BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 115-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__115_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. J. RADON SUR LES ENSEMBLES DE CORPS CONVEXES;

PAR M. PAUL VINCENSINI.

---

1. Dans un article des *Mathematische Annalen*, publié en 1921 ([1]), M. J. Radon a énoncé le théorème suivant, dont M. D. König a donné, par la suite ([2]) une élégante démonstration géométrique :

Étant donné, dans l'espace euclidien R_n *à* n *dimensions, un ensemble* $(\mathcal{E})$ *de corps convexes, en nombre fini ou infini, si les corps de* $(\mathcal{E})$ *ont* $n+1$ *à* $n+1$, *un point commun au moins, ils ont tous un point commun au moins.*

On déduit immédiatement du théorème précédent que :

Si l'ensemble $(\mathcal{E})$ *est tel, que les* $n+1$ *corps de l'un quelconque des groupes que l'on peut former avec* $n+1$ *éléments de* $(\mathcal{E})$ *soient à une distance d'un point fixe (variable d'un groupe à l'autre) inférieure ou au plus égale à une longueur donnée* d, *tous les corps de* $(\mathcal{E})$ *sont à une distance au plus égale à* d *d'un certain point fixe de l'espace (au moins).*

Nous entendons par distance d'un corps à un point O, le minimum de la distance d'un point quelconque du corps à O.

Nous nous proposons ici de montrer que ce dernier résultat reste valable si d, au lieu d'être une distance euclidienne, est une distance Minkowskienne, définie dans R_n par une hypersurface convexe (fermée et bornée) U à laquelle est adjoint un point

---

([1]) J. RADON, *Mengen Konvexer Körper die einen gemeinsamen Punkt enthalten* (*Mathematische Annalen*, t. 83, 1921, p. 113-115).

([2]) D. KÖNIG, *Über Konvexe Korper* (*Mathematische Zeitschrift*, 1922, p. 208-210).

intérieur O (centre Minkowskien). La distance Minkowskienne δ d'un point A à un point B de R_n s'obtient alors, en déplaçant U par translation de façon à amener O en B, et en formant le rapport

$$\delta = \frac{\text{distance euclidienne OA}}{\text{distance euclidienne OM}},$$

M étant le point où la demi-droite $\overrightarrow{OA}$ perce U.

La proposition que nous nous proposons d'établir est donc la suivante :

($\mathcal{E}$) *étant un ensemble de corps convexes de* R_n, *en nombre fini ou infini, si les différents groupes de* $n+1$ *corps de* ($\mathcal{E}$) *sont tels, que les corps de l'un quelconque des groupes sont à une distance Minkowskienne inférieure ou au plus égale à* δ *d'un certain point fixe de l'espace, il existe un point fixe* O *(au moins) de l'espace tel que tous les corps de* ($\mathcal{E}$) *soient à une distance Minkowskienne de* O *au plus égale à* δ.

2. $\mathfrak{U}$ étant une homothétique directe de U dans le rapport δ, regardons $\mathfrak{U}$ comme la frontière d'un corps convexe Σ de R_n, et désignons par (Σ) l'ensemble des corps convexes de R_n déduits du précédent par une translation arbitraire [(Σ) est l'ensemble des sphères Minkowskiennes de rayon δ de R_n]. Supposons que $n+1$ corps de l'ensemble ($\mathcal{E}$) soient à une distance Minkowskienne d'un point fixe I inférieure ou au plus égale à δ ; le corps de (Σ), dont le centre Minkowskien est I, a alors un point commun au moins avec chacun des $n+1$ corps envisagés ; réciproquement d'ailleurs, si chacun des $n+1$ corps a un point commun au moins avec un corps Σ de (Σ), chacun de ces corps est à une distance Minkowskienne d'un point de l'espace (le centre Minkowskien de Σ) au plus égale à δ. Il résulte de là que la proposition à établir peut être présentée sous la forme suivante, d'où la notion de distance Minkowskienne est exclue :

(A). *Étant donnés, dans l'espace euclidien à* **n** *dimensions, d'une part un ensemble de corps convexes* ($\mathcal{E}$), *et d'autre part l'ensemble* (Σ) *des corps convexes déduits d'un corps convexe* QUELCONQUE *par une translation arbitraire, si* ($\mathcal{E}$) *est tel que, pour chacun des groupes de* $n+1$ *corps que l'on peut former* *avec ses éléments il existe un corps Σ de (Σ) ayant un point commun au moins avec les $n+1$ corps du groupe, il existe alors un corps Σ (au moins) ayant un point commun au moins avec tous les corps de l'ensemble $(\mathcal{E})$.*

Prise sous cette forme, la proposition en vue peut, par l'intermédiaire de certaines séries linéaires de corps convexes, être transformée en celle de M. J. Radon énoncée au n° 1, ce qui en assure l'exactitude. Elle fournit un nouvel exemple de l'importance du rôle que les séries linéaires sont susceptibles de jouer, comme éléments de transformation, dans diverses questions relatives aux corps convexes, importance sur laquelle j'ai attiré l'attention dans un récent fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* (¹).

