BULLETIN DE LA S. M. F.

CRISTOBAL DE LOSADA Y PUGA

Sur la trigonométrie des petits triangles curvilignes plans

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 132-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__132_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA TRIGONOMÉTRIE DES PETITS TRIANGLES CURVILIGNES PLANS;

PAR M. CRISTÓBAL DE LOSADA Y PUGA.

(Lima).

M. Tullio Levi-Civita nous a fait connaître, dans une conférence faite à Lima, ses recherches sur la Trigonométrie des petits triangles curvilignes sur un plan et une surface, qui sont l'objet d'un Mémoire récemment publié par la Société Mathématique de France ([1]).

Je me propose de présenter ici quelques remarques sur la Trigonométrie des petits triangles curvilignes *plans*, qui sont étudiés par le savant mathématicien dans la première partie de son travail. J'espère pouvoir m'occuper dans d'autres articles des triangles curvilignes sur une surface quelconque.

M. Levi-Civita considère en premier lieu un triangle plan dont les côtés sont des arcs de cercle et, comme triangle auxiliaire, le triangle formé par les cordes de ces arcs. Il exprime les éléments du triangle auxiliaire en fonction des longueurs et des arcs du triangle curviligne donné, ainsi que des angles formés par les tangentes à ses côtés dans les sommets, et il substitue ces valeurs dans les formules de Trigonométrie rectiligne relatives audit triangle auxiliaire.

Il peut y avoir un intérêt pratique à substituer aux deux éléments considérés par l'auteur italien deux autres grandeurs de plus facile détermination : la corde et la flèche. Je donnerai dans la suite les formules correspondantes.

Soient (*fig.* 1) le triangle curviligne $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ et le triangle auxiliaire formé par les cordes des arcs. J'adopterai le critère proposé par M. Levi-Civita pour considérer un triangle curviligne comme petit, ainsi que ses notations. Alors, un angle quelconque du triangle curviligne est la somme de l'angle du triangle auxiliaire

([1]) *Conférences de la Réunion Internationale des Mathématiciens*, Paris, Gauthier-Villars, 1939.

et des deux angles β_{h+1} et β_{h+2} formés par les côtés de l'angle α_h avec les tangentes en P_h aux deux arcs qui se coupent

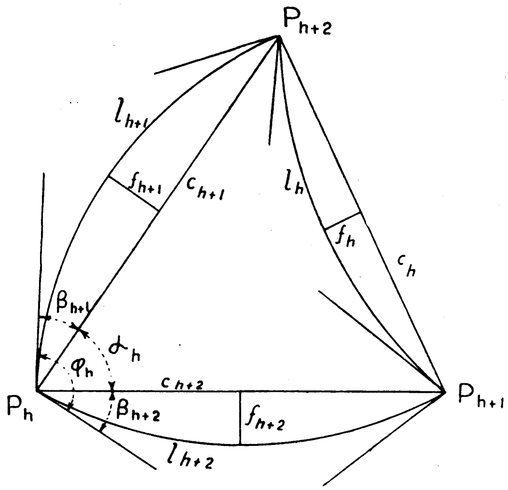
$$\varphi_h = \alpha_h + \beta_{h+1} + \beta_{h+2},$$

d'où

$$\alpha_h = \varphi_h - \beta_{h+1} - \beta_{h+2}.$$

Cette formule est générale, à condition de donner à chaque

Fig. 1.



angle β le signe $+$ si la flèche de l'arc correspondant est située à l'extérieur du triangle des cordes, comme dans les côtés $P_{h+1}P_h$ et P_hP_{h+2} de la figure 1, et le signe $-$ si la flèche est située à l'intérieur du triangle des cordes comme dans le côté $P_{h+2}P_{h+1}$. Cette convention est équivalente à une autre de M. Levi-Civita.

