BULLETIN DE LA S. M. F.

J. FAVARD

Sur l'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 102-113

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__102_0>

SUR L'INTERPOLATION;

Par M. J. Favard.

1. Le présent travail apporte une contribution à l'étude de deux questions distinctes relatives à l'interpolation des fonctions continues d'une variable. L'exposé d'une façon nouvelle de poser le problème de l'interpolation, ainsi que la démonstration d'un théorème général d'existence sur ce sujet, constitue la première des questions traitées (§ 3). Quant à la deuxième, c'est l'application d'une remarque simple à la définition de nouvelles classes de quasi-analyticité, dans un ordre d'idées voisin de celui de M. S. Bernstein, et le développement de quelques exemples.

2. Soit $f(x)$ une fonction définie et continue pour $0 \leqq x \leqq 1$; et soit, pour tout entier n positif, une suite de nœuds

$$\{ \alpha_\nu^n \} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \qquad 0 \leqq \alpha_\nu^n \leqq 1; \qquad \alpha_\nu^n < \alpha_{\nu+1}^n.$$

Le polynome d'interpolation $P_\alpha^n(x)$ qui, aux nœuds $\{ \alpha_\nu^n \}$ prend les mêmes valeurs que $f(x)$, ne converge pas forcément vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment; en d'autres termes, même si la distance maxima entre deux nœuds d'ordre n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, il existe des fonctions $f(x)$, et des valeurs de x, telles que la suite $\{ P_\alpha^n(x) \}$ diverge.

Mais, de même que la divergence des séries de Fourier de certaines fonctions continues n'a pas entraîné leur abandon, mais a donné un essor important aux méthodes de sommation, de même, ici, le problème de l'interpolation peut être posé d'une façon plus large amenant alors une solution positive; nous n'exigerons pas alors que le polynome d'interpolation prenne en α_ν^n la valeur $f(\alpha_\nu^n)$, mais seulement une valeur voisine, combinaison linéaire de l'ensemble des valeurs $f(\alpha_\nu^n)$.

Dans le cas où les $\{ \alpha_\nu^n \}$ divisent l'intervalle $(0, 1)$ en parties égales, c'est-à-dire lorsque $\alpha_\nu^n = \frac{\nu}{n}$, M. S. Bernstein (¹) a démontré que la suite de polynomes

$$B_n^f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

tend uniformément vers $f(x)$, dans $0 \leq x \leq 1$, lorsque n augmente indéfiniment (²).

Ce résultat se démontre très simplement en remarquant que $B_n^f(x)$ représente. espérance mathématique d'un joueur engageant n parties, à un jeu où la probabilité de gain est x pour chaque partie, et qui touchera $f\left(\frac{\nu}{n}\right)$ francs s'il gagne ν parties; il suffit alors d'appliquer le théorème de Bernoulli. Cette façon de voir rend les résultats à peu près évidents et facilite les généralisations relatives soit à l'emploi d'autres lois de probabilité, soit aux fonctions de plusieurs variables.

On remarque que les inégalités

$$m \leq f(x) \leq M$$

entraînent

$$m \leq B_n^f(x) \leq M,$$

il s'ensuit donc que les polynomes

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left\{ f\left(\frac{\nu}{n}\right) + \varepsilon_{\nu,n} \right\} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

tendent uniformément vers $f(x)$ pourvu que

$$|\varepsilon_{\nu,n}| \leq \varepsilon_n \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En particulier on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} f(\alpha_\nu^n)\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = f(x),$$

(¹) S. Bernstein, *Communications, Soc. Math. Kharkow*, 2ᵉ série, t. 13, 1912, p. 1-2.