Les séries linéaires dont nous aurons à nous servir sont des séries de corps convexes à n dimensions de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, les corps extrêmes S, S′ étant situés dans des hyperplans parallèles π et π'. Tout hyperplan parallèle à π et π' situé entre π et π' coupe la série [S, S′] suivant l'un, S, de ses corps, et il est clair que, si P est un point quelconque de S, il existe au moins une droite passant par P et coupant respectivement π et π' en des points de S et S′.

3. Plongeons l'espace R_n, où se trouvent les ensembles de corps convexes $(\mathcal{E})$ et (Σ) qui interviennent dans le théorème à établir, dans un espace R_{n+1} à $n+1$ dimensions; R_n est un hyperplan de R_{n+1} que nous désignerons par π.

Soient, P un hyperplan fixe de R_{n+1} parallèle à π, et π' le symétrique de π par rapport à P. Prenons dans P un point quelconque O, et désignons par Σ' le symétrique, par rapport à O, d'un corps déterminé quelconque de l'ensemble (Σ); Σ' est un corps fixe de π', et il est clair que, si l'on fait décrire à O le plan P, le symétrique Σ de Σ' par rapport à O décrira, dans π, l'ensemble (Σ) que l'on considère dans l'énoncé (A) de la proposition à établir.

Cela étant, envisageons dans π l'ensemble $(\mathcal{E})$ de l'énoncé,

(¹) *Corps convexes; séries linéaires; domaines vectoriels;* fasc. 94, 1938.

dont les corps ont $n+1$ à $n+1$ un point commun au moins avec un corps de (Σ). Σ' détermine, avec les différents corps de $(\mathcal{E})$, un ensemble de séries linéaires $[\Sigma', \mathcal{E}]$, et la section de chacune de ces séries par l'hyperplan P est un certain corps *convexe* e; nous désignerons par (e) l'ensemble des corps ainsi définis. Considérons un groupe quelconque de $n+1$ corps $(\mathcal{E})$; il existe, par l'hypothèse, un corps Σ de (Σ) ayant au moins un point commun avec les $n+1$ corps envisagés. Σ est, comme l'on sait, symétrique du corps fixe Σ' de π' par rapport à un certain point O de P. Les $n+1$ séries linéaires dont les corps extrêmes sont Σ' et les $n+1$ corps $(\mathcal{E})$ considérés donnent, dans P, $n+1$ corps convexes de l'ensemble (e). Envisageons l'un, e, de ces $n+1$ corps, section par P de la série déterminée par Σ' et l'un, $\mathcal{E}$, des $n+1$ corps envisagés dans $(\mathcal{E})$. $\mathcal{E}$ et Σ ont, comme on l'a dit, un point commun au moins; soit ω ce point; si ω' est le point de Σ' symétrique de ω par rapport à O, la droite $\omega\omega'$, joignant deux points des corps extrêmes de la série $[\Sigma', \mathcal{E}]$, coupe tous les corps de la série, et en particulier le corps e (évidemment en O). Ainsi, les $n+1$ corps de (e) dont il est question plus haut ont un point commun au moins (le point O). (e) est comme l'on voit, un ensemble de corps convexes de l'espace P à n dimensions, jouissant de cette propriété que les corps de l'ensemble ont $n+1$ à $n+1$ un point commun au moins. Il résulte donc du théorème de J. Radon énoncé au début du n° 1 que *tous les corps de* (e) *ont un point commun au moins;* soit I ce point.

Il suffit maintenant d'introduire le symétrique Σ_1 de Σ' par rapport à I pour pouvoir conclure.

Envisageons les séries linéaires $[\Sigma', e]$ déterminées par Σ' et les différents corps de (e). Chacune de ces séries est, d'après la définition même de (e) prolongeable dans le sens $\Sigma' \rightarrow e$ au moins jusqu'à l'hyperplan π, et donne, dans π, un corps de l'ensemble $(\mathcal{E})$; d'ailleurs, l'ensemble des corps de $(\mathcal{E})$ provient, par ce procédé de prolongement, de l'ensemble des séries $[\Sigma', e]$.

Considérons une série quelconque $[\Sigma', e]$ relative à un corps déterminé e de (e), prolongeons-la jusqu'au corps $\mathcal{E}$ correspondant, et envisageons la série $[\Sigma', \mathcal{E}]$. Le point I étant dans e, il existe, comme on l'a fait remarquer au n° 2, une droite au moins passant par I et coupant π et π' en des points α et α' appartenant respectivement à $\mathcal{E}$ et Σ'. Le point α, qui appartient à $\mathcal{E}$, est symétrique de α' par rapport à I, et, de ce fait, appartient aussi à Σ_1 symétrique de Σ' par rapport à I. *$\mathcal{E}$ a donc un point commun au moins* (α) *avec* Σ_1.

Dans le raisonnement qui précède $\mathcal{E}$ est un corps *quelconque* de ($\mathcal{E}$). On voit par suite que, conformément à la proposition (A) :

Si les corps de l'ensemble ($\mathcal{E}$) *de* R_n *ont* $n+1$ *à* $n+1$, *un point commun au moins avec un corps de l'ensemble* (Σ), *il existe un corps de* (Σ) *ayant un point commun au moins avec tous les corps de* ($\mathcal{E}$).