BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ LAGRANGE

Quelques théorèmes d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 155-163
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__155_0>

QUELQUES THÉORÈMES D'INTÉGRABILITÉ PAR QUADRATURES DE L'ÉQUATION DE RICCATI;

Par M. René Lagrange
(Dijon).

Quelques critères d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati sont connus depuis longtemps et, récemment encore, quelques Notes ont paru sur ce sujet [1]. Il s'agit généralement de transformer l'équation étudiée et d'exprimer que l'équation obtenue possède une intégrale particulière connue. Nous nous proposons ici d'étudier systématiquement les covariances présentées par les coefficients et leurs dérivées relativement à la transformation homographique à coefficients constants de l'inconnue, et d'en déduire un critère d'intégrabilité assez général et dont l'intérêt théorique n'est peut-être pas négligeable.

1. Considérons l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y^2 + 2s(x)y + t(x), \tag{1}$$

et citons le critère élémentaire suivant :

A. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsqu'il existe une relation*

$$r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 = 0 \tag{2}$$

à coefficients λ, μ *constants, non simultanément nuls.*

Observons d'autre part que la transformation homographique H

---

[1] *Cf.* par exemple, Pompeiu, *C. R. Acad. Sc.*, t. 161, 1915, p. 235; Minetti, *C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 1584; Mitrinovitch, *C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 411-13. Également *cf.* Minetti, *Atti R. A. N. Lincei*, t. 19, 1934, p. 65-74.

à coefficients constants

$$\text{H}: \qquad y = \frac{a\bar{y} + b}{c\bar{y} + d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

transforme (1) en

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{r}\bar{y}^2 + 2\bar{s}\bar{y} + \bar{t}, \tag{3}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{ra^2 + 2sac + tc^2}{ad - bc}, \\ \bar{s} &= \frac{rab + s(ad + bc) + tcd}{ad - bc}, \\ \bar{t} &= \frac{rb^2 + 2sbd + td^2}{ad - bc}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les trois coefficients de (1) constituent donc un tenseur symétrique double du groupe homographique, et possèdent l'invariant $rt - s^2$.

2. La transformation classique

$$r(x)y + s(x) = y_1, \tag{5}$$

que nous appellerons « transformation K de l'équation (1) », transforme (1) en

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + \frac{r'}{r}y_1 + \frac{rs' - sr'}{r} + rt - s^2, \tag{6}$$

où r', s' désignent des dérivées par rapport à x. Posons

$$\rho = rs' - sr' + r(rt - s^2),$$

de sorte que (6) s'écrit

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + \frac{r'}{r}y_1 + \frac{\rho}{r}. \tag{6'}$$

Si l'on applique à (3) sa transformation K, on obtient de même

$$\frac{d\bar{y}_1}{dx} = \bar{y}_1^2 + \frac{\bar{r}'}{\bar{r}}\bar{y}_1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{r}}, \tag{7}$$

où

$$\bar{\rho} = \frac{1}{ad - bc}\left\{[rs' - sr' + r(rt - s^2)]\,a^2 + 2\left[\frac{rt' - tr'}{2} + s(rt - s^2)\right]ac + [st' - ts' + t(rt - s^2)]\,c^2\right\}.$$

On est ainsi conduit à associer les trois quantités

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho = rs' - sr' + r(rt - s^2), \\ \sigma = \dfrac{rt' - tr'}{2} + s(rt - s^2), \\ \tau = st' - ts' + t(rt - s^2). \end{cases}$$

On vient de voir que le groupe H transforme ρ en

$$\bar{\rho} = \frac{\rho a^2 + 2\sigma ac + \tau c^2}{ad - bc},$$

première relation de la covariance double (4). Il en résulte que les deux autres quantités σ, τ constituent avec ρ un tenseur double symétrique du groupe H. En particulier, $\rho\tau - \sigma^2$ est invariant.

En appliquant à (6') et (7) le critère A, on obtient les deux critères suivants :

B. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsqu'il existe une relation*

$$(9)\qquad r\lambda^2 + r'\lambda\mu + \rho\mu^2 = 0$$

à coefficients λ, μ *constants.*

C. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsqu'il existe une relation*

$$(10)\qquad \rho\lambda^2 + 2\sigma\lambda\mu + \tau\mu^2 = 0$$

à coefficients λ, μ *constants.*

Ce dernier critère est un cas particulier du critère

$$\bar{r}\lambda^2 + \bar{r}'\lambda\mu + \bar{\rho}\mu^2 = 0$$

que fournit l'équation (7); c'est pour des raisons de simplicité que nous nous bornons à considérer la forme $\bar{\rho} = 0$.

