BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

Sur les postulats qui sont à la base des cinématiques

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 83-99
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__83_0>

SUR LES POSTULATS QUI SONT A LA BASE DES CINÉMATIQUES;

Par M. V. Lalan.

Dans la détermination des cinématiques, nous suivrons un ordre différent de celui qui est généralement adopté. Ayant postulé que les formules qui traduisent le changement de système de référence sont celles d'un groupe (du moins lorsqu'on se borne à l'espace-temps à deux dimensions), nous nous efforcerons d'épuiser le contenu de ce postulat et, ce faisant, nous trouverons toute une variété de formules qui résolvent apparemment le problème. Nous n'aurons jamais besoin de faire appel explicitement aux principes de relativité et de réciprocité, parce que ce qu'ils renferment de fécond est inclus dans la notion même de groupe. Cette méthode a l'avantage de nous prémunir contre le danger d'exagérer la portée de ces principes; il arrive qu'on en tire des conséquences qu'ils ne justifient pas à eux seuls (1).

I.

Nous devons montrer en premier lieu que le changement de système de référence peut s'exprimer par un groupe linéaire. Nous appellerons pour abréger *opération* (C) un changement de référentiel qui conserve l'origine d'espace-temps; il faut donc établir que l'opération (C) peut s'exprimer par un groupe linéaire et homogène.

On invoque ordinairement à ce propos *l'homogénéité de l'espace-temps*. Cela demande à être précisé.

Quelque hypothèse qu'on fasse sur la nature de l'espace-temps, il est toujours loisible de faire agir dans cette variété un groupe quelconque. C'est la nature de l'opération à représenter qu'il

(1) Un résumé de ce travail a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 203, 1936, p. 1491.

importe d'examiner, et aussi le genre de variables que l'on se propose d'utiliser, car un groupe change de forme quand on change de variables.

Nous caractériserons les variables x, t par la façon dont elles se transforment quand on change d'origine dans l'espace-temps. Les changements d'origine dans l'espace-temps (à deux dimensions, par hypothèse) sont des opérations dont l'ensemble constitue un groupe à deux paramètres. Ce groupe est abélien, car les changements d'origine sont permutables deux à deux; en conséquence, il peut s'écrire, grâce à un choix convenable des variables

$$u' = u - u_0, \qquad v' = v - v_0. \tag{1}$$

Le choix des variables donnant au groupe cette forme n'est défini qu'à une substitution linéaire près; il nous suffit pour le moment de savoir que x et t sont l'un des systèmes de variables qui se transforment suivant les formules (1) quand on change l'origine d'espace-temps.

Le genre des variables employées étant ainsi précisé, nous postulons que l'opération (C) jouit de la propriété suivante: *si, avant d'effectuer l'opération* (C), *on change l'origine du système* S, *il est possible de ramener l'expression de l'opération* (C) *à sa forme primitive en effectuant un changement d'origine convenable dans le système* S'.

Appelant T_0 et $T_{0'}$ les deux changements d'origine, la propriété définie ci-dessus s'exprime par la formule

$$T_{0'} C T_0 = C \tag{2}$$

ou

$$T_{0'}^{-1} = C T_0 C^{-1}, \tag{2'}$$

ce qui signifie que *le groupe des changements d'origine est invariant par toute opération* (C). Représentons l'opération (C) par

$$x' = f(x, t, v), \qquad t' = g(x, t, v); \tag{3}$$

la formule (2) donne les relations

$$\begin{cases} f(x - x_0, t - t_0, v) - x'_0 = f(x, t, v), \\ g(x - x_0, t - t_0, v) - t'_0 = g(x, t, v), \end{cases} \tag{4}$$

d'où l'on déduit aussitôt la forme linéaire de f et g par rapport à x et t.

En tenant compte de ce que v représente la vitesse par rapport à S d'un point quelconque fixe dans S', l'opération (C) (qui conserve l'origine par définition) sera de la forme

$$x' = \alpha(v)(x - vt), \qquad t' = \beta(v)x + \gamma(v)t. \tag{5}$$

Lorsque les fonctions α, β et γ auront été déterminées pour que ces équations représentent un groupe, nous appellerons *opération* (Γ) tout changement de repérage de l'espace-temps s'exprimant par (5).

