BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. ANGHELUTZA

Sur une limite pour les modules des zéros des polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 120-131

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__120_0>

SUR UNE LIMITE POUR LES MODULES DES ZÉROS DES POLYNOMES ;

PAR M. TH. ANGHELUTZA.

---

1. M. Paul Montel [1], dans son mémoire devenu classique, a montré que *le polynome*

$$(1) \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n,$$

dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_p$ *sont fixes, admet* p *zéros bornés en modules par un nombre qui dépend de ces coefficients et du nombre des termes non nuls de* $P(x)$.

M. Edward Van Vleck [2] *a montré que ce nombre est la racine positive de l'équation*

$$(2) \qquad |a_p| r^p - C_{n-p+1}^1 |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p+2}^2 |a_{p-2}| r^{p-2} - \ldots - C_n^p |a_0| = 0,$$

où C_n^p est le symbole des combinaisons, *en supposant* $P(x)$ *sans lacunes*.

M. Paul Montel [3] en retrouvant ce résultat d'une manière plus simple, a démontré en outre que les modules des p zéros de $P(x)$ ne peuvent dépasser la racine positive de l'équation

$$(3) \qquad |a_n| r^n - C_{n-p}^0 |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p+1}^1 |a_{p-2}| r^{p-2} - \ldots - C_{n-1}^{p-1} |a_0| = 0,$$

quand on suppose donnés $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_n$.

---

(1) Paul MONTEL, *Sur les modules des zéros des polynomes* (*Ann. sc. École Norm. Sup.*, s. 3, t. XL, 1923, p. 1).

(2) Van VLECK, *On limits the absolute value of the roots of a polynomial* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 53, 1925, p. 105).

(3) Paul MONTEL, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes* (*Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 7, 1934-1935, Fasciculus tertius, p. 178).

Mais M. Van Vleck démontre le théorème suivant : ***Pour que le polynome*** $P(x)$ ***ait*** p ***zéros bornés en modules quand on fixe certains de ses coefficients il faut et il suffit que ces coefficients soient*** $a_0, a_1, \ldots, a_{p+m}$ ***où l'on a*** $0 \leqq m \leqq n-p$.

M. Paul Montel démontre ce théorème par une voie beaucoup plus courte.

2. *Le but de ces lignes est de déterminer le nombre dont il s'agit dans le théorème de M. Van Vleck.*

Considérons l'équation

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{4}$$

et soient $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_n$ ses racines.

Je me propose d'abord de former l'équation qui admet les racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *en supposant connus les coefficients* $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p$, *et les racines* $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Cela revient à former le quotient $P_p(x)$ de $P(x)$ par le produit

$$(x - x_{p+1}) \ldots (x - x_n).$$

On a

$$P_p(x) = \frac{P(x)}{(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n (1 - \alpha x) \ldots (1 - \lambda x)} \tag{5}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{x_{p+1}}, \qquad \beta = \frac{1}{x_{p+2}}, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \frac{1}{x_n}.$$

On a les développements

$$(1 - \alpha x)^{-1} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^s x^s + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(1 - \lambda x)^{-1} = 1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \ldots + \lambda^s x^s + \ldots,$$

convergents si $|x|$ est inférieur au plus petit des nombres $|\alpha|$, $|\beta|, \ldots, |\lambda|$. En faisant le produit de ces séries, on trouve le développement

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)\ldots(1-\lambda x)} = 1 + K_{n-p}^1 x + K_{n-p}^2 x^2 + \ldots + K_{n-p}^s x^s + \ldots, \tag{6}$$

où K_{n-p}^s désigne la somme des combinaisons avec répétition des $n-p$ nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ pris s à s. K_{n-p}^s est donc un polynome homogène de degrés par rapport à α, β, ..., λ ayant comme termes ces combinaisons avec le coefficient unité.

