BULLETIN DE LA S. M. F.

CARLOS BIGGERI

Sur les séries de Dirichlet dont les abscisses de convergence simple et absolue sont égales

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 56-68

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__56_0>

SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET DONT LES ABSCISSES DE CONVERGENCE SIMPLE ET ABSOLUE SONT ÉGALES;

PAR M. CARLOS BIGGERI.

Dans cette Note je démontre quelques théorèmes sur les singularités des fonctions analytiques, $f(z)$, définies par des séries de Dirichlet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-z\lambda_n}, \qquad (a_n \equiv \rho_n e^{i\varphi_n}), \tag{1}$$

dont les abscisses de convergence simple et absolue sont égales. On peut regarder ces théorèmes comme des généralisations, aux séries de Dirichlet, de théorèmes concernant la théorie des séries potentielles. J'emploierai le critère de M. Ostrowski [1], pour reconnaître la régularité, pour $f(z)$, d'un point périphérique (lequel constitue une généralisation naturelle du critère de M. Hadamard relatif aux séries de Taylor).

Appelons C et C′ les abscisses de convergence simple et absolue, respectivement, de la série (1).

Rappelons le critère de M. Ostrowski. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $C = 0$. Soient $\sigma > 0$ et $0 < \omega < 1$, un couple de valeurs arbitraires fixes. Posons

$$O_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega) \leqq \lambda_m \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a_m \lambda_m^n e^{-\sigma\lambda_m}.$$

Voici le critère de M. Ostrowski : *Il faut et il suffit, pour que le point $z = 0$ soit un point régulier pour $f(z)$, que l'on ait*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} < 1. \tag{2}$$

---

(1) A. OSTROWSKI, *Ueber das Hadamardsche Singularitätskriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen* (*Sitz. Berl. Math. Ges.*, t. 27, 1928).

Je ferai, tout d'abord, les observations suivantes :

Première Observation. — *Il faut et il suffit, pour que le point $z = 0$ soit un point singulier pour $f(z)$, que l'on ait*

(3) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1,$$

c'est-à-dire, l'inégalité, qui n'est pas exclue dans l'énoncé du critère de M. Ostrowski,

(4) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} > 1,$$

est irréalisable.

En effet, en mettant

$$A_n \equiv \left(\frac{n}{\sigma e}\right)^n O_n,$$

l'inégalité (4) équivaut à la suivante :

(4′) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |A_n|} > \frac{1}{\sigma}.$$

Si (4′) est vérifiée, il existe une *infinité* de valeurs de n, que je désignerai par N, telles que

(5) $$\frac{1}{N!} |A_N| > \left(\frac{1}{\sigma} + \delta\right)^N,$$

δ étant un certain nombre positif fixe. En cours de la démonstration du théorème d'Ostrowski, on prouve que : *si l'on pose*

$$B_n \equiv \sum_{\lambda_0 \leqq \lambda_m \leqq \frac{n}{\sigma}(1-\omega)} a_m \lambda_m^n e^{-\sigma \lambda_m} + \sum_{\frac{n}{\sigma}(1+\omega) \leqq \lambda_m < \infty} a_m \lambda_m^n e^{-\sigma \lambda_m}$$

on a

(6) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |B_n|} < \frac{1}{\sigma}.$$

Donc, à partir d'une valeur de n, suffisamment grand, on a

(7) $$\frac{1}{n!} |B_n| < \left(\frac{1}{\sigma} - \delta\right)^n.$$

Évidemment

$$|A_N| > |B_N|,$$

donc, on peut écrire

$$(8)\qquad \left|\sum_{0}^{\infty} a_m \lambda_m^{N} e^{-\sigma\lambda_m}\right| \geqq |A_N| - |B_N|.$$

De (5), (7) et (8) on tire

$$\frac{1}{N!}\left|\sum_{0}^{\infty} a_m \lambda_m^{N} e^{-\sigma\lambda_m}\right| > \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^{N}\left[1-\left(\frac{1-\sigma\delta}{1+\sigma\delta}\right)^{N}\right],$$

donc

$$(9)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[N]{\frac{1}{N!}\left|\sum_{0}^{\infty} a_m \lambda_m^{N} e^{-\sigma\lambda_m}\right|} \geqq \frac{1}{\sigma}+\delta > \frac{1}{\sigma}.$$

Puisque la suite qui figure au premier membre de (9) est une suite partielle de la suite analogue qu'on obtient en remplaçant dans celle-là N par n, de (9) on tire

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\sum_{0}^{\infty} a_m \lambda_m^{n} e^{-\sigma\lambda_m}\right|} > \frac{1}{\sigma};$$

c'est-à-dire : le rayon de convergence de la série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}(z-\sigma)^n$$

est plus petit que σ; ce qui est absurde, car nous avons supposé $C = 0$.