Si l'on s'en tient à la définition habituelle, une opération (Γ) est un changement de système de référence, puisque, dans cette opération, un point quelconque de S' a la vitesse v par rapport à S. Nous aurons à formuler des conditions supplémentaires, afin d'écarter la plupart des opérations (Γ) et de ne conserver que les deux cinématiques communément admises. Pour le moment, nous déterminerons toutes les opérations (Γ).

II.

Dans les formules (5), la transformation identique correspond à $v = 0$; donc

$$\alpha = 1 + \lambda v + \ldots, \qquad \beta = \mu v + \ldots, \qquad \gamma = 1 + \rho v + \ldots \qquad (\lambda, \mu, \rho, \text{const.}),$$

et les équations différentielles s'écrivent, en introduisant un paramètre canonique φ

$$\frac{dx'}{d\varphi} = \lambda x' - t', \qquad \frac{dt'}{d\varphi} = \mu x' + \rho t';$$

il s'agit d'intégrer avec $x' = x$, $t' = t$ pour $\varphi = 0$.

Trois cas sont à distinguer, selon que les racines de l'équation caractéristique

$$r^2 - (\lambda + \rho)r + \mu + \lambda\rho = 0 \tag{6}$$

sont distinctes et réelles, confondues, ou imaginaires.

Premier cas : $(\lambda-\rho)^2+4\mu>0$. — **L'équation a deux racines réelles :** r_1, r_2. **Les équations finies du groupe s'écrivent alors**

$$(7)\quad \begin{cases} (r_2-r_1)x = [(\lambda-r_1)e^{r_2\varphi}-(\lambda-r_2)e^{r_1\varphi}]x+(e^{r_2\varphi}-e^{r_1\varphi})t, \\ (r_2-r_1)t' = \mu(e^{r_2\varphi}-e^{r_1\varphi})x+[(\lambda-r_1)e^{r_1\varphi}-(\lambda-r_2)e^{r_2\varphi}]t. \end{cases}$$

Le paramètre v est lié au paramètre canonique φ par

$$(8)\qquad v=\frac{e^{(r_2-r_1)\varphi}-1}{(\lambda-r_1)e^{(r_2-r_1)\varphi}-(\lambda-r_2)},$$

ou

$$(8')\qquad e^{(r_2-r_1)\varphi}=\frac{1-v(\lambda-r_2)}{1-v(\lambda-r_1)}.$$

La loi de composition $\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2$ s'écrit, avec le paramètre v

$$(9)\qquad \frac{1-v_3(\lambda-r_2)}{1-v_3(\lambda-r_1)}=\frac{1-v_1(\lambda-r_2)}{1-v_1(\lambda-r_1)}\,\frac{1-v_2(\lambda-r_2)}{1-v_2(\lambda-r_1)},$$

ou, en résolvant

$$(10)\qquad v_3=\frac{v_1+v_2-(\lambda-\rho)v_1v_2}{1-\mu v_1v_2}.$$

D'après cette formule, certaines vitesses sont remarquables en ceci que, composées avec une vitesse quelconque, elles restent invariantes ; ce sont celles qui vérifient l'équation

$$(11)\qquad \mu c^2-(\lambda-\rho)c+1=0.$$

Remarquons qu'on passe de cette équation à l'équation caractéristique (6) en posant $c=\frac{1}{\lambda-r}$. Par conséquent, dans le cas présent, c_1 et c_2 sont réelles et distinctes,

$$(12)\qquad c_1=\frac{1}{\lambda-r_1},\qquad c_2=\frac{1}{\lambda-r_2},$$

ce qui permet d'écrire (10) sous la forme

$$(10')\qquad v_3=\frac{v_1+v_2-(c_1+c_2)\dfrac{v_1v_2}{c_1c_2}}{1-\dfrac{v_1v_2}{c_1c_2}},$$

et les équations (7)

$$
(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned}
& x' = \alpha(x - vt),\\
& t' = \alpha\left[\frac{v}{c_1 c_2}x + \left(1 - \frac{v}{c_1} - \frac{v}{c_2}\right)t\right],\\
& \text{avec}\quad \alpha = \left(1 - \frac{v}{c_1}\right)^{-\frac{r_2}{r_2 - r_1}}\left(1 - \frac{v}{c_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2 - r_1}}
\end{aligned}\right.
$$