La forme particulière $\rho = 0$ de (9) est le caractère d'intégrabilité de Pompeiu, retrouvé par Minetti.

3. Appliquons à (6') les transformations effectuées sur (1). Ses coefficients sont

$$r_1 = 1, \qquad s_1 = \frac{r'}{2r}, \qquad t_1 = \frac{\rho}{r}.$$

Sa transformation K donne donc

$$y_1 + \frac{r'}{2r} = y_2, \tag{11}$$

et la forme réduite

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2^2 + \rho_1. \tag{12}$$

où

$$\rho_1 = \left(\frac{r'}{2r}\right)' - \left(\frac{r'}{2r}\right)^2 + \frac{\rho}{r} = [r, x] + \frac{\rho}{r},$$

en désignant par $[r, x]$ l'invariant de Cayley-Schwartz de la fonction r. Posons

$$\alpha = \rho_1 r^2 = \frac{rr''}{2} - \frac{3}{4} r'^2 + r\rho \tag{13}$$

et étudions la transformation de cette expression par la transformation homographique H. Il vient

$$\bar\alpha = \frac{\bar r \bar r''}{2} - \frac{3}{4} \bar r'^2 + \bar r \bar\rho.$$

c'est-à-dire

$$\bar\alpha = \frac{\alpha a^4 + 4\beta a^3 c + 6\gamma a^2 c^2 + 4\delta a c^3 + \varepsilon c^4}{(ad - bc)^2}, \tag{14}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha &= \frac{rr''}{2} - \frac{3}{4} r'^2 + r\rho, \\
\beta &= \frac{rs'' + sr''}{4} - \frac{3}{4} r's' + \frac{r\sigma + s\rho}{2}, \\
\gamma &= \frac{rt'' + 4ss'' + tr''}{12} - \frac{r't' + 2s'^2}{4} + \frac{r\tau + 4s\sigma + t\rho}{6}, \\
\delta &= \frac{st'' + ts''}{4} - \frac{3}{4} s't' + \frac{s\tau + t\sigma}{2}, \\
\varepsilon &= \frac{tt''}{2} - \frac{3}{4} t'^2 + t\tau.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

La transformation (14) de α a la forme de la transformation du premier élément d'un tenseur quadruple dont les éléments ont des valeurs indépendantes de l'ordre des indices. Du fait que H est un groupe, il résulte que β, γ, δ, ε sont les quatre autres éléments d'un tel tenseur. On a donc

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar\alpha &= \frac{\alpha a^4 + 4\beta a^3 c + 6\gamma a^2c^2 + 4\delta ac^3 + \varepsilon c^4}{(ad-bc)^2},\\
\bar\beta &= \frac{\left\{\begin{matrix}\alpha a^3 b + \beta a^2(ad+3bc)\\ +3\gamma ac(ad+bc) + \delta c^2(3ad+bc) + \varepsilon c^3 d\end{matrix}\right\}}{(ad-bc)^2},\\
\bar\gamma &= \frac{\left\{\begin{matrix}\alpha a^2b^2 + 2\beta ab(ad+bc)\\ +\gamma(a^2d^2+b^2c^2+4abcd) + 2\delta cd(ad+bc) + \varepsilon c^2d^2\end{matrix}\right\}}{(ad-bc)^2},\\
\bar\delta &= \frac{\left\{\begin{matrix}\alpha ab^3 + \beta b^2(3ad+bc)\\ +3\gamma bd(ad+bc) + \delta d^2(ad+3bc) + \varepsilon cd^3\end{matrix}\right\}}{(ad-bc)^2},\\
\bar\varepsilon &= \frac{\alpha b^4 + 4\beta b^3 d + 6\gamma b^2d^2 + 4\delta bd^3 + \varepsilon d^4}{(ad-bc)^2}.
\end{aligned}\right.
$$

La transformée H de (12) est

$$
(17)\qquad \frac{dy_2}{dx} = y_2^2 + \bar\rho_1,
$$

avec $\bar\rho_1 = \frac{\bar\alpha}{\bar r^2}$, ce qui fournit le critère

D. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsque*

$$
\varphi(x;\lambda,\mu) = \frac{\alpha\lambda^4 + 4\beta\lambda^3\mu + 6\gamma\lambda^2\mu^2 + 4\delta\lambda\mu^3 + \varepsilon\mu^4}{(r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2)^2}
$$

est constant pour certaines valeurs constantes des λ, μ. *C'est ce qui a lieu, en particulier, quand il existe une relation*

$$
\alpha\lambda^4 + 4\beta\lambda^3\mu + 6\gamma\lambda^2\mu^2 + 4\delta\lambda\mu^3 + \varepsilon\mu^4 = 0
$$

à coefficients constants λ, μ *non simultanément nuls.*

Le cas $\alpha = 0$ a été donné par Minetti.