Par exemple

$$K^1_{n-p} = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \qquad K^2_{n-p} = \Sigma\alpha^2 + \Sigma\alpha\beta.$$

Le produit de $P(x)$ par cette dernière série doit se réduire, d'après l'égalité (5), à un polynome du degré p. On a donc

$$(7) \qquad \begin{aligned} &(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n P_p(x) \\ &\quad = a_0 + (a_1 + a_0 K^1_{n-p}) x + \ldots \\ &\qquad + (a_p + K^1_{n-p} a_{p-1} + \ldots + a_0 K^p_{n-p}) x^p. \end{aligned}$$

Les coefficients des termes en x^{p+1}, x^{p+2}, ... sont nuls. J'ai ainsi le quotient cherché

$$P_p(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \ldots + a'_{p-1} x^{p-1} + a_n x^p$$

avec les équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n a'_0 = a_0, \\ &(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n a'_1 = a_1 + a_0 K^1_{n-p}, \\ &(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n a'_2 = a_2 + a_1 K^1_{n-p} + a_0 K^2_{n-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n a'_{p-1} = a_{p-1} + a_{p-2} K^1_{n-p} + \ldots + a_0 K^{p-1}_{n-p}. \end{aligned} \right.$$

On a aussi les égalités

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} (-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n a_n &= a_p + a_{p-1} K^1_{n-p} + \ldots + a_0 K^p_{n-p}, \\ 0 &= a_{p+1} + a_p K^1_{n-p} + \ldots + a_1 K^p_{n-p} + a_0 K^{p+1}_{n-p}, \\ 0 &= a_{p+2} + a_{p+1} K^1_{n-p} + \ldots \\ &\quad + a_2 K^p_{n-p} + a_1 K^{p+1}_{n-p} + a_0 K^{p+2}_{n-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= a_n + a_{n-1} K^1_{n-p} + \ldots \\ &\quad + a_{n-p} K^p_{n-p} + \ldots + a_0 K^n_{n-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de $P_p(x)$ ne dépendent que de a_0, ..., a_{p-1}, a_n et de x_{p+1}, ..., x_n.

L'équation cherchée est par suite

$$(10) \qquad P_p(x) = 0.$$

3. L'équation (10) permet de retrouver les théorèmes de

M. Paul Montel et de M. Van Vleck. Supposons pour cela que les modules des racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$ soient inférieurs aux modules de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. De l'équation (10), on déduit l'inégalité

$$|a_n|\rho^p \leqq |a'_{p-1}|\rho^{p-1} + \ldots + |a'_2|\rho^2 + |a'_1|\rho + |a'_0|.$$

où ρ désigne le module de l'une quelconque des racines $x_1, \ldots, x_p$. Mais, des égalités (5), on tire

$$|a'_0| \leqq \frac{|a_0|}{\rho^{n-p}},$$

$$|a'_1| \leqq \frac{|a_1|}{\rho^{n-p}} + C^1_{n-p}\frac{|a_0|}{\rho^{n-p+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|a'_{p-1}| \leqq \frac{|a_{p-1}|}{\rho^{n-p}} + C^1_{n-p}\frac{|a_{p-2}|}{\rho^{n-p+1}} + C^2_{n-p+1}\frac{|a_{p-3}|}{\rho^{n-p+2}} + \ldots + C^{p+1}_{n-2}\frac{|a_0|}{\rho^{n-1}}.$$

En tenant compte de ces inégalités, on trouve

$$|a_n|\rho^n \leqq |a_{p-1}|\rho^{p-1} + C^1_{n-p+1}|a_{p-2}|\rho^{p-2} + \ldots + C^{p-1}_{n-1}|a_0|,$$

et par suite le polynome $P(x)$ a au moins p zéros inférieurs en modules à la racine positive r de l'équation (3), car on a

$$\rho \leqq r.$$

C'est le théorème de M. Paul Montel obtenu par une autre voie.

Supposons en particulier que l'on ait

$$|a_0| \leqq M_p, \qquad \ldots, \qquad |a_{p-1}| \leqq M_p,$$

alors l'équation (3) donne l'inégalité

$$|a_n| r^{n-p+1} \leqq M_p\left(1 + C^1_{n-p+1}\frac{1}{r} + C^2_{n-p+2}\frac{1}{r^2} + \ldots + C^{p-1}_{n-1}\frac{1}{r^{p-1}}\right).$$

Cherchons les solutions $r > 1$ de cette inégalité. En tenant compte du développement

$$(1-u)^{-(n-p+1)} = 1 + C^1_{n-p+1}u + C^2_{n-p+2}u^2 + \ldots + C^{p+1}_{n-1}u^{p-1} + \ldots$$

valable pour $|u| < 1$, on a

$$|a_n| r^{n-p+1} < \frac{M_p}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-p+1}}.$$

D'où la limitation

$$r < 1 + \sqrt[n-p+1]{\frac{M_p}{|a_n|}}$$

due aussi à M. Paul Montel.