Une remarque s'impose au sujet du domaine où l'on peut faire varier le paramètre v. D'après (8′), v doit toujours vérifier

$$
(13)\qquad \left(1 - \frac{v}{c_1}\right)\left(1 - \frac{v}{c_2}\right) \geqq 0.
$$

Les valeurs de v qui rendraient ce produit négatif correspondent à des vitesses qui ne peuvent être atteintes à partir de $v = 0$ par composition répétée de transformations voisines de l'identique. En effet, d'après (9), si l'on compose v_1 et v_2 vérifiant toutes les deux la condition (13), v_3 la vérifiera aussi. Nous n'envisagerons pas les *vitesses inaccessibles*, même au cas où les formules (I) conserveraient un sens pour ces vitesses.

L'invariant du groupe peut s'écrire : $(x - c_1 t)^{r_1}(x - c_2 t)^{-r_2}$, ce qui donne pour deux événements infiniment voisins, l'invariant homogène du premier degré

$$
(14)\qquad ds = (dx - c_1\,dt)^{-\frac{r_1}{r_2 - r_1}}(dx - c_2\,dt)^{\frac{r_2}{r_2 - r_1}}.
$$

On peut ainsi géométriser l'espace-temps, en le considérant comme un espace de Finsler.

Des cas particuliers intéressants se présentent. Si, par exemple, $r_2 = 0$, l'invariant est linéaire : $ds = dx - c_1\,dt$, et, dans (I), on a $\alpha = \dfrac{1}{1 - \dfrac{v}{c_2}}$.

Si $r_1 + r_2 = 0$, le groupe est unimodulaire, et l'on a un invariant quadratique

$$
ds^2 = (dx - c_1\,dt)(dx - c_2\,dt).
$$

On trouve le cas de Lorentz en supposant en outre $c_1 + c_2 = 0$.

Examinons spécialement le cas où l'une des vitesses invariantes est infinie ($\mu = 0$). Soit $c_2 = \infty$, $c_1 = c = \dfrac{1}{\lambda - \rho}$. Le groupe s'écrit alors

$$\text{(II)} \qquad x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\lambda c}}, \qquad t' = \frac{t}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\rho c}},$$

et v doit toujours vérifier $1 - \frac{v}{c} \geqq 0$.

Cette cinématique (II) conserve la simultanéité; elle confère à l'espace-temps l'invariant $ds = dt^{\lambda c}(dx - c\,dt)^{-\rho c}$. En faisant soit $\lambda = 0$, soit $\rho = 0$, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ t' &= \left(1 - \frac{v}{c}\right) t; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{1 - \frac{v}{c}}, \\ t' &= t. \end{aligned}\right.$$

Si l'on appelle v' la vitesse de S par rapport à S', la formule de composition (10) donne, pour le cas général

$$\text{(15)} \qquad v + v' - (\lambda - \rho) v v' = 0.$$

Cette relation ne se réduit à $v + v' = 0$ que si $\lambda - \rho = 0$, c'est-à-dire si $c_1 + c_2 = 0$ [1].

Second cas : $(\lambda - \rho)^2 - 4\mu = 0$. — L'équation caractéristique a une racine double. Les équations du groupe sont alors

$$\text{(III)} \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha(x - vt), \\ t' &= \alpha\left[\frac{v}{c^2}\,x + \left(1 - \frac{2v}{c}\right)t\right], \\ &\text{avec} \quad \alpha = \frac{e^{\frac{rv}{1 - \frac{v}{c}}}}{1 - \frac{v}{c}}, \end{aligned}\right.$$

r et c sont indépendants : $r = \frac{\lambda + \rho}{2}$, $c = \frac{2}{\lambda - \rho} = \frac{1}{\lambda - r}$.

