ANTOINE APPERT

Réflexions sur une note de M. Bouligand « Problèmes bien posés et problèmes à conditions surabondantes »

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 76-82
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__76_0>

RÉFLEXIONS SUR UNE NOTE DE M. BOULIGAND
« Problèmes bien posés et problèmes à conditions surabondantes »
(*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 5, 1936, p. 116-120)

PAR M. ANTOINE APPERT.

I. Les intéressantes remarques de M. Bouligand ([1]) sur le rôle des concepts de l'*Analyse générale* de M. Fréchet dans la comparaison de diverses classes de problèmes infinis au point de vue de l'existence et de l'unicité de leurs solutions, nous ont amené aux réflexions qui font l'objet du présent Mémoire.

Nous montrerons que les hypothèses de M. Bouligand (Note citée, p. 117) concernant les propriétés topologico-métriques de la correspondance données-solutions dans une telle classe de problèmes, ne doivent pas être disjointes de la *continuité* de cette correspondance, si l'on veut s'éviter des surprises. Cette préoccupation de continuité, qui n'était nullement absente de la pensée de M. Bouligand, comme le montre son intention de définir un « continu abstrait » de solutions (Note citée, p. 117), nous a paru appeler des remarques plus explicites ([2]). Nous serons ainsi amené à rejoindre des travaux récents concernant les modes de continuité des fonctions *multiformes*.

II. Considérons une classe π de problèmes P. Nous supposons que, pour chaque problème P de π, on a donné un sens précis à l'expression « solution » de P, un problème P de π pouvant d'ailleurs éventuellement admettre zéro, une ou tout un ensemble de solutions. Il revient au même de dire que la *solution* S(P) *de* P est une fonction, *éventuellement multiforme*, définie sur π *sauf*

([1]) Note citée ci-dessus et *Mathematica*, t. XII, 1936, p. 146–159.

([2]) D'ailleurs, après échange de vues, nous nous sommes trouvé d'accord avec l'Auteur.

peut-être pour certains éléments de π. Nous envisagerons alors, avec M. Bouligand (Note citée, p. 117), les hypothèses suivantes :

a. L'ensemble π est *distancié* et *complet en soi* (¹). De plus, on connaît une suite infinie dénombrable $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ d'éléments de π jouissant des deux propriétés suivantes : *chaque élément de* π *est limite d'une suite infinie convergente dont les termes sont des* P_n. *Chaque* P_n *a une solution unique*, autrement dit $S(P_n)$ a toujours une et une seule détermination.

b. Les *solutions* des divers problèmes de π appartiennent toutes à un certain ensemble *distancié* Σ.

c. Il existe un ensemble H jouissant des propriétés suivantes : *tout élément de* H *est une solution d'un problème de* π (ceci entraîne que $H \subset \Sigma$). H *est complet en soi*. H *contient toutes les solutions* $S(P_n)$ *de tous les problèmes* P_n. *Tout élément de* H *est limite d'une suite infinie de solutions* $S(P_n)$.

d. *Si une suite infinie* P_{n_r} *de problèmes* P_n *vérifie le critère de convergence de Cauchy, alors la suite* $S(P_{n_r})$ *des solutions des* P_{n_r} *vérifie aussi ce critère.*

Ceci étant, le but de M. Bouligand était d'obtenir, à partir des hypothèses précédentes, une *conclusion d'existence et d'unicité* de la solution $S(P)$ pour les problèmes P de π autres que les P_n. Indiquons tout d'abord que si, faisant abstraction de la préoccupation de continuité de l'auteur mentionnée plus haut, on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur $S(P)$, une telle conclusion n'est pas permise. Ceci résulte de l'exemple suivant :

Considérons une fonction $S(P)$ définie et univoque pour tous les éléments P de π et telle que les hypothèses *a*, *b*, *c*, *d* soient vérifiées. Soient alors P' et P'' deux éléments de π n'appartenant pas à la suite des P_n et tels que $S(P') \neq S(P'')$. Nous appellerons $S^*(P)$ une fonction non définie en P', ayant en P'' les deux déterminations $S(P')$ et $S(P'')$ et coïncidant avec $S(P)$ pour tous les

(¹) Nous disons qu'un ensemble distancié π est *complet en soi* si la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie d'éléments de π converge vers un élément *appartenant à* π, est que cette suite vérifie le critère de convergence de Cauchy.

autres éléments de π. Il est visible que $S^*(P)$, quoique non uniforme et non toujours définie sur π, vérifie les conditions a, b, c, d.