Si l'on prend le premier membre de l'équation (10) sous la forme donnée par l'égalité (7), on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\left[|a_p| - C^1_{n-p}\frac{|a_{p-1}|}{\rho} - \ldots - C^p_{n-1}\frac{|a_0|}{\rho^p}\right]\rho^p \\
&\leqq \left[|a_{p-1}| + \frac{C^1_{n-p}}{\rho}|a_{p-2}| + \ldots + \frac{C^{p-1}_{n-2}}{\rho^{p-1}}|a_0|\right]\rho^{p-1} + \ldots \\
&+ \left[|a_2| + C^1_{n-p}\frac{|a_1|}{\rho} + C^2_{n-p+1}\frac{|a_0|}{\rho^2}\right]\rho^2 + \left[|a_1| + \frac{C^1_{n-p}}{\rho}|a_0|\right]\rho + |a_0|,
\end{aligned}$$

où ρ a la même signification que plus haut, en supposant toujours que les modules des zéros $x_1, \ldots, x_p$ sont inférieurs à ceux de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. On a par suite l'inégalité

$$|a_p|\rho^p \leqq C^1_{n-p+1}|a_{p-1}|\rho^{p-1} + C^2_{n-p+2}|a_{p-2}|\rho^{p-2} + \ldots + C^p_n|a_0|.$$

Le polynome $P(x)$ a donc au moins p zéros de modules inférieurs à la racine positive r de l'équation (2). Nous avons obtenu ainsi, d'une autre manière et pour le cas général, le résultat de M. Van Vleck.

On peut donner pour r une limite supérieure par le procédé employé plus haut. En effet, on a

$$|a_p|r^p \leqq M_p(C^1_{n-p+1}r^{p-1} + C^2_{n-p+2}r^{p-2} + \ldots + C^p_n),$$

où M_p est le nombre considéré plus haut.

On cherche, comme tout à l'heure, les solutions de cette inégalité, qui sont plus grandes que l'unité. En l'écrivant sous la forme

$$|a_p| \leqq M_p\left(C^1_{n-p+1}\frac{1}{r} + C^2_{n-p+2}\frac{1}{r^2} + \ldots + C^p_n\frac{1}{r^p}\right),$$

et en utilisant le même développement, on trouve

$$M_p + |a_p| < \frac{M_p}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-p+1}},$$

d'où la limite cherchée

$$r < \frac{1}{1 - \sqrt[n-p+1]{\dfrac{M_p}{M_p + |a_p|}}}.$$

4. Après avoir retrouvé les beaux résultats de MM. Paul Montel et Van Vleck, je passe à la question que je me suis proposé de traiter dans ce travail. Dans ce but, je ferai dépendre les coefficients de l'équation (10) seulement de $a_0, \ldots, a_{p-1}, a_{p+m}$ et de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. J'écris les $m+1$ premières relations de (9) sous la forme

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} a_p + H_0 - \sigma a_n = 0, \\ K^1_{n-p} a_p + a_{p+1} + H_1 = 0, \\ K^2_{n-p} a_p + K^1_{n-p} a_{p+1} + a_{p+2} + H_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K^{m-1}_{n-p} a_p + K^{m-2}_{n-p} a_{p+1} + K^{m-3}_{n-p} a_{p+2} + \ldots + a_{p+m-1} \\ \qquad + H_{m-1} = 0, \\ K^m_{n-p} a_p + K^{m-1}_{n-p} a_{p+1} + K^{m-2}_{n-p} a_{p+2} + \ldots + K^1_{n-p} a_{p+m-1} \\ \qquad + a_{p+m} + H_m = 0, \end{array}\right.$$

avec les notations

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma = (-1)^{n-p} x_{p+1} \ldots x_n, \\ H_0 = K^p_{n-p} a_0 + K^{p-1}_{n-p} a_1 + \ldots + K^1_{n-p} a_{p-1}, \\ H_1 = K^{p+1}_{n-p} a_0 + K^p_{n-p} a_1 + \ldots + K^2_{n-p} a_{p-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ H_{m-1} = K^{p+m-1}_{n-p} a_0 + K^{p+m-2}_{n-p} a_1 + \ldots + K^m_{n-p} a_{p-1}, \\ H_m = K^{p+m}_{n-p} a_0 + K^{p+m-1}_{n-p} a_1 + \ldots + K^{m+1}_{n-p} a_{p-1}. \end{array}\right.$$