La relation entre v et le paramètre canonique φ est homogra-

---

(1) Le principe de réciprocité, qu'on invoque parfois exclusivement pour établir la relation $v + v' = 0$, ne suffit pas. Il exige seulement que la relation entre v et v' soit ***symétrique***, et cela a toujours lieu quand on a affaire à un groupe. Einstein ***démontre*** la relation $v + v' = 0$, en partant du temps optique (***Sur l'Électrodynamique des corps en mouvement***, trad. Solovine, p. 18).

phique

$$v = \frac{\varphi}{1 + \frac{\varphi}{c}},$$

toutes les vitesses sont donc accessibles, mais quand φ varie de $-\infty$ à $+\infty$, v ne franchit pas la vitesse invariante c. La connexion entre les vitesses inférieures à c et les vitesses supérieures à c se fait par l'infini : v change de signe en devenant infinie quand φ passe par la valeur $-c$. C'est une singularité sur laquelle nous reviendrons.

L'invariant est dans ce cas

$$ds = (dx - c\,dt)e^{-cr\frac{dx}{dx - c\,dt}}.$$

Supposons en particulier $c = \infty (\lambda = \rho, \mu = 0)$; le groupe devient

$$\text{(IV)} \qquad x' = e^{\lambda v}(x - vt), \quad t' = e^{\lambda v}t.$$

Cette cinématique comporte la simultanéité absolue et la relation $v + v' = 0$, sans se confondre avec la cinématique de Galilée tant que $\lambda \neq 0$. L'invariant correspondant est $ds = dt e^{\lambda\frac{dx}{dt}}$.

Troisième cas : $(\lambda - \rho)^2 - 4\mu < 0$. — Les racines sont imaginaires

$$r_1 = h - ik, \quad r_2 = h + ik, \quad \text{où} \quad h = \frac{\lambda + \rho}{2}, \quad k = \sqrt{\mu - \left(\frac{\lambda - \rho}{2}\right)}.$$

Les formules (7) deviennent

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha(x - vt), \\ t' = \alpha\{\mu v x + [1 - (\lambda - \rho)v]t\}, \\ \text{avec} \\ \alpha = \{[1 - (\lambda - h)v]^2 + k^2v^2\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{h}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{kv}{1 - v(\lambda - h)}}. \end{array} \right.$$

La relation entre v et le paramètre canonique est

$$v = \frac{\operatorname{tang} k\varphi}{(\lambda - h)\operatorname{tang} k\varphi + k},$$

ce qui montre que v peut prendre toutes les valeurs. Au cours de la composition progressive des vitesses, v passe de $-\infty$ à $+\infty$, comme dans le second cas.

L'invariant, qui est

$$ds = \left[\left(dx - \frac{\lambda - h}{\mu}\, dt\right)^2 + \frac{k^2}{\mu^2}\, dt^2\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{h}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{k\,dt}{\mu\,dx-(\lambda-h)\,dt}},$$

se simplifie considérablement si $h = 0 (\lambda + \rho = 0)$ et devient

$$ds^2 = \left(dx - \frac{\lambda}{\mu}\, dt\right)^2 + \frac{k^2}{\mu^2}\, dt^2,$$

tandis que α se réduit à $[(1 - \lambda v)^2 + k^2 v^2]^{-\frac{1}{2}}$.

Si de plus on suppose $\lambda = \rho = 0$, on peut poser $\mu = \frac{1}{c^2}$, et il vient

$$\text{(VI)} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{\frac{v}{c^2}\, x + t}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ce groupe, qui se déduit du groupe de Lorentz en changeant c^2 en $-c^2$, devient identique au groupe des rotations quand on pose $ct = y$.

III.

Parmi toutes ces cinématiques possibles, opérations (Γ), nous allons restreindre notre choix, en ne conservant que celles qui jouissent de certaines propriétés concernant soit le temps, soit l'espace.