Deuxième Observation. — *L'origine $z = 0$ étant un point singulier pour $f(z)$, il faut et il suffit, pour que la suite $\sqrt[n]{|O_n|}$ ait une limite ordinaire, que la suite $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}|f^{(n)}(\sigma)|}$ ait, aussi, une limite ordinaire.*

La condition est suffisante. — En effet, appelons l la limite inférieure qui figure au premier membre de (6). Soit δ un nombre positif fixe plus petit que $\frac{1}{\sigma} - l$. A partir d'une valeur de n, suffisamment grande, on a

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(\sigma)|>\left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n,$$

$$\frac{1}{n!}|B_n|<\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}-\delta+l\right)\right]^n,$$

donc

$$\frac{1}{n!}|A_n|>\left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n\left[1-\left(\frac{1-\sigma\delta+\sigma l}{2(1-\delta\sigma)}\right)^n\right],$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}|A_n|}\geqq\frac{1}{\sigma}-\delta,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}|A_n|}=\frac{1}{\sigma}, \tag{10}$$

car le signe $>$ est irréalisable (1re observation).

De (10) on tire

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|O_n|}=1. \tag{11}$$

De (3) et (11) on déduit l'existence d'une *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{|O_n|}$.

La condition est nécessaire. — En effet, le point $z=0$ étant un point *singulier* pour $f(z)$, et la suite $\sqrt[n]{|O_n|}$ tendant *régulièrement* vers sa limite, on a : (3) et (11). De (11) on tire (10) et de celle-ci on déduit

$$\frac{1}{n!}|A_n|>\left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n \tag{12}$$

pour tout $n\geqq n_0\equiv n_0(\delta)$, δ en étant un nombre positif fixe plus petit que $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}-l\right)$.

De (6) on déduit que : pour tout $n\geqq n_0$,

$$\frac{1}{n!}|B_n|<\left(\frac{1}{\sigma}-2\delta\right)^n. \tag{13}$$

D'après (12) et (13), pour $n\geqq n_0$, on a

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(\sigma)|>\left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n\left[1-\left(\frac{1-2\sigma\delta}{1-\sigma\delta}\right)^n\right],$$

d'où

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |f^{(n)}(\sigma)|} \geqq \frac{1}{\sigma} - \delta,$$

donc

(14) $$\underline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |f^{(n)}(\sigma)|} \geqq \frac{1}{\sigma}.$$

D'autre part, on a

(15) $$\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |f^{(n)}(\sigma)|} = \frac{1}{\sigma}$$

(le point $z = 0$ étant un point *singulier*).

D'après (14) et (15) on conclut l'existence de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{\frac{1}{n!} |f^{(n)}(\sigma)|}$, pour $n \to \infty$.

Par contre, si le point $z = 0$ est *ordinaire* pour $f(z)$, il peut exister une *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{\frac{1}{n!} |f^{(n)}(\sigma)|}$ sans qu'il en existe pour $\sqrt[n]{|O_n|}$, et inversement.

Je crois utile, pour la suite, en ce qui concerne l'existence de la limite ordinaire de la suite $\sqrt[n]{|O_n|}$ de faire une autre remarque, en me basant sur un théorème de M. Valiron.

Rappelons que, *si la suite* λ_n *est telle que*

(16) $$\overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0,$$

les abscisses C *et* C′ *sont égales*. M. Valiron (¹) a montré que, dans l'hypothèse (16), les abscisses C et C′ peuvent être calculées à l'aide de la formule

(17) $$C = C' = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \rho_n}{\lambda_n}.$$

Or, *quand les limites supérieures qui figurent dans les formules de M. Valiron et* (16) *se transforment en des limites*

(¹) G. VALIRON, *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 52, 1924).

ordinaires, c'est-à-dire, quand on a

$$(16') \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0,$$

$$(17') \qquad C = C' = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \rho_n}{\lambda_n},$$

alors, il existe une limite ordinaire de $\sqrt[n]{P_n}$, *pour* $n \to \infty$, P_n *étant la fonction* O_n *appliquée à la série*