Le système (11) permet de déterminer les coefficients a_p, $a_{p+1}, \ldots, a_{p+m}$. En particulier, on a pour a_{p+m} la valeur suivante

$$a_{p+m} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & H_0 - \sigma a_n \\ K^1_{n-p} & 1 & 0 & \ldots & 0 & H_1 \\ K^2_{n-p} & K^1_{n-p} & 1 & \ldots & 0 & H_2 \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ K^{m-1}_{n-p} & K^{m-2}_{n-p} & K^{m-3}_{n-p} & \ldots & 1 & H_{m-1} \\ K^m_{n-p} & K^{m-1}_{n-p} & K^{m-2}_{n-p} & \ldots & K^1_{n-p} & H_m \end{vmatrix}$$

ou

$$(13) \qquad -a_{p+m} = \Delta_m + (-1)^m (H_0 - \sigma a_n) D_m,$$

où l'on a posé

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 \\ K^1_{n-p} & 1 & 0 & \dots & 0 & H_2 \\ K^2_{n-p} & K^1_{n-p} & 1 & \dots & 0 & H_3 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ K^{m-2}_{n-p} & K^{m-3}_{n-p} & K^{m-4}_{n-p} & \dots & 1 & H_{m-1} \\ K^{m-1}_{n-p} & K^{m-2}_{n-p} & K^{m-3}_{n-p} & \dots & K^1_{n-p} & H_m \end{vmatrix},$$

$$D_m = \begin{vmatrix} K^1_{n-p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K^2_{n-p} & K^1_{n-p} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ K^{m-1}_{n-p} & K^{m-2}_{n-p} & K^{m-3}_{n-p} & \dots & 1 \\ K^m_{n-p} & K^{m-1}_{n-p} & K^{m-2}_{n-p} & \dots & K^1_{m-p} \end{vmatrix}.$$

Remarques. — 1° Le déterminant D_m est égal à la somme S_m des combinaisons ordinaires des n-p nombres α, β, ..., λ pris m à m.

Par exemple,

$$D_2 = \begin{vmatrix} K^1_{n-p} & 1 \\ K^2_{n-p} & K^1_{n-p} \end{vmatrix} = (K^1_{n-p})^2 - K^2_{n-p} = \Sigma\alpha\beta.$$

D'autre part, en développant D_m d'après les éléments de sa première colonne, on obtient la relation de récurrence

$$(14) \qquad \begin{aligned} D_m = {} & K^1_{n-p} D_{n-1} - K^2_{n-p} D_{n-2} + K^3_{n-p} D_{n-3} - \dots \\ & + (-1)^{m-2} K^{m-1}_{n-p} K^1_{n-p} + (-1)^{m-1} K^m_{n-p}. \end{aligned}$$

Je pose

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = K^1_{n-p} = \Sigma\alpha.$$

Je multiplie l'identité

$$\begin{aligned} (1-\alpha x) \dots (1-\lambda x) = 1 - S_1 x + S_2 x^2 - \dots \\ + (-1)^m S_m x^m + \dots + (-1)^n S_n x^n \end{aligned}$$

par l'égalité (6) et j'obtiens

$$\begin{aligned} 1 = 1 + (K^1_{n-p} - S_1)x + (S_2 - S_1 K^1_{n-p} + K^2_{n-p})x^2 + \dots \\ + [(-1)^m S_m + (-1)^{m-1} S_{m-1} K^1_{n-p} + \dots - S_1 K^{m-1}_{n-p} + K^m_{n-p}]x^m + \dots \end{aligned}$$