La propriété que nous considérons en premier lieu, parce qu'elle nous paraît la plus importante, consiste dans la conservation de l'ordre temporel des événements, au moins pour les couples d'événements d'un certain type. Nous formulons la règle de façon précise comme suit : *si deux événements*, A *et* B, *ont lieu au même endroit du système de référence* S, *et si* B *est postérieur à* A *par rapport à* S, *il est encore postérieur à* A *par rapport à un système* S′ *quelconque.*

Le couple (A, B), d'après cela, n'est pas quelconque ; c'est un couple *isotope* par rapport à *un* système S. Les composantes spatiale et temporelle, X′ et T′, par rapport à un système S′ quelconque, vérifieront, si v' est la vitesse de S par rapport à S′

$$\frac{X'}{T'} = v'.$$

Or, v', d'après la condition (13), doit satisfaire à l'inégalité

$$\left(1-\frac{v'}{c_1}\right)\left(1-\frac{v'}{c_2}\right)\geqq 0,$$

ce qui donne pour X′ et T′

$$T'^2 - X'T'\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}+\frac{X'^2}{c_1c_2}\geqq 0,$$

ou encore

$$\left(T'-\frac{\lambda-\rho}{2}X'\right)^2+\left[\mu-\left(\frac{\lambda-\rho}{2}\right)^2\right]X'^2\geqq 0. \tag{16}$$

Cette formule exprime la condition pour que les deux événements puissent appartenir à un même mouvement uniforme de vitesse accessible. Elle n'est restrictive que dans le cas où les racines r_1 et r_2 sont réelles et distinctes, où, par suite, les vitesses invariantes c_1 et c_2 sont réelles et distinctes. Si le couple (A, B) définit un vecteur de genre *temporel*, autrement dit, si ses composantes dans un système quelconque vérifient (16), nous exigerons que le signe de sa composante temporelle soit conservé par l'opération (C). Nous dirons que les cinématiques correspondantes *conservent l'avenir*.

Analytiquement, la condition se traduit par $\frac{\partial t'}{\partial t}>0$. D'après (I), en supposant d'abord c_1 et c_2 finies, on a

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\alpha\left(1-\frac{v}{c_1}-\frac{v}{c_2}\right),$$

α est positif, car d'après (13), v ne peut franchir ni c_1 ni c_2. Donc l'expression précédente ne changera de signe que si la vitesse

$$w=\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}$$

est accessible, c'est-à-dire si $\left(1-\frac{w}{c_1}\right)\left(1-\frac{w}{c_2}\right)\geqq 0$, ce qui donne $c_1c_2>0$. Les opérations (Γ) pour lesquelles $c_1c_2>0$ ne conservent pas l'avenir.

Parmi les cinématiques à deux vitesses invariantes, il ne faut conserver que les solutions pour lesquelles $c_1c_2<0$, c'est-à-dire $\mu<0$. Le cas ou $c_1=c_2$ ne donne rien d'acceptable si c_1 est finie : c'est ce que montrent les formules (III). Dans le cas n° 3, c_1 et c_2 étant imaginaires conjuguées, leur produit est positif; les cinématiques correspondantes sont donc à rejeter. A leur sujet, il se présente une difficulté apparente. Si l'on prend, par exemple, les formules (VI), il ne semble pas tout d'abord que

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$

puisse être négatif. C'est pourtant ce qui se produit au cours de la composition des vitesses. Le radical a en réalité deux déterminations, et, en composant deux vitesses qui le rendent positif, on peut obtenir une vitesse qui le rende négatif. On le voit clairement si l'on écrit les formules (VI) avec le paramètre canonique

$$\text{(VI')}\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x\cos\frac{\varphi}{c} - ct\sin\frac{\varphi}{c},\\ t' &= \frac{x}{c}\sin\frac{\varphi}{c} + t\cos\frac{\varphi}{c},\\ v &= c\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{c}. \end{aligned}\right.$$

On constate que

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \cos\frac{\varphi}{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Quand on composera deux transformations pour lesquelles φ_1 et φ_2 sont positives et inférieures à $\frac{\pi c}{2}$, le coefficient $\cos\frac{\varphi}{c}$ sera négatif pour la transformation résultante dès lors que l'on aura $\varphi_1+\varphi_2 > \frac{\pi c}{2}$. Quand φ varie de façon continue et passe par la valeur $\frac{\pi c}{2}$ en croissant, $\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}$ change de signe, v passant de $+\infty$ à $-\infty$. Des considérations analogues s'appliquent au cas général, comme on s'en rend compte en écrivant les formules (V) à l'aide du paramètre canonique. On trouve

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{e^{h\varphi}}{k}\,[k\cos k\varphi - (\lambda - h)\sin k\varphi],$$

et cette expression change de signe quand φ passe par une valeur telle que

$$\mathrm{tang}\,k\varphi = \frac{k}{\lambda - h} \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{1}{\lambda - \rho}.$$

En définitive, nous constatons qu'il faut rejeter toutes les opérations (Γ) dans lesquelles v pouvait changer de signe en passant par l'infini. Cette singularité, qu'il eût été difficile d'interpréter, se trouve dès lors écartée.

