : l'ensemble E est l'ensemble de points M satisfaisant à

$$\text{produit } (\mathrm{MP}_i) \leqq h^n.$$

On pourrait étudier de la même façon les rayons issus de O ; à condition de supprimer de ces rayons la portion située à l'intérieur du cercle $|x| = 2h$, on montre également l'impossibilité pour E d'avoir au moins un point sur chaque rayon.

11. Reprenons l'ensemble E relatif aux points P_i. Désignant par $a_1, \ldots, a_n$ les affixes de ces points P, par $f(x)$ la fonction

$$f(x) = \frac{(x-a_1), \ldots, (x-a_n)}{(1-x\bar{a}_1), \ldots, (1-x\bar{a}_n)},$$

l'ensemble E satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| \leqq h^n.$$

La fonction $f(x)$ est holomorphe dans le cercle fondamental : donc l'*ensemble* E *est composé uniquement de domaines simplement connexes.*

Autrement dit *l'ensemble* E' *complémentaire de* E *est d'un seul tenant :* on peut joindre deux points quelconques de E' par une ligne continue sans quitter E'.

---

(1) Et même, d'une façon plus précise, dont tous les points sont situés hors des cercles appelés *cercles d'exclusion;* ce sont les cercles englobant E et dont la somme des rayons est inférieure à $2eh$.

Remarquons que cette propriété est déjà évidente si l'on substitue à l'ensemble D' l'ensemble plus réduit extérieur aux cercles d'exclusion dont il a été question au n° 5 : rappelons que ces cercles englobent E et sont extérieurs les uns aux autres.

12. Quelle est la longueur euclidienne la plus courte joignant deux points A et B quelconques hors des cercles d'exclusion englobant E ?

On joint A et B par une ligne droite, et si l'on rencontre les cercles d'exclusion, on les évite en les contournant; la somme de leurs pseudo-rayons est inférieure à $2eh$.

Nous sommes conduits à rechercher une relation entre le rayon euclidien r d'un cercle et son pseudo-rayon λ. Amenant le centre non euclidien x sur l'axe réel et positif, on trouve :

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 \lambda^2} < 1.$$

Donc la somme des longueurs euclidiennes des circonférences englobant E est inférieure à $4eh\pi$.

Résumons : *soit* E *l'ensemble des points* M *où l'on a*

$$\text{produit}\,(\mathrm{MP}_i) < h^n.$$

Étant donnés deux points A *et* B *hors des cercles d'exclusion englobant* E, *on peut joindre* A *et* B *par une ligne continue* L *sans entrer dans les cercles d'exclusion; la longueur euclidienne de* L *est inférieure à* $2[1 + \pi e h]$.

Si A est en O, on peut remplacer cette dernière expression par $1 + 2\pi eh$.

13. Dans un Mémoire qui sera prochainement publié, nous utiliserons les propriétés précédentes dans l'étude des fonctions méromorphes dans un cercle. Un résumé des résultats fondamentaux de cette étude a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 4 mai 1936.