Il en résulte la relation

$$S_m = K^1_{n-p} S_{m-1} - K^2_{n-p} S_{m-2} + K^3_{n-p} S_{m-3} - \dots \\ + (-1)^{m-2} K^{m-1}_{n-p} S_1 + (-1)^{m-1} K^m_{n-p}$$

qui a les mêmes coefficients que la relation (14). Comme on a eu

$$D_0 = S_0 = 1, \qquad D_1 = S_1 = \Sigma\alpha,$$

il résulte

$$D_m = S_m.$$

C. Q. F. D.

2° En développant Δ_m d'après les éléments de la dernière colonne, on trouve

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + (-1)^{m-1} H_1 S_{m-1},$$

et par suite

$$\Delta_{m-1} = \Delta_{m-2} + (-1)^{m-2} H_2 S_{m-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$\Delta_2 \quad = H_m \quad + (-1) H_{m-1} S_1,$$

d'où

$$(15) \qquad \Delta_m = (-1)^{m-1} H_1 S_{m-1} + (-1)^{m-2} H_2 S_{m-2} + (-1)^{m-3} H_3 S_{m-3} + \dots \\ + (-1) H_{m-1} S_1 + H_m.$$

En tenant compte de la première remarque, l'équation (13) donne

$$\sigma a_n = (-1)^m \frac{a_{p+m}}{S_m} + H_0 + (-1)^m \frac{\Delta_m}{S_m}.$$

Substituant cette valeur de a_n dans l'équation (10), on trouve l'équation

$$(16) \qquad [(-1)^m a_{p+m} + H_0 S_m + (-1)^m \Delta_m] x^p \\ + S_m \sigma (a'_{p-1} x^{p-1} + \dots + a'_1 x + a'_0) = 0,$$

dont les coefficients dépendent seulement de a_0, a_1, ..., a_{p-1}, a_{p-m} et de x_{p+1}, ..., x_n.

3° Pour aller plus loin, il faut établir une formule. Je vais ordonner le coefficient

$$(-1)^m a_{p+m} + H_0 S_m + (-1)^m \Delta_m,$$

de x^p de l'équation (16) par rapport à a_0, a_1, ..., a_{p-1}, a_{p+m}. Soient A_0, A_1, ..., A_{p-1} les coefficients respectifs de a_0, a_1, ...,

a_{p-1}. Si l'on tient compte des notations (12) et de la valeur de Δ_m, donnée par la relation (15), on trouve

$$
\begin{aligned}
A_0 &= K^{p}_{n-p} S_m - K^{p+1}_{n-p} S_{m-1} + K^{p+2}_{n-p} S_{m-2} - K^{p+3}_{n-p} S_{m-3} + \ldots \\
&\qquad + (-1)^{m-1} K^{p+m-1}_{n-p} S_1 + (-1)^m K^{p+m}_{n-p}, \\
A_1 &= K^{p-1}_{n-p} S_m - K^{p}_{n-p} S_{m-1} + K^{p+1}_{n-p} S_{m-2} - K^{p+2}_{n-p} S_{m-3} + \ldots \\
&\qquad + (-1)^{m-1} K^{p+m-2}_{n-p} S_1 + (-1)^m K^{p+m-1}_{n-p}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{p-1} &= K^{1}_{n-p} S_m - K^{2}_{n-p} S_{m-1} + K^{3}_{n-p} S_{m-2} - K^{4}_{n-p} S_{m-3} + \ldots \\
&\qquad + (-1)^{m-1} K^{m}_{n-p} S_1 + (-1)^m K^{m+1}_{n-p}.
\end{aligned}
$$

On remarque que A_0 est un polynome homogène de degré $p+m$ par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Ce polynome, à coefficients entiers, a

$$
\begin{aligned}
N_0 = C^{p}_{n-1} C^{m}_{n-p} - C^{p+1}_{n} C^{m-1}_{n-p} + C^{p+2}_{n+1} C^{m-2}_{n-p} - C^{p+3}_{n+2} C^{m-3}_{n-p} + \ldots \\
+ (-1)^{m-1} C^{p+m-1}_{n+m-2} C^{1}_{n-p} + (-1)^m C^{p+m}_{n+m-1}
\end{aligned}
$$

termes, en comptant chaque terme autant de fois qu'il y figure.