Il nous reste à examiner, du point de vue de la conservation de l'avenir, l'hypothèse où l'une au moins des vitesses invariantes est infinie. Les formules (II) donnent une solution acceptable, car v ne franchit pas la valeur c; il en est de même des formules (IV).

En résumé, nous avons encore à conserver trois cinématiques bien distinctes :

1° La cinématique (I), où $c_1 c_2 < 0$; elle comporte deux vitesses invariantes, l'une positive, l'autre négative, qui sont aussi des vitesses limites; comme cas particulier, elle donne la cinématique de Lorentz.

2° La cinématique (II), dans laquelle il n'existe qu'une vitesse invariante, qui est vitesse limite pour les vitesses ayant le même signe qu'elle, et seulement pour celles-là. Cette cinématique dépend de deux arbitraires λ et $\rho (\lambda \neq \rho)$; quels que soient λ et ρ, elle comporte la simultanéité absolue.

3° La cinématique (IV) n'a ni vitesse invariante, ni vitesse limite; elle comporte la simultanéité absolue; elle dépend d'un arbitraire λ et se réduit à la cinématique de Galilée pour $\lambda = 0$.

IV.

La dernière propriété que nous reconnaissons aux opérations (C) consiste à respecter l'*isotropie de l'espace*. Chaque opération (C) est dirigée; chacune privilégie un des deux sens de l'axe Ox, mais le groupe lui-même ne privilégie aucun sens de l'axe spatial.

Nous avons à exprimer que le groupe est invariant par la transformation

$$X = -x, \qquad T = t.$$

Il faut donc que, quand on change x en $-x$ et x' en $-x'$, les formules du groupe se reproduisent, à un changement près du paramètre. Il est évident qu'à l'intérieur du groupe, les opérations se permuteront suivant une loi qui se traduira par le changement de v en $-v$. Donc, en définitive, le groupe reprendra exactement sa forme si l'on change x en $-x$, x' en $-x'$ et v en $-v$.

Si nous examinons de ce point de vue les résultats obtenus précédemment, nous voyons que la cinématique (I) ne convient que si

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_1 + r_2 = 0;$$

elle se réduit alors à la cinématique de Lorentz.

Les formules (II) ne donnent rien d'acceptable.

Les formules (IV) ne conviennent que si $\lambda = 0$, et elles donnent la cinématique de Galilée.

Les deux cinématiques classiques sont donc les seules qui conservent l'avenir et respectent l'isotropie de l'espace.

V.

Quand on passe de l'espace-temps à deux dimensions à l'espace-temps véritable, les changements de système de référence qui conservent l'origine dépendent de trois paramètres qui seront, par exemple, les trois composantes de la vitesse du système S' par rapport au système S. Par une extension naturelle de notre méthode, il semblerait tout indiqué de postuler que ces ∞^3 opérations forment un groupe à trois paramètres. Si l'on imposait cette condition, il ne resterait que la cinématique de Galilée, car les transformations de Lorentz ne forment pas un groupe.

En effet, ces transformations font partie du groupe à 6 paramètres qui conserve la forme $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, c'est-à-dire d'un groupe qui contient, en outre, les rotations spatiales. Les six transformations infinitésimales de ce groupe peuvent s'écrire

$$\mathrm{X}f = t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathrm{Y}f = t\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathrm{Z}f = t\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\overline{\mathrm{X}}f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \overline{\mathrm{Y}}f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \overline{\mathrm{Z}}f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Si l'on forme le crochet de deux quelconques des trois premières, qui correspondent aux transformations de Lorentz, on ne trouve pas une expression linéaire en Xf, Yf et Zf. Par exemple,

$$(X, Y)f = \frac{1}{c^2}\overline{Z}f.$$

Cela suffit à démontrer que les trois transformations infinitésimales Xf, Yf, Zf ne définissent pas un groupe. Il en serait autrement, on le voit, si c était infini, mais alors ce serait la cinématique de Galilée.