(²) Bien entendu tout résultat établissant un mode de convergence de $P_\alpha^n(n)$ vers $f(x)$ peut aussi être utilisé pour chercher une suite de polynones convergeant vers $f(x)$. Par exemple, un résultat de Marcinkiewicz (*Studia Math.*, t. 6, 1936) montre que le procédé de sommation de Poisson s'applique aux polynomes trigonométriques d'interpolation d'une fonction périodique en $2n+1$ points équidistants.

pourvu que, en posant

$$\alpha_\nu^n = \frac{\nu}{n} + \delta_\nu^n,$$

on ait [1]

$$|\delta_\nu^n| \leqq \delta_n \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \qquad \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0.$$

Donnons-nous, à présent, pour chaque valeur de n, un ensemble de $(n+1)$ nœuds $\{\alpha_\nu^n\}$ et supposons que

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_{\nu+1}^n - \alpha_\nu^n < \alpha_n & (\nu = -1, 0, \ldots, n); \\ \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0 & (\alpha_{-1}^n = 0 \text{ et } \alpha_{n+1}^n = 1). \end{cases}$$

A chaque fonction $f(x)$ faisons correspondre, par exemple, la onction continue $\varphi_n(x)$ telle que

1° $\varphi(\alpha_\nu^n) = f(\alpha_\nu^n)$;
2° $\varphi(x)$ est linéaire entre α_ν^n et $\alpha_{\nu+1}^n$;
3° $\varphi(x)$ est une constante pour $0 \leqq x \leqq \alpha_0^n$ et pour $\alpha_n^n \leqq x \leqq 1$.

En vertu de nos hypothèses on a alors, uniformément,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x),$$

par suite, en vertu de la remarque précédente, la suite de polynomes

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

tend uniformément vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment. En remarquant que $\varphi_n\left(\frac{\nu}{n}\right)$ est une combinaison linéaire de deux $f(\alpha_\nu^n)$ au plus, nous obtenons le résultat connu suivant :

A tout ensemble de nœuds

$$\{\alpha_\nu^n\} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$$

satisfaisant à (1), *on peut faire correspondre une suite de poly-*

---

[1] Ainsi la connaissance des valeurs d'une primitive de $f(x)$ aux nœuds $\left\{\frac{\nu}{n}\right\}$ permet de former une suite de polynomes convergeant vers $f(x)$.

nomes

$$\{ A_\nu^n(x) \}$$

de degré n au plus, tels que, quelle que soit la fonction $f(x)$ continue dans $0 \leqq x \leqq 1$, *la suite de polynomes*

$$A_n^f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\alpha_\nu^n)\, A_\nu^n(x)$$

converge uniformément vers $f(x)$.

On peut même s'arranger pour que

$$A_\nu^n(x) \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1); \qquad \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^n(x) = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^n\, A_\nu^n(x) = x.$$

Lorsque les deux premières conditions sont réalisées, la condition nécessaire et suffisante pour que $A_n^f(x)$ tende uniformément vers $f(x)$, quelle que soit la fonction $f(x)$ est que cela ait lieu lorsque $f(x)$ est un polynome.

La condition est évidemment nécessaire; pour voir qu'elle est suffisante, écrivons

$$f(x) = P_m(x) + E_m(x),$$

où $P_m(x)$ désigne un polynome de degré m suffisamment élevé pour que $|E_m(x)| \leqq \varepsilon$. On a alors, pour toute valeur de n,

$$\begin{aligned} |f(x) - A_n^f(x)| &\leqq |P_m - A_n^{P_m}| + |E_m - A_n^{E_m}| \\ &\leqq |P_m - A_n^{P_m}| + |E_m| + |A_n^{E_m}|, \end{aligned}$$

choisissant n assez grand pour que

$$|P_m - A_n^{P_m}| \leqq \varepsilon,$$

il viendra

$$|f(x) - A_n^f(x)| \leqq 3\varepsilon,$$

car les hypothèses faites entraînent

$$|A_n^{E_m}| \leqq \varepsilon$$

et cela achève la démonstration.

Avec notre procédé de démonstration, quelques $A_\nu^n(x)$, dans $A_n^f(x)$, peuvent être identiquement nuls, mais, par une modification facile, on peut s'arranger pour qu'aucun d'eux ne le soit.