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \, e^{-z\lambda_n}.$$

En effet, d'après le théorème de M. Valiron, l'abscisse de convergence de la série

$$(19) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\lambda_n}$$

est égale à zéro. Donc, d'après un théorème de M. Landau (¹) le point $z = 0$ est singulier pour la fonction analytique définie par la série (19). Donc, si l'on pose

$$Q_n = \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega) \leqq \lambda_m \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega)} \lambda_m^n \, e^{-\sigma\lambda_m},$$

en vertu du critère de M. Ostrowski et de la deuxième observation on a

$$(20) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{Q_n} = 1.$$

Moyennant un calcul facile on voit que, d'après (16'), la limite supérieure figurant au premier membre de (20) se transforme en une limite ordinaire, c'est-à-dire, on a

$$(20') \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{Q_n} = 1.$$

D'après (17'), étant donné un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, il existe

---

(¹) E. LANDAU, *Ueber einen Satz von Tschebyschef* (*Mathem. Annalen*, t. 61, 1905).

un $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ tel que si l'on prend

$$\frac{n}{\sigma}(1-\omega) \leqq \lambda_m \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega), \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

on a

$$e^{-\varepsilon\lambda_\mu} < \rho_m < e^{\varepsilon\lambda_\mu}, \tag{21}$$

μ étant la valeur de m pour laquelle

$$\lambda_\mu \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\mu+1} > \frac{n}{\sigma}(1+\omega)$$

De (21) on tire

$$e^{-\varepsilon\lambda_\mu} Q_n < P_n < e^{\varepsilon\lambda_\mu} Q_n,$$

et de celle-ci

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \sqrt[n]{Q_n} < \sqrt[n]{P_n} < e^{\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \sqrt[n]{Q_n}. \tag{22}$$

De (20'), (22) et de la première observation faite au critère de M. Ostrowski on déduit

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{P_n} \leqq 1. \tag{23}$$

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{P_n} \leqq 1. \tag{24}$$

En prenant des limites, pour $\varepsilon \to 0$, dans (23) et (24), et en rapprochant les égalités qui en résultent, on conclut l'existence de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{P_n}$.

Cette dernière remarque peut être utile dans les applications des théorèmes II et III.

Si la série (1) se réduit à une série potentielle, $\lambda_n \equiv n$, de l'existence de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{p_n}$, on tire l'existence de la *limite ordinaire* pour $\sqrt[n]{R_n}$, R_n étant la fonction O_n appliquée à la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-nz}.$$

Cette affirmation peut se démontrer directement, ou bien se déduire du corollaire que nous avons tiré du théorème de M. Valiron.

Introduisons les notations suivantes : $p \equiv p(n, \sigma, \omega)$ est le *plus petit* indice pour lequel λ_m reste *supérieur* (*au sens large*) à $\frac{n}{\sigma}(1-\omega)$; $q \equiv q(n, \sigma, \omega)$ est le *plus grand* indice pour lequel λ_m reste *inférieur* (*au sens large*) à $\frac{n}{\sigma}(1+\omega)$, σ et ω étant deux valeurs arbitraires *fixes*, telles que : $\sigma > C$, et $0 < \omega < 1$. Posons : $d_n \equiv d \equiv q - p > 0$. Appelons Φ_n la plus grande (au sens large) des valeurs de $|\varphi_m - \varphi_{m+1}|$, pour $p \leqq m \leqq q$.

Théorème I. — *Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1° *les abscisses de convergence simple et absolue de* (1) *sont égales ;*

2° *il existe un couple de valeurs σ et ω tel que la limite supérieure du produit $d_n \Phi_n$ est plus petite que* $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

alors, le point réel de la droite de convergence de la série (1) *est singulier pour* $f(z)$.