Nous postulerons donc simplement que les changements de système de référence sont constitués par l'ensemble des transformations de ∞^2 groupes à un paramètre. Un tel ensemble se définit analytiquement par le moyen de trois transformations infinitésimales indépendantes, que nous appellerons Xf, Yf, Zf, avec lesquelles on construit le faisceau

$$\alpha Xf + \beta Yf + \gamma Zf, \tag{17}$$

où α, β, γ sont des constantes quelconques dont les rapports mutuels seuls jouent un rôle essentiel; il suffit ensuite de déterminer les transformations finies du groupe à un paramètre qui admet (17) pour transformation infinitésimale.

Postulons que toutes ces opérations laissent invariant le groupe des changements d'origine, dont les transformations infinitésimales sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{18}$$

Nous devons exprimer que le crochet de la transformation (17) avec une quelconque des transformations (18) s'exprime linéairement par rapport aux transformations (18) : il faut et il suffit pour cela que les coefficients des transformations Xf, Yf, Zf soient linéaires par rapport à x, y, z et t.

Remarquons, en outre, que, pour que toutes les transformations (17) correspondent à de véritables changements de système de référence, il faut que Xf, Yf et Zf soient linéairement indépendantes par rapport à $t\frac{\partial f}{\partial x}$, $t\frac{\partial f}{\partial y}$, $t\frac{\partial f}{\partial z}$. Par une substitution linéaire convenable, on peut se ramener aux expressions :

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
Xf = {} & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t)\frac{\partial f}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\frac{\partial f}{\partial y} \\
& + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\frac{\partial f}{\partial z} + (a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t)\frac{\partial f}{\partial t}, \\
Yf = {} & (b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)\frac{\partial f}{\partial x} + (b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + t)\frac{\partial f}{\partial y} \\
& + (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)\frac{\partial f}{\partial z} + (b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}t)\frac{\partial f}{\partial t}, \\
Zf = {} & (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z)\frac{\partial f}{\partial x} + (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z)\frac{\partial f}{\partial y} \\
& + (c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + t)\frac{\partial f}{\partial z} + (c_{41}x + c_{42}y + c_{43}z + c_{44}t)\frac{\partial f}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour des commodités de calcul, nous ferons d'abord intervenir le postulat concernant l'isotropie de l'espace. Si l'on veut que les transformations engendrées par (17) ne favorisent aucune direction spatiale, il faut que leur ensemble soit invariant par les rotations, c'est-à-dire que le crochet de chacune des transformations Xf, Yf, Zf avec $\overline{X}f$, $\overline{Y}f$, ou $\overline{Z}f$ s'exprime linéairement en Xf, Yf, Zf. Le calcul donne

$$
(20)\qquad \left\{
\begin{aligned}
Xf &= t\frac{\partial f}{\partial x} + \rho x\frac{\partial f}{\partial t} + h\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\
Yf &= t\frac{\partial f}{\partial y} + \rho y\frac{\partial f}{\partial t} + h\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right), \\
Zf &= t\frac{\partial f}{\partial z} + \rho z\frac{\partial f}{\partial t} + h\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il subsiste dans ces formules un paramètre h dont la signification est facile à apercevoir. Faisons, en effet, $\rho = \frac{1}{c^2}$ et cherchons les transformations finies du groupe qui a pour transformation infinitésimale Xf. Il vient

$$
x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y\cos(hc\varphi) + z\sin(hc\varphi),
$$

$$
t = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad z' = -y\sin(hc\varphi) + z\cos(hc\varphi),
$$

$$
(v = c\,\mathrm{Th}\,\varphi).
$$

C'est une transformation de Lorentz correspondant à une vitesse

v portée par Ox, mais qui se complique d'une rotation dans le plan yOz d'un angle qui est fonction de v et dont le signe dépend du signe de h. De telles transformations, si elles respectent bien l'isotropie de l'espace, favorisent un certain sens de rotation autour de chaque axe; relativement à elles, l'*espace n'est pas symétrique* par rapport à un plan quelconque. Si l'on exige cette symétrie, h doit être nul; c'est seulement dans ce cas que l'ensemble des transformations (20) est invariant, non seulement par les rotations, mais encore par les *retournements*. En imposant d'emblée cette condition, et en se rappelant que toute rotation ou retournement se ramène à un certain nombre de symétries par rapport à des plans, on parvient très facilement aux expressions (20) (avec $h = 0$) à partir des formules indéterminées (19).