Démontrons maintenant la formule

$$N_0 = C^{p+m}_{n-1} C^{m}_{p+m-1}.$$

A cet effet je vais prouver la formule plus générale

$$
\begin{aligned}
(17) \quad (-1)^{m-q} C^{p+m-q}_{n+m-q-1} C^{q}_{n-p} + (-1)^{m-q+1} C^{p+m-q+1}_{n+m-q} C^{q-1}_{n-p} + \ldots \\
+ (-1)^{m-1} C^{p+m-1}_{n+m-2} C^{1}_{n-p} + (-1)^m C^{p+m}_{n+m-1} \\
= (-1)^{m-q} C^{p+m}_{n+m-q-1} C^{q}_{p+m-1}.
\end{aligned}
$$

Elle est vérifiée pour $q=0$; supposons donc qu'elle soit vraie pour q et prouvons qu'elle l'est aussi pour $q+1$. En écrivant le premier membre de cette formule pour $q+1$ et en tenant compte de ce qu'elle est vraie pour q, on a, successivement,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m-q-1} C^{p+m-q-1}_{n+m-q-2} C^{q+1}_{n-p} + (-1)^{m-q} C^{p+m}_{n+m-q-1} C^{q}_{p+m-1} \\
&\quad = (-1)^{m-q-1} C^{p+m-q-1}_{n+m-q-2} \\
&\qquad \times \left[C^{q+1}_{n-p} - \frac{(n+m-q-1)(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-p-q)}{(p+m-q)(p+m-q+1)\ldots(p+m)} C^{q}_{p+m-1} \right] \\
&\quad = (-1)^{m-q-1} C^{p+m-q-1}_{n+m-q-2} \frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-p-q)}{(p+m)(q+1)!} \\
&\qquad \times [(n-p)(p+m) - (n+m-q-1)(q+1)] \\
&\quad = (-1)^{m-q-1} C^{p+m-q-1}_{n+m-q-2} \frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-p-q)}{(p+m)(q+1)!} \\
&\qquad \times (n-p-q-1)(p+m-q-1) \\
&\quad = (-1)^{m-q-1} C^{p+m}_{n+m-q-2} C^{q+1}_{p+m-1}.
\end{aligned}
$$

La formule (17) est donc établie. Si l'on y fait $q = m$, on trouve la valeur de N_0, donnée plus haut. Désignons de même par $N_1, \ldots, N_{p-1}$ les nombres respectifs des termes de $A_1, \ldots, A_{p-1}$. On obtient N_1 en substituant dans l'expression de N_0 à n et p, respectivement $n-1$ et $p-1$; on a N_{p-1} en substituant dans N_0 à n et p les nombres $n-p+1$ et 1. Par suite

$$N_1 = C_{n-2}^{p-1+m} C_{p+m-2}^{m}, \quad \ldots \quad N_{p-1} = C_{n-p}^{m+1} C_m^m.$$

J'ai maintenant tous les éléments pour démontrer le théorème suivant.

Théorème. — *Le polynome* $P(x)$, *défini par l'identité* (1), *a au moins* p *zéros inférieurs en module à la racine positive* r *de l'équation*

$$(18)\quad |a_{p+m}| r^{m+p} - C_{n-p+1}^{m+1} |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^{1} |a_{p-2}| r^{p-2} - \ldots \\ - C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^{p-2} |a_1| r - C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1} |a_0| = 0.$$

quand on donne les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+m}$ *le dernier étant supposé différent de zéro* (¹).

Avec les notations introduites, l'équation (16) s'écrit

$$(19)\quad [(-1)^m a_{p+1} + a_{p-1} A_{p-1} + \ldots + a_1 A_1 + a_0 A_0] x^p \\ + S_m \sigma (a'_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a'_1 x + a'_0) = 0.$$