Démonstration. — Sans restreindre la généralité on peut supposer $C = C' = 0$; il faut, alors, démontrer la singularité de l'origine pour $f(z)$. Avec les notations introduites, la fonction O_n s'écrit

$$O_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \sum_{m=p}^{q} a_m \lambda_m^n e^{-\sigma\lambda_m}.$$

Appelons O'_n, O''_n et P_n les fonctions qu'on obtient en substituant dans cette dernière expression $\rho_m \cos\varphi_m$, $\rho_m \sin\varphi_m$ et ρ_m, respectivement, à la place de a_m. En outre, posons

$$S_n \equiv \left(\frac{n}{\sigma e}\right)^n P_n,$$

$$A_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1} \left[(\cos\varphi_m - \cos\varphi_{m+1}) \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} \right],$$

$$B_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1} \left[(\sin\varphi_m - \sin\varphi_{m+1}) \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} \right],$$

$$C_n^2 \equiv \left(\frac{A_n}{S_n} + \cos\varphi_q\right)^2 + \left(\frac{B_n}{S_n} + \sin\varphi_q\right)^2 \geqq 0.$$

En appliquant la transformation d'Abel aux expressions de O'_n

et O''_n, on a

$$O'_n = P_n \cos\varphi_q + \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n A_n,$$

$$O''_n = P_n \sin\varphi_q + \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n B_n,$$

d'où

(25) $$|O_n| = P_n C_n.$$

Soit α un nombre *fixe* compris entre la limite supérieure de $d_n \Phi_n$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En vertu de la deuxième condition il existe un $n_0 \equiv n_0(\alpha)$ tel que pour tout $n \geqq n_0$, on a

$$\Phi_n < \frac{\alpha}{d},$$

donc, pour tout m compris entre $p \geqq p_0 \equiv p(n_0)$ et $q \geqq q_0 \equiv q(n_0)$, on a

(26) $$|\varphi_m - \varphi_{m+1}| < \frac{\alpha}{d}.$$

De (26) on déduit : *pour tout m compris entre $p \geqq p_0$ et $q \geqq q_0$ on a*

(27) $$|\cos\varphi_m - \cos\varphi_{m+1}| < \frac{\alpha}{d},$$

(28) $$|\sin\varphi_m - \sin\varphi_{m+1}| < \frac{\alpha}{d}.$$

D'après (27), pour $n \geqq n_0$, on a

(29) $$|A_n| < \frac{\alpha}{d} \sum_{m=p}^{q-1} \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} = \frac{\alpha}{d} \sum_{j=p}^{q} (q-j)\rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} < \alpha S_n$$

et, d'une façon analogue, d'après (28), pour $n \geqq n_0$ on a

(30) $$|B_n| < \alpha S_n.$$

C_n est le module de la somme de deux nombres complexes : l'un desquels a son module *constamment égal à l'unité*, et l'autre, d'après (29) et (30), a son module *plus petit que* $\alpha\sqrt{2} < 1$, pour $n \geqq n_0$. Donc, d'après ceci et (25), pour $n \geqq n_0$, on a

(31) $$|O_n| > (1 - \alpha\sqrt{2}) P_n.$$

D'autre part, puisque $C' = 0$ (première condition), en vertu d'un théorème de M. Landau ([1]), le point $z = 0$ est singulier pour la fonction analytique définie par la série (18), donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{P_n} = 1. \tag{32}$$

De (31), (32) et en vertu de la première observation que nous avons faite au critère de M. Ostrowski, on tire

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1,$$

c'est-à-dire, le point $z = 0$ est *singulier* pour $f(z)$.

Ce théorème représente une généralisation partielle, aux séries de Dirichlet, d'un théorème classique de MM. Lecornu ([2]), Fabry ([3]), concernant la théorie des séries potentielles. En effet, en appliquant le théorème antérieur à une série de Taylor, l'on obtient : *Si dans la série potentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dont le rayon de convergence est R, *on a*

$$|n(\varphi_n - \varphi_{n+1})| < K \equiv \text{const.}$$

pour tout n, alors : le point $z = R$ *est singulier pour la fonction analytique définie par cette série;* c'est-à-dire, on a un cas particulier du théorème de MM. Lecornu-Fabry.

Remarquons que : sous la deuxième condition du Théorème I, *la différence* $(\varphi_n - \varphi_{n+1})$ *tend régulièrement vers zéro.* Mais le point $z = C = C'$ peut être singulier sans que ceci se vérifie. Le théorème suivant est un exemple de ce fait.

Théorème II. — *Si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

([1]) E. Landau, *loc. cit.*

([2]) Lecornu, *Sur les séries entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 349-352).

([3]) E. Fabry, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux* (*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3ᵉ série, t. XIII, 1896).