III. Pour formuler convenablement l'hypothèse de continuité supplémentaire dont l'exemple précédent montre la nécéssité, nous rappellerons les définitions suivantes :

Nous envisagerons comme plus haut une fonction $S(P)$ éventuellement multiforme et éventuellement non toujours définie pour les points P d'un certain ensemble disancié π, les diverses valeurs (ou déterminations) de $S(P)$ étant supposées appartenir toutes à un certain ensemble distancié Σ indépendant de P. Alors nous appellerons *accumulatif* (¹) de $S(P)$ en un point P^* de π l'ensemble :

$\mathcal{A}_s(P^*) =$ ensemble de tous les éléments z de Σ tels qu'il existe une suite infinie $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(m)}, \ldots$ de points, distincts de P^* et appartenant à π, et une suite infinie $s(P^{(1)}), s(P^{(2)}), \ldots, s(P^{(m)}), \ldots$, chaque $s(P^{(m)})$ étant une détermination de $S(P^{(m)})$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} P^{(m)} = P^* \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to\infty} s(P^{(m)}) = z.$$

On dira que $S(P)$ jouit sur π de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ [semi-continuité supérieure d'inclusion au sens de M. Bouligand (²)] si, en chaque point P de π, on a $\mathcal{A}_s(P) \subset$ ensemble des déterminations de $S(P)$ au point P.

On dira que $S(P)$ jouit sur π de la $\underline{\text{S. C. I.}}$ [semi-continuité inférieure d'inclusion au sens de M. E. Blanc (³)] si, en chaque point P de π, on a $\mathcal{A}_s(P) \supset$ ensemble des déterminations de $S(P)$ au point P.

D'autre part, nous appellerons *accumulatif au sens strict* de $S(P)$ en un point P^* de π l'ensemble :

$\mathcal{L}_s(P^*) =$ ensemble de tous les éléments z de Σ tels que, pour chaque nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les hypothèses

$$P \in \pi, \qquad \text{distance } PP^* < \eta$$

(¹) Avec M. Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, Bruxelles, Hayez, 1933, p. 67.

(²) *Ibid.*, p. 67.

(³) *Ibid.*, p. 71.

entraînent l'existence d'une détermination de $S(P)$ dont la distance à z est $< \varepsilon$.

On dira que $S(P)$ jouit sur π de la $\underline{\underline{\text{S. C. I.}}}$ [semi-continuité inférieure d'inclusion au sens de M. Kuratowski [1]] si, en chaque point P de π on a $\mathcal{L}_s(P) \supset$ ensemble des déterminations de $S(P)$ au point P.

Ces définitions étant admises, nous démontrerons le théorème suivant qui met en évidence l'hypothèse de continuité cherchée.

Théorème I. — *Si* $S(P)$ *satisfait aux hypothèses* a, b, c, d, *et si de plus* $S(P)$ *jouit sur* π *à la fois de la* $\overline{\text{S. C. I.}}$ *et de la* $\underline{\underline{\text{S. C. I.}}}$, *alors* $S(P)$ *a toujours une et une seule détermination en chaque point* P *de* π.

En effet, par hypothèse la conclusion est exacte pour les points P_n. Soit donc P^* un point de π distinct des P_n, et soit $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_r}, \ldots$ une suite infinie de P_n convergeant vers P^*. Alors, en vertu de d, la suite $S(P_{n_r})$ vérifie le critère de convergence de Cauchy. Donc, en vertu de c, la suite $S(P_{n_r})$ converge vers un élément z_1 de Σ. Donc $z_1 \in \mathcal{C}\!\ell_s(P^*)$; par conséquent z_1 est une détermination de $S(P^*)$.