4. On peut réitérer à partir de (17). Les coefficients de cette équation sont

$$
r_2 = 1,\qquad s_2 = 0,\qquad t_2 = \bar\rho_1 = \varphi(x;\lambda,\mu),
$$

où l'on a remplacé les coefficients a, c de H par λ, μ. On en déduit les valeurs

$$
\rho_2 = \varphi,\qquad \sigma_2 = \frac{1}{2}\varphi',\qquad \tau_2 = \varphi^2.
$$

et

$$\begin{cases} \alpha_2 = \rho_2 = \varphi, & \beta_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{4}\varphi', \quad \gamma_2 = \frac{\varphi'' + 4\varphi^2}{12}, \\ \delta_2 = \frac{1}{4}\varphi\varphi', & \varepsilon_2 = \frac{\varphi\varphi''}{2} - \frac{3}{4}\varphi'^2 + \varphi^3. \end{cases}$$

Les critères A et B relatifs à (17) ne sont rien autre que le critère D relatif à (1). Le critère C donne le critère

E. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsqu'il existe une relation non banale et à coefficients constants* λ, μ, λ_1, μ_1,

$$\varphi(x;\,\lambda,\,\mu)\lambda_1^2 + \varphi'(x;\,\lambda,\,\mu)\lambda_1\mu_1 + \varphi(x;\,\lambda,\,\mu)^2\mu_1^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque $\varphi(x;\ \lambda,\ \mu)$ *est de la forme* $\frac{m^2}{A e^{mx} - 1}$ (A, $m = \text{const.}$).

Le critère D en est un cas particulier. Enfin le critère D relatif à (17) donne pour (1) le critère

F. *L'équation* (1) *est résoluble par quadratures lorsque*

$$\varphi_1(x:\,\lambda,\,\mu;\,\lambda_1,\,\mu_1) \\ \equiv \frac{\varphi\lambda_1^4 + \varphi'\lambda_1^3\mu_1 + \frac{\varphi'' + 4\varphi^2}{2}\lambda_1^2\mu_1^2 + \varphi\varphi'\lambda_1\mu_1^3 + \left(\frac{\varphi\varphi''}{2} - \frac{3}{4}\varphi'^2 + \varphi^3\right)\mu_1^4}{(\lambda_1^2 + \varphi\mu_1^2)^2}$$

est constant pour des valeurs convenables des constantes λ, μ, λ_1, μ_1.

Les systèmes de valeurs $\lambda = \mu = 0$ et $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ sont évidemment écartés.

Il est clair qu'on aurait pu faire $\mu = 1$, à condition d'admettre dans l'expression de φ la valeur infinie de λ. Par contre, on peut supposer $\mu_1 = 1$ dans l'expression de φ_1 tout en se bornant aux valeurs finies de λ_1, car

$$\varphi_1(x;\,\lambda,\,\mu;\,\lambda_1,\,0) \equiv \varphi(x;\,\lambda,\,\mu).$$

D'ailleurs on vérifie que l'inconnue de l'équation

$$(18) \qquad \frac{d\bar{y}_3}{dx} = \bar{y}_3^{-2} + \varphi_1$$

est alors égale à $\bar{y}_2$, car λ_1 et μ_1 sont les coefficients a et c de la transformation H appliquée à (17), suivie de deux transformations K analogues à (5) et (11), pour aboutir à (18).

Ces remarques nous conduisent à former plus simplement

$$(19) \qquad \varphi_1(x;\,\lambda,\,\mu;\,\lambda_1) \equiv \varphi + \frac{\varphi'' + 2\varphi'\lambda_1}{2(\lambda_1^2 + \varphi)} - \frac{3}{4}\,\frac{\varphi'^2}{(\lambda_1^2 + \varphi)^2},$$

et un calcul simple montre que la correspondance entre $\bar{y}_2$ et $\bar{y}_3$ est indépendante des deux autres coefficients de H, et est de la forme

$$(20) \qquad \bar{y}_3 = \frac{\varphi + \lambda_1 \bar{y}_2}{\lambda_1 - \bar{y}_2} + \frac{\varphi'}{2(\lambda_1^2 + \varphi)}.$$