On voit de même que le procédé permet de trouver des méthodes d'interpolation convergentes, pour les fonctions périodiques, au moyen de polynomes trigonométriques.

On voit aussi et c'est là-dessus que nous insistons, de quel arbitraire dépend la suite $\{A_\nu^n(x)\}$ et, dans cette diversité, un choix ne peut être fait, *a priori*, que par des raisons de simplicité, raisons subjectives.

3. Pour certaines classes de fonctions cependant, on peut, comme nous allons le montrer, compléter dans une mesure, la détermination des $A_\nu^n(x)$ par des conditions extrémales [1].

Soit $(\mathcal{C})$ une classe de fonctions continues où une fonctionnelle $F(f)$ a été définie, avec :

1° $F(f) \geqq 0$; 2° $F(f) = 0$ si et seulement si f est une constante; 3° avec f, cf appartient aussi à la classe quelle que soit la constante c et l'on a $F(cf) = |c|\,F(f)$. Posons

$$\rho_n^A(f) = \max_{0 \leqq x \leqq 1} \left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} f(\alpha_\nu^n)\, A_\nu^n(x) \right|$$

considérons l'écart normalisé $\frac{\rho_n^A(f)}{F(f)}$, la borne supérieure ρ_n^A de ce quotient, quand elle est finie [2], sera la mesure de l'excellence du procédé d'interpolation employé dans la classe.

Soit $\rho_n^\alpha(C)$ *la borne inférieure de* $\rho_n^A(\mathcal{C})$ *pour toutes les suites de polynomes* $\{A_\nu^n(x)\}$ *possibles, on va montrer qu'il existe au moins une suite de polynomes* $\{E_\nu^n(x)\}$ *telle que*

$$\rho_n^\alpha(\mathcal{C}) = \rho_n^E(\mathcal{C}), \tag{2}$$

à condition qu'il existe dans la classe $(n+1)$ *fonctions* $\{f_i(x)\}$ *telles que le déterminant*

$$|f_i(\alpha_\nu^n)| \quad (i, \nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

---

[1] Le rapprochement avec des conditions extrémales, dont j'ai déjà eu l'occasion de m'occuper dans d'autres questions, s'impose ici.

[2] Il en sera ainsi lorsque, de la valeur de $F(f)$, on pourra déduire une borne supérieure de l'oscillation de f.

soit différent de zéro (ce qui sera le cas lorsque la classe $\mathcal{C}$ contiendra les polynomes).

Soit en effet

$$^{p}A = \{ {}^{p}A_{\nu}^{n}(x) \} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

une suite de polynomes servant de base à l'interpolation et telle que

$$(4) \qquad \lim_{p \to \infty} \rho_n^{^{p}A}(\mathcal{C}) = \rho_n^{\alpha}(\mathcal{C}),$$

montrons que, de la suite $\{ {}^{p}A_{\nu}^{n}(x) \}$ on peut, pour toute valeur de ν, extraire une autre suite tendant vers une limite.

En effet, choisissons une suite de $(n+1)$ fonctions $\{f_i\}$ satisfaisant à (3) et telles que $F(f_i) = 1$, on aura alors

$$(5) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} f_i(\alpha_{\nu}^{n})\, {}^{p}A_{\nu}^{n}(x) = f_i(x) + \varepsilon_i^{p}(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

avec

$$|\varepsilon_i^{p}(x)| \leqq \rho_n^{^{p}A}(\mathcal{C}),$$

c'est-à-dire que $\varepsilon_i^{p}(x)$ est borné quels que soient i et p. La résolution des équations (5), linéaires en ${}^{p}A_{\nu}^{n}(x)$, nous permet donc de conclure que les polynomes $\{ {}^{p}A_{\nu}^{n}(x) \}$ sont bornés, pour $0 \leqq x \leqq 1$, et, par suite, que leurs coefficients sont bornés. Des suites

$${}^{p}A_{\nu}^{n}(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots) \quad (p \text{ seul variable}),$$