Soit maintenant z une détermination quelconque de $S(P^*)$. Par hypothèse $z \in \mathcal{L}_s(P^*)$. Donnons-nous alors un nombre positif ε aussi petit que l'on veut; il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'hypothèse que distance $P_{n_r}P^* < \eta$ entraîne que distance $S(P_{n_r})z < \varepsilon$. Nous pouvons prendre r assez grand pour que l'on ait à la fois distance $P_{n_r}P^* < \eta$ et distance $S(P_{n_r})z_1 < \varepsilon$. On a donc distance $zz_1 < 2\varepsilon$; d'où $z = z_1$. C. Q. F. D.

Montrons sur un exemple que *le théorème* I *précédent cesse d'être exact si l'on y remplace la* $\underline{\underline{\text{S. C. I.}}}$ *par la* $\underline{\text{S. C. I.}}$ Pour cela prenons comme ensemble π l'intervalle fermé $(0, 1)$ et comme ensemble Σ ce même intervalle fermé. Prenons comme P_n les nombres rationnels appartenant à cet intervalle. On sait que l'on peut définir un ensemble parfait non vide $\mathcal{H}$ appartenant à $(0, 1)$ et ne contenant aucun point rationnel. Alors nous appellerons $S^{**}(P)$ une fonction ayant sur $\pi - \mathcal{H}$ l'unique détermination P,

---

[1] *Ibid.*, p. 72.

et ayant sur $\mathcal{H}$ les deux déterminations P et 1. On vérifie sans peine que *la fonction* $S^{**}(P)$ *satisfait aux hypothèses a, b, c, d, jouit à la fois sur* π *de la* $\overline{\text{S. C. I.}}$ *et de la* $\underline{\text{S. C. I.}}$ (autrement dit coïncide en chaque point de π avec son accumulatif), *et cependant cette fonction n'est pas uniforme sur* π.

IV. Pourtant les hypothèses *a*, *b*, *c*, *d* prises à elles seules permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si* $S(P)$ *satisfait aux hypothèses a, b, c, d, alors il existe une et une seule fonction* $\mathfrak{S}_0(P)$ *ayant une détermination unique en chaque point* P *de* π, *ne prenant que des valeurs appartenant à* Σ, *continue* (au sens usuel) *sur* π, *et coïncidant avec* $S(P_n)$ *pour chaque* P_n. (On pourra dire que cette fonction $\mathfrak{S}_0(P)$ fournit la *meilleure* définition, relativement aux métriques adoptées, du sens de l'expression « solution de P », quand on s'est donné une fois pour toutes les solutions des P_n.)

En effet, soit P un point quelconque de π, et soit P_{n_r} une suite infinie de P_n convergeant vers P. En vertu de *d*, la suite $S(P_{n_r})$ vérifie le critère de convergence de Cauchy; donc, en vertu de *c*, cette suite $S(P_{n_r})$ converge vers un élément z de Σ. Nous poserons, par définition, $\mathfrak{S}_0(P) = z$. Soit maintenant P_{m_r} une autre suite infinie de P_n convergeant vers P. Alors la suite P_{n_1}, P_{m_1}, P_{n_2}, P_{m_2}, ..., P_{n_r}, P_{m_r}, ... converge vers P, et par conséquent la suite $S(P_{n_1})$, $S(P_{m_1})$, ..., $S(P_{n_r})$, $S(P_{m_r})$, ... converge vers un élément unique de Σ. Donc $\mathfrak{S}_0(P)$ ne dépend que de P et non de la suite P_{n_r} choisie. On vérifie de suite que $\mathfrak{S}_0(P)$ est une fonction répondant à la question, et l'hypothèse *a* montre que c'est la seule.

C. Q. F. D.

V. Le problème résolu par le théorème II est un problème de prolongement fonctionnel. Il est intéressant de traiter un tel problème dans des cas plus généraux, le prolongement $\mathfrak{S}_0(P)$, éventuellement multiforme, étant en quelque sorte le plus continu possible. Dans cet ordre d'idées nous établirons la proposition suivante :

Théorème III. — *Soient* π *un espace distancié dense en soi et* Σ

un espace distancié quelconque, soit N *un sous-ensemble quelconque* (dénombrable ou non) *de* π *tel que* π *coïncide avec la fermeture* $\overline{\mathrm{N}}$ *de* N. *Soit de plus une fonction* S(P) *définie et univoque pour chaque point* P *de* N *dont les valeurs appartiennent à* Σ, *et qui soit continue* (au sens usuel) *sur* N.