Il est clair qu'on peut réitérer; on obtient ainsi une suite de fonctions définies par la relation récurrente

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\varphi_n(x;\,\lambda,\,\mu;\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n) \\ &\quad = \varphi_{n-1} + \frac{\varphi''_{n-1} + 2\varphi'_{n-1}\lambda_n}{2(\lambda_n^2 + \varphi_{n-1})} - \frac{3}{4}\,\frac{\varphi'^2_{n-1}}{(\lambda_n^2 + \varphi_{n-1})^2}, \end{aligned}$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *L'équation* (1) *est intégrable par quadratures lorsque l'un des termes de la suite* (21) *est constant, pour des valeurs convenables des constantes* $\lambda,\,\mu,\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n$.

Lorsque φ_n est constant, on voit tout de suite que $\varphi_{n+1} \equiv \varphi_n$ et $\bar{y}_{n+3} = \bar{y}_{n+2}$. Plus généralement, si deux termes φ_p et φ_q $(q > p)$ sont égaux pour des valeurs convenables des constantes λ_i, et si la correspondance homographique à laquelle l'itération de (20) conduit entre $\bar{y}_{p+2}$ et $\bar{y}_{q+2}$ n'est pas une identité, cette correspondance laisse invariante l'équation

$$(22) \qquad \frac{d\bar{y}_{p+2}}{dx} = \bar{y}_{p+2}^2 + \varphi_p;$$

on sait que les invariants de cette transformation sont alors des intégrales de cette équation, de sorte que (22) est intégrable par la résolution d'une équation du premier ou du second degré, suivie de quadratures. On a ainsi le

Théorème. — *L'équation* (1) *est intégrable par quadratures lorsque deux des termes de la suite des φ_n sont égaux entre eux, pour des valeurs convenables des constantes* $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ *sans que la relation entre les inconnues correspondantes soit l'identité.*

5. *Remarque.* — L'équation (6) se retrouve lorsqu'on cherche à transformer l'équation (1) en une équation linéaire à l'aide d'une transformation homographique de y, à coefficients non constants. En effet, la transformée de (1) par

$$y = \frac{a(x)\,Y + b(x)}{c(x)\,Y + d(x)}$$

est

$$\frac{dY(x)}{dx} = R(x)Y^2 + 2S(x)Y + T(x),$$

avec

$$R(x) = \frac{ac' - ca' + ra^2 + 2sac + tc^2}{ad - bc}.$$

Il s'agit de trouver deux fonctions $a(x)$, $c(x)$ telles que

$$(23) \qquad ac' - ca' + ra^2 + 2sac + tc^2 = 0.$$

Observons qu'on obtient également cette équation en posant $y = \dfrac{a(x)}{c(x)}$, où $a(x)$, $c(x)$ seraient deux inconnues.

(23) est une conséquence du système d'équations différentielles linéaires du premier ordre

$$(24) \qquad \begin{cases} a' = m(x)\,a + n(x)\,c, \\ c' = p(x)\,a + q(x)\,c, \end{cases}$$

pourvu que l'on ait

$$p = -r, \qquad n = t, \qquad q - m + 2s = 0,$$

c'est-à-dire pourvu qu'il existe une fonction $\mu(x)$ telle que l'on ait

$$p = -r, \qquad n = t, \qquad m = \mu + s, \qquad q = \mu - s.$$

(24) est de la forme

$$(25) \qquad \begin{cases} a' = (\mu + s)\,a + tc, \\ c' = -ra + (\mu - s)\,c. \end{cases}$$

L'équation du second ordre en c, obtenue en éliminant a, est

$$(26) \quad c'' = \left(2\mu + \frac{r'}{r}\right)c' + \left[\mu' - \mu^2 - \frac{r'}{r}\mu - \left(s' - \frac{r'}{r}s + rt - s^2\right)\right]c.$$

Le coefficient de c n'est rien autre que

$$(27) \qquad \mu' - \mu^2 - \frac{r'}{r}\mu - \frac{\rho}{r},$$

de sorte que (26) est aisément résoluble si μ annule (27), autrement dit si μ est une intégrale de (6').

En prenant $2\mu = -\frac{r'}{r}$, (26) se réduirait à

$$c'' + \rho_1 c = 0,$$

et l'on aurait, pour l'inconnue $u = -\frac{c'}{c}$,

$$u' = u^2 + \rho_1,$$

qui n'est rien autre que l'équation (12).