on peut donc extraire d'autres suites tendant vers des limites $\{ E_{\nu}^{n}(x) \}$. Je dis qu'on a alors la relation (2). En effet on peut trouver, dans $(\mathcal{C})$, une fonction φ telle que

$$\left| \frac{\rho_n^{E}(\varphi)}{F(\varphi)} - \rho_n^{E}(\mathcal{C}) \right| \leqq \varepsilon,$$

or, pour une infinité de valeurs de p, on a

$$\left| \frac{\rho_n^{^{p}A}(\varphi)}{F(\varphi)} - \frac{\rho_n^{E}(\varphi)}{F(\varphi)} \right| \leqq \varepsilon;$$

de là

$$\rho_n^{E}(\mathcal{C}) - 2\varepsilon \leqq \frac{\rho_n^{^{p}A}(\varphi)}{F(\varphi)} \leqq \rho_n^{^{p}A}(\mathcal{C}) \leqq \rho_n^{\alpha}(\mathcal{C})$$

et enfin, puisque ε est aussi petit que l'on veut,

$$\rho_n^{\mathrm{E}}(\mathcal{C}) \leqq \rho_n^{\alpha}(\mathcal{C}),$$

ce qui entraîne (2) d'après la définition de $\rho_n^{\alpha}(\mathcal{C})$.

Ainsi, étant donnée une suite de nœuds $\{\alpha_\nu^n\}$ d'ordre n, il existe, pour une classe $\mathcal{C}$ de fonctions, un meilleur procédé d'interpolation. Ce procédé est unique s'il existe, dans la classe, une fonction $f(x)$, ne s'annulant en aucun des nœuds $\{\alpha_\nu^n\}$, et dont le polynome, de degré n, de la meilleure approximation est aussi le polynome de la meilleure interpolation.

4. Pourra-t-on maintenant choisir les nœuds $\{\alpha_\nu^n\}$ de façon que la borne inférieure de $\rho_n^{\alpha}(\mathcal{C})$, lorsque les nœuds varient, soit atteinte pour des nœuds particuliers ?

Il suffira que tout procédé d'interpolation procédant avec moins de $(n+1)$ nœuds, et des polynomes d'ordre n au plus, donne une erreur normalisée supérieure à celle relative à $(n+1)$ nœuds particuliers, lorsque $\rho_n^{\alpha}(\mathcal{C})$ est une fonction continue des nœuds. Je ne possède cependant pas de théorème général permettant d'affirmer l'existence d'une suite extrémale de $(n+1)$ nœuds.

J'avoue aussi ne pas être en mesure de donner d'exemple d'un meilleur procédé d'interpolation pour une classe simple.

5. **Classes nouvelles de fonctions quasi analytiques.** — Soit E un ensemble fermé infini de nombres de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Il existe une fonction $\varphi_{\mathrm{E}}(n)$ telle que, lorsqu'un polynome, de degré n au plus, prend des valeurs non supérieures à 1, en module, sur E, alors son module ne dépasse pas $\varphi_{\mathrm{E}}(n)$ sur l'intervalle $(0 \leqq x \leqq 1)$.

Prenons en effet $(n+1)$ points différents sur E, soient a_i, et soient ε_i les valeurs prises par un polynome $\mathrm{P}_n(x)$ $(|\varepsilon_i| \leqq 1)$; posons

$$\mathrm{A}_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i),$$

on a

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{A}_{n+1}(x) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon_i}{(x - a_i)\,\mathrm{A}'_{n+1}(a_i)}.$$

Or, on a évidemment

$$\left|\frac{A_{n+1}(x)}{x-a_i}\right| \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

car le premier membre est un produit de facteurs inférieurs à 1, il vient donc

$$|P_n(x)| \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|\varepsilon_i|}{|A'_{n+1}(a_i)|} < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|A'_{n+1}(a_i)|},$$

ce qui, pour $\varphi_E(n)$, donne la limitation

$$\varphi_E(n) < \min_{(a_i \varepsilon E)} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|A'_{n+1}(a_i)|}.$$

6. La fonction $\varphi_E(n)$ n'est connue avec précision que quand E est un segment [contenu dans $(0 \leqq x \leqq 1)$] et, dans ce cas, $\varphi_E(n)$ est asymptotique à une exponentielle. Il y aurait lieu de montrer qu'en général, lorsque E ne contient aucun segment, $\varphi_E(n)$ croît plus vite qu'une exponentielle; à défaut d'une telle preuve, les fonctions $\varphi_E(n)$ qui interviennent dans ce qui suit seront supposées croître au moins exponentiellement et avec une rapidité suffisante.