Alors il existe toujours une (mais non nécessairement une seule) fonction $\mathfrak{S}$ (P) *éventuellement multiforme et éventuellement non toujours définie pour les points* P *de* π, *dont toutes les valeurs appartiennent à* Σ, *jouissant à la fois sur* π *de la* $\overline{\text{S. C. I.}}$ *et de la* $\underline{\text{S. C. I.}}$, *et ayant en chaque point* P *de* N *l'unique détermination* S(P). *De plus, parmi les fonctions* $\mathfrak{S}$(P) *satisfaisant aux conditions précédentes, il en existe une seule* $\mathfrak{S}_0$(P), *qui est en quelque sorte la moins multiforme possible, nous voulons dire qui est incluse dans toutes les autres* [nous disons qu'une fonction $\mathfrak{S}_0$(P) est *incluse* dans une $\mathfrak{S}$(P) si, pour chaque point P de π, l'ensemble des déterminations de $\mathfrak{S}_0$(P) est inclus dans l'ensemble des déterminations de $\mathfrak{S}$(P)].

En effet, posons, pour chaque point P de π, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{P}) =$ ensemble de tous les éléments z de Σ tels qu'il existe une suite infinie $\mathrm{P}^{(1)}, \ldots, \mathrm{P}^{(m)}, \ldots$ de points de N convergeant vers P et telle que $\lim\limits_{m \to \infty} \mathrm{S}(\mathrm{P}^{(m)}) = z$.

On vérifie sans peine que cette fonction $\mathfrak{S}_0$(P) est une fonction $\mathfrak{S}$(P) satisfaisant aux conditions du théorème III. Elle est incluse dans toute autre fonction $\mathfrak{S}$(P) satisfaisant aux mêmes conditions, en vertu de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ Enfin, le fait que cette fonction $\mathfrak{S}_0$(P) n'est pas nécessairement la seule $\mathfrak{S}$(P) satisfaisant aux conditions du théorème III, résulte de l'exemple de la fonction $\mathrm{S}^{**}(\mathrm{P})$ définie plus haut. C. Q. F. D.

Si π est une classe de problèmes *infinis* P, et N la sous-classe des problèmes P *finis* (se ramenant à la résolution d'un système fini d'équations algébriques linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues) ayant chacun une solution unique S(P) continue sur N, alors $\mathfrak{S}_0$(P), qui est la fonction *continue d'inclusion* (¹) la

---

(¹) Il paraît commode d'appeler *continue d'inclusion* une fonction jouissant à la fois de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ et de la $\underline{\text{S. C. I.}}$, c'est-à-dire coïncidant en chaque point avec moins multiforme possible se réduisant à $S(P)$ pour les problèmes finis, pourra encore être considérée comme fournissant la ***meilleure*** définition du sens de l'expression « solution de P ». On pourra dire que la classe π est une classe de problèmes ***normalement posés*** si l'ensemble des solutions d'un problème quelconque P de π est précisément $\mathfrak{S}_0(P)$. Dans une classe de problèmes normalement posés, la prévision des cas d'impossibilité et d'indétermination peut se faire rigoureusement d'après la connaissance des solutions des problèmes finis.

Remarquons pour terminer que si la fonction $\mathfrak{S}_0(P)$ introduite par le théorème III est effectivement multiforme, alors aucune $\mathfrak{S}(P)$ satisfaisant aux conditions du théorème III ne peut jouir sur π de la S. C. I.

---

son accumulatif $\mathfrak{a}$. Cette notion paraît suffisamment importante pour mériter un nom spécial. Il résulte de la définition de cette notion que l'ensemble des déterminations d'une fonction continue d'inclusion est nécessairement vide en tout point où l'accumulatif de cette fonction est vide.