Nous avons déjà remarqué que les transformations (20) (où $h = 0$, $\rho \neq 0$) ne définissent pas un groupe. Cherchons s'il est possible d'obtenir un groupe, en déterminant convenablement h en fonction de ρ. On trouve aisément $(X, Y)f = -2hZf$, et des formules analogues, pourvu que $h^2 = -\rho$. Ce résultat n'aurait d'intérêt que si ρ était négatif, mais, d'après une discussion antérieure (§ III), nous savons que cette hypothèse doit être écartée, si nous voulons que les transformations (20) conservent l'avenir. Désormais nous ferons $h = 0$, $\rho = \frac{1}{c^2}$.

Les transformations finies qui correspondent à la transformation infinitésimale

$$\alpha c Xf + \beta c Yf + \gamma c Zf \qquad (\text{où } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

s'obtiennent en intégrant

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \alpha ct, \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \beta ct, \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \gamma ct, \\ \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t',$$

pour $\varphi = 0$.

On trouve, en résolvant ensuite par rapport à x', y', z', t',

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x + \alpha u,\\ y' &= y + \beta u,\\ z' &= z + \gamma u,\\ ct' &= ct \operatorname{ch}\varphi - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\operatorname{sh}\varphi,\\ [\,u &= (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\operatorname{ch}\varphi - 1) - ct \operatorname{sh}\varphi\,]. \end{aligned}\right.$$

C'est la transformation de Lorentz la plus générale, correspondant à une vitesse $v = c\operatorname{Th}\varphi$, portée par une droite de cosinus directeurs α, β, γ. L'aspect compliqué des formules (22) dissimule le fait que ces transformations ne forment pas un groupe, mais on peut s'en rendre compte sur un cas simple.

Soit un systèmê S', de vitesse $v_1 = c\operatorname{Th}\varphi_1$ dirigée suivant l'axe Ox de S ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$); les formules (22) donnent

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch}\varphi_1 - ct \operatorname{sh}\varphi_1, & z' &= z,\\ y' &= y & ct' &= ct \operatorname{ch}\varphi_1 - x \operatorname{sh}\varphi_1. \end{aligned}\right.$$

Considérons un troisième système S'', de vitesse $v_2 = c\operatorname{Th}\varphi_2$ dirigée suivant l'axe $O'y'$ de S' ($\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$)

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' &= x', & z'' &= z',\\ y'' &= y' \operatorname{ch}\varphi_2 - ct' \operatorname{sh}\varphi_2, & ct'' &= ct' \operatorname{ch}\varphi_2 - y' \operatorname{sh}\varphi_2, \end{aligned}\right.$$

d'où, en éliminant x', y', z', t',

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' &= x \operatorname{ch}\varphi_1 - ct \operatorname{sh}\varphi_1,\\ y'' &= x \operatorname{sh}\varphi_1 \operatorname{sh}\varphi_2 + y \operatorname{ch}\varphi_2 - ct \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{sh}\varphi_2,\\ z'' &= z,\\ ct'' &= -x \operatorname{sh}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 - y \operatorname{sh}\varphi_2 + ct \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2. \end{aligned}\right.$$

Ces formules ne représentent pas une transformation de Lorentz. Exprimons, en effet, la transformation de Lorentz qui correspondrait à la vitesse que possède S'' par rapport à S. Cette vitesse se calcule en dérivant (25), où x'', y'', z'' sont considérées comme des constantes; il vient

$$\frac{dx}{dt} = c\operatorname{Th}\varphi_1, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c\operatorname{Th}\varphi_2}{\operatorname{ch}\varphi_1}, \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

On a donc, d'une part,

$$v = c\,\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\varphi_1 \operatorname{ch}^2\varphi_2 - 1}}{\operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2}$$