1° *les abscisses de convergence simple et absolue de* (1) *sont égales;*

2° *il existe un couple de valeurs* σ *et* ω *tel que la limite inférieure du produit* $d_n \Phi_n$ *est plus petite que* $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3° *il existe une limite ordinaire de*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,g^{(n)}(\sigma)\,|},$$

$g(z)$ *étant la fonction analytique définie par la série* (18);

alors, le point réel de la droite de convergence de la série (1) *est singulier pour* $f(z)$.

Démonstration. — Soit β un nombre *fixe* compris entre la limite inférieure de $d_n \Phi_n$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En vertu de la deuxième condition *il existe une infinité de valeurs de n, que j'indiquerai avec* N, telle qu'en reprenant les calculs faits dans la démonstration du théorème antérieur on a

$$|\,A_N + iB_N\,| < S_N \beta \sqrt{2},$$

donc

$$C_N > (1 - \beta\sqrt{2}),$$

d'où

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sqrt[N]{C_N} \geqq 1. \tag{33}$$

En vertu de la troisième condition et de la deuxième observation que nous avons faite au critère de M. Ostrowski, il existe une *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{P_n}$, pour $n \to \infty$, laquelle, d'après la première condition, est

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n} = 1. \tag{34}$$

De (25), (33) et (34) on tire

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sqrt[N]{|\,O_N\,|} \geqq 1. \tag{35}$$

Comme $\sqrt[N]{|\,O_N\,|}$ est une suite *partielle* de la suite $\sqrt[n]{|\,O_n\,|}$, de (35) on conclut

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1,$$

c'est-à-dire, le point $z = 0$ est *singulier* pour $f(z)$.

Remarquons que : *sous la deuxième condition de ce théorème, la limite supérieure de la différence* ($\varphi_n - \varphi_{n+1}$) *peut être infinie.*

Théorème III. — *Si les quatre conditions suivantes se vérifient :*

1° *les abscisses de convergence simple et absolue de* (1) *sont égales ;*

2° *la partie réelle du coefficient, a_n, n'est pas négative ;*

3° *l'argument, φ_n, de a_n (pour les valeurs de n telles que $a_n \neq 0$) est tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos\varphi_n} = 1; \tag{36}$$

4° *il existe un couple de valeurs σ et ω, tel que le rapport $\frac{q}{n}$ est borné ;*

alors : le point réel de la droite de convergence de la série (1) *est singulier pour $f(z)$.*

Démonstration. — D'après la deuxième condition on a

$$|O_n| \geqq O'_n \geqq 0. \tag{37}$$

Appelons $\cos\varphi_\xi$ la plus petite (au sens large) des valeurs de $\cos\varphi_m > 0$, pour $p \leqq m \leqq q$. Alors, d'après ceci et (37), on a

$$|O_n| \geqq P_n \cos\varphi_\xi, \qquad [p \leqq \xi \equiv \xi(n, \sigma, \omega) \leqq f]. \tag{38}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\log\cos\varphi_\xi}{n} = \frac{\xi}{n}\,\frac{\log\cos\varphi_\xi}{\xi}. \tag{39}$$

De la (36) on tire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\cos\varphi_\xi}{\xi} = 0, \tag{40}$$

et en vertu de la quatrième condition on a

(41) $$0 < \frac{\xi}{n} < K = \text{const.}$$

De (39), (40) et (41) on tire

(42) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = 1.$$

De la première condition et du théorème de M. Landau (¹) l'on déduit

(43) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{P_n} = 1.$$

De (37), (42) et (43) on conclut

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1,$$

c'est-à-dire, le point $z = 0$ est *singulier* pour $f(z)$.

Évidemment, si la limite ordinaire de

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!} |g^{(n)}(z)|}$$

existe, pour $n \to \infty$, la condition (36) peut se remplacer par la suivante (qui est plus générale)

(36′) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi} = 1.$$

On peut rattacher ce dernier théorème à celui de M. Fekete (²) $\left(\text{dans lequel on exige } |\varphi_n| \leq \tau < \frac{\pi}{2}, \ \tau = \text{fixe}\right)$.

On voit, donc, comme *en utilisant le critère de M. Ostrowski, complété avec les observations faites ci-dessus, on peut généraliser (partiellement ou totalement) aux séries générales de Dirichlet, dont les abscisses de convergence simple et absolue sont égales, certains théorèmes appartenant à la théorie des singularités des séries potentielles.*

(¹) LANDAU, *loc. cit.*

(²) M. FEKETE, *Sur les séries de Dirichlet* et *Sur un théorème de M. Landau* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 150 et 151, 1910).