Soit alors $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, supposons que, pour une infinité de valeurs de n, on puisse trouver un polynome $P_n(x)$ tel que

$$(6) \qquad |f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{M_n}{\varphi_E(n)},$$

où M_n est un nombre tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Je dis que la fonction $f(x)$ est identiquement nulle si, sur E, on a $f(x) = 0$. De l'inégalité (6), on déduit en effet, sur E,

$$|P_n(x)| \leqq \frac{M_n}{\varphi_E(n)};$$

d'où, pour $0 \leqq x \leqq 1$,

$$|P_n(x)| \leqq M_n,$$

puis enfin

$$|f(x)| \leqq M_n\left(1 + \frac{1}{\varphi_E(n)}\right) \leqq 2M_n.$$

Cette inégalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n, on voit que $f(x)$ est identiquement nulle.

Plus généralement, soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b); supposons que l'inégalité (6) ait lieu dans (a, b) pour une infinité de valeurs de n, je dis que $f(x)$ est identiquement nulle du moment qu'elle l'est sur un ensemble E_1 semblable à E, mais, par ailleurs, de diamètre aussi faible que l'on veut.

Soit en effet k le rapport de similitude, on voit de suite que $f(x)$ est identiquement nulle dans le segment de longueur k contenant E_1, ce qui, dans ce segment, donne

$$|P_n(x)| \leqq \frac{M_n}{\varphi_E(n)}.$$

D'après le résultat rappelé ci-dessus, à tout segment contenant le précédent correspond un nombre ρ, supérieur à 1, tel que, dans ce segment,

$$|P_n(x)| \leqq \frac{M_n \rho^n}{\varphi_E(n)};$$

donc, en vertu de l'hypothèse faite sur $\varphi_E(n)$, les polynomes $P_n(x)$ tendent donc uniformément vers zéro dans tout segment; $f(x)$ est donc identiquement nulle dans (a, b).

7. Ces remarques conduisent immédiatement à la définition de nouvelles classes de quasi-analyticité, intermédiaires entre les classes de Denjoy et les classes de Bernstein et que nous appellerons les classes $E_{\{n\}}$.

Une telle classe sera définie au moyen d'un ensemble fermé E de $(0 \leqq x \leqq 1)$ et au moyen d'une suite infinie $\{n\}$ d'entiers

$$(n_1, n_2, \ldots); \quad (n_i < n_{i+1}).$$

Une fonction continue $f(x)$ définie pour $a \leqq x \leqq b$, appartiendra à la classe $E_{\{n\}}$ dans ce segment si, pour tout entier de la suite précédente, il existe un polynome $P_n(x)$ tel que

$$(7) \qquad |f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{M_n}{\varphi_E(n)} \qquad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} M_n = 0.$$

Une fonction de la classe est définie par les valeurs qu'elle prend sur un ensemble E_1, quelconque, semblable à E, *mais aussi petit que l'on veut.*

S'il existait en effet deux fonctions prenant les mêmes valeurs sur E_1, alors leur différence $f(x)$ satisferait à (7) pour les valeurs de la suite $\{n\}$ et s'annulerait sur E_1, or cela entraîne que $f(x)$ est identiquement nulle comme nous l'avons déjà vu.

Pour qu'une classe $E_{\{n\}}$ contienne des fonctions autres que les fonctions analytiques, il faut que les nombres n_i croissent, avec i, assez rapidement pour qu'une inégalité de la forme

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq A\rho^n \qquad (\rho < 1)$$

ne puisse obligatoirement avoir lieu pour toutes les valeurs de n.