Supposons que le polynome (1) ait $n-p$ zéros, $x_{p+1}, \ldots, x_n$, de modules supérieurs ou égaux à ceux de $x_1, \ldots, x_p$ et soit ρ le module de l'un quelconque de ces p derniers zéros. On a alors les inégalités

$$|A_0| \leqq \frac{N_0}{\rho^{p+m}} = \frac{C_{n-1}^{p+m} C_{p+m-1}^{m}}{\rho^{p+m}},$$

$$|A_1| \leqq \frac{N_1}{\rho^{p+m-1}} = \frac{C_{n-2}^{p+m-1} C_{p+m-2}^{m}}{\rho^{p+m-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|A_{p-1}| \leqq \frac{N_{p-1}}{\rho^{m+1}} = \frac{C_{n-p}^{m+1} C_m^m}{\rho^{m+1}},$$

$$|\sigma a'_0| \leqq |a_0|,$$

$$|\sigma a'_1| \leqq |a_1| + C_{n-p}^{1} \frac{|a_0|}{\rho},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\sigma a'_{p-1}| \leqq |a_{p-1}| + C_{n-p}^{1} \frac{|a_{p-2}|}{\rho} + \ldots + C_{n-2}^{p-1} \frac{|a_0|}{\rho^{p-1}}.$$

(¹) Th. Anghelutza, *Sur une limite des modules des zéros de polynomes* (*Bul. sc. Ac. roum.*, t. XXI, n° 7-8).

D'autre part, l'équation (19) donne l'inégalité

$$\begin{aligned}&[|a_{p+m}| - |a_{p-1}A_{p-1}| - \ldots - |a_1 A_1| - |a_0 A_0|]\rho^p \\ &\leqq \frac{C_{n-p}^m |\sigma|}{\rho^m}(|a'_{p-1}|\rho^{p-1} + \ldots + |a'_1|\rho + |a'_0|),\end{aligned}$$

qui devient, en tenant compte des inégalités précédentes,

$$\begin{aligned}|a_{p+m}|\rho^p \leqq &\frac{N_0 + C_{n-1}^{p-1} C_{n-p}^m}{\rho^m}|a_0| \\ &+ \frac{N_1 + C_{n-2}^{p-2} C_{n-p}^m}{\rho^{m-1}}|a_1| + \ldots + \frac{N_{p-1} + C_{n-p}^m}{\rho^{m-p+1}}|a_{p-1}|\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}|a_{p+m}|\rho^{m+p} \leqq\; &C_{n-p+1}^{m+1} C_m^0 |a_{p-1}|\rho^{p-1} + C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^1 |a_{p-2}|\rho^{p-2} + \ldots \\ &+ C_{n-2}^{m+p-2} C_{m+p-3}^{p-3}|a_2|\rho^2 \\ &+ C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^{p-2}|a_1|\rho + C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1}|a_0|,\end{aligned}$$

car on a

$$C_{n-1}^{p+m} C_{p+m-1}^m + C_{n-1}^{p-1} C_{n-p}^m = C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1}.$$

Le théorème est ainsi démontré, car ρ est plus petit que r.

Si l'on fait dans l'équation (18) successivement

$$m = n - p, \qquad m = 0,$$

on retrouve les équations (2) et (3) de MM. P. Montel et Van Vleck. On peut donner, pour ce cas aussi, une limite supérieure de r. En effet, l'équation (18) donne l'inégalité

$$\begin{aligned}|a_{p+m}| r^{m+p} \leqq M_p (&C_{n-p+1}^{m+1} r^{p-1} + C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^1 r^{p-2} + \ldots \\ &+ C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^{p-2} r + C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1}),\end{aligned}$$

M_p a la même signification que plus haut. Mais on vérifie facilement l'inégalité

$$C_{n-p+h}^{m+h} C_{m+h-1}^{h-1} \leqq C_{n-p+h}^h C_{n-p}^m \qquad (h = 1, 2, \ldots p).$$

Par suite, on a

$$|a_{p+m}| r^m \leqq M_p C_{n-p}^m (C_{n-p+1}^1 r^{p-1} + C_{n-p+2}^2 r^{p-2} + \ldots + C_{n-1}^{p-1} r^{p-1} + C_n^p)$$

ou

$$|a_{p+m}| r^m \leqq M_p C_{n-p}^m \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-(n-p+1)} - 1\right].$$

La limite cherchée est inférieure à la racine, supérieure à *un*, de l'équation

$$1 + \frac{|a_{p+m}|}{M_p C_{n-p}^m} r^m = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-p+1}}.$$

D'ailleurs, on voit facilement que cette équation a une seule racine plus grande que l'unité.

Je termine ce travail en remarquant que le théorème de M. P. Montel, cité au début, prouve l'existence d'une limite qui dépend des coefficients donnés et du nombre des termes qui entrent *effectivement* dans le polynome.