On voit combien la définition de ces classes est proche de celle des classes de M. S. Bernstein.

8. Traitons à présent quelques exemples :

1° Pour E prenons l'ensemble contenant les points

$$x = 0, \qquad x = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et évaluons une borne supérieure de $\varphi_E(n)$. En posant

$$A_{n+1}(x) = x\prod_{i=1}^{n}\left(x - \frac{1}{i}\right),$$

on trouve que

$$\frac{1}{|A'_{n+1}(0)|} = n!, \qquad \frac{1}{\left|A'_{n+1}\left(\frac{1}{k}\right)\right|} = k^n\binom{n}{k};$$

d'où

$$\varphi_E(n) \leqq n! + \sum_{k=1}^{n} k^n\binom{n}{k} < n^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (2n)^n.$$

On se rend d'autre part facilement compte que $\log\varphi_E(n)$ est de l'ordre de $n\log n$.

2° Prenons pour E l'ensemble $x = 0$; $x = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et posons alors

$$A_{n+1}(x) = x\prod_{i=1}^{n}\left(x - \frac{1}{2^i}\right)$$

on trouve

$$\frac{1}{|A'_{n+1}(0)|} = 2^{\frac{n^2+n}{2}},$$

$$\frac{1}{\left|A'_{n+1}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right|} = \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{h=1}^{n-k}(2^h-1)\prod_{i=1}^{k-1}(2^i-1)} < \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{h=1}^{n-k}2^{h-1}\prod_{i=1}^{k-1}2^{i-1}}$$

$$= 2^{(k+1)n-\frac{k^2-k+2}{2}},$$

on voit ainsi que

$$\varphi_E(n) < (n+1)2^{\frac{n^2+3n-2}{2}}.$$

Enfin un calcul simple permet de voir que $\log\varphi_E(n)$ est de l'ordre de n^2.

Quant aux exemples de fonctions quasi analytiques E, quelques indications suffiront, car, ici, il nous importe seulement de mettre en évidence l'existence des classes $E_{\{n\}}$.

1° La fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[n_k \operatorname{arc}\cos x]}{n_k} \qquad (n_h < n_{h+1})$$

lorsque les n_k sont suffisamment rares pour que

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{n_i}\right]\varphi_E(n_k) = 0.$$

$f(x)$ sera, dans l'intervalle $(-1, +1)$, quasi analytique E relativement à la suite $\{n_k\}$ et elle n'admettra pas de dérivée.

Ainsi la fonction définie par

$$n_1 = 1, \qquad n_{k+1} = 2(2n_k)^{n_k}$$

est déterminée par les valeurs qu'elle prend dans un ensemble semblable à celui examiné ci-dessus (1°).

2° La fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[n_k \operatorname{arc}\cos x]}{2k\varphi_E(n_{k-1})} \qquad [n_0 = 0,\ \varphi_E(0) = 1,\ n_k < n_{k+1}]$$

est aussi quasi analytique E, dans $(-1 \leqq x \leqq 1)$, relativement à la suite $\{n_k\}$, car on a, toujours si $\varphi_E(n)$ croît suffisamment vite,

$$|f(x) - P_{n_k}(x)| \leqq \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^h \varphi_E(n_{h-1})}$$

$$\leqq \frac{1}{k\, \varphi_E(n_k)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right] = \frac{1}{k\, \varphi_E(n_k)}.$$

Il suffit que n_k croisse assez rapidement pour que la fonction ne soit pas analytique mais, si cette croissance n'est pas trop rapide, $f(x)$ admettra des dérivées de tous les ordres.

Par exemple la fonction

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(k!)^2 \arc\cos x]}{2^k[2\{(k-1)!\}^2]^{[(k-1)!]^2}}$$

n'est pas analytique dans $(-1, +1)$ mais admet des dérivées de tous les ordres; elle est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un ensemble semblable à (1°).