Exprimons la valeur des angles β en fonction des longueurs de la corde et la flèche correspondantes. Nous aurons (*fig.* 2)

$$\frac{c_h}{2} = R \sin \beta_h,$$

d'où

(2) $$\beta_h = \arcsin \frac{c_h}{2R}.$$

D'un autre côté, par la géométrie élémentaire,

$$\left(\frac{c_h}{2}\right)^2 = f_h(2R - f_h),$$

d'où

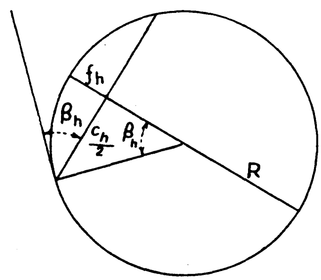
(3) $$R = \frac{c_h^2 + 4f_h^2}{8f_h}$$

et en substituant cette valeur de R dans (2)

(4) $$\beta_h = \arc\sin \frac{4\frac{f_h}{c_h}}{1 + 4\left(\frac{f_h}{c_h}\right)^2}.$$

En considérant $\frac{f_h}{c_h}$ comme une petite grandeur de premier ordre,

Fig. 2.



on peut développer en série suivant les puissances successives de cette grandeur, jusqu'à un terme d'ordre arbitrairement fixé. En nous conformant au degré d'approximation adopté par M. Levi-Civita, nous nous bornerons au terme de premier ordre en $\frac{f_h}{c_h}$ et alors

$$\beta_h = 4\frac{f_h}{c_h}[1 + \mathbf{2}],$$

où le symbole **2** indique une somme de termes au moins de deuxième ordre.

Exprimons maintenant l_h en fonction de c_h et de β_h. D'après la figure 2, on a

$$l_h = 2R\,\beta_h = c_h\,\beta_h\,\frac{2R}{c_h},$$

soit, tenu compte de l'équation (2),

$$(4') \qquad l_h = c_h \beta_h \operatorname{cos\acute{e}c} \beta_h.$$

Si nous remplaçons ici cosé c β_h par son développement en série (*voir*, par exemple, Adams, *Smithsonian Mathematical Formulæ*, p. 121), nons obtiendrons

$$l_h = c_h \beta_h \left(\frac{1}{\beta_h} + \frac{1}{3!} \beta_h + \frac{7}{3.5!} \beta_h^3 + \ldots \right) = c_h \left(1 + \frac{1}{3!} \beta_h^2 + \frac{7}{3.5!} \beta_h^4 + \ldots \right).$$

Alors, en nous bornant à la première approximation, nous pouvons écrire

$$(5) \qquad \beta_h = 4 \frac{f_h}{c_h} (1 + \mathbf{2}), \qquad l_h = c_h (1 + \mathbf{2}),$$

et les angles α_h seront donnés par la formule

$$(6) \qquad \alpha_h = \varphi_h - 4 \frac{f_{h+1}}{c_{h+1}} - 4 \frac{f_{h+2}}{c_{h+2}} + \mathbf{2}.$$

La seconde des formules (5) et la (6) permettent, par le remplacement des valeurs qu'elles donnent dans les formules courantes de la Trigonométrie rectiligne, d'établir celles qui ont affaire au petit triangle curviligne considéré. Prenons comme exemple la même formule choisie par M. Levi-Civita, c'est-à-dire la formule des sinus

$$(7) \qquad \frac{c_h}{\sin \alpha_h} = l,$$

où l désigne le diamètre du cercle circonscrit au triangle (dans la figure 1, au triangle des cordes et aussi par la petitesse des arcs, au triangle curviligne).

Nous pouvons écrire, en partant de la seconde des formules (5),

$$(8) \qquad c_h = l_h (1 + \mathbf{2}),$$

qui est précisément l'équation (1, 6) du Mémoire de M. Levi-Civita.

Remplaçons les valeurs de c_h et de α_h données par (8) et (6), dans (7), en développant sin α_h jusqu'aux termes de premier ordre inclusivement

$$\frac{l_h(1+\mathbf{2})}{\sin\varphi_h - 4\left(\dfrac{f_{h+1}}{c_{h+1}} + \dfrac{f_{h+2}}{c_{h+2}}\right)\cos\varphi_h + \mathbf{2}} = l, \tag{9}$$

et en appelant

$$\beta_h + \beta_{h+1} + \beta_{h+2} = \mathrm{T}, \tag{10}$$

soit

$$4\left(\frac{f_h}{c_h} + \frac{f_{h+1}}{c_{h+1}} + \frac{f_{h+2}}{c_{h+2}}\right) = \mathrm{T} + \mathbf{2}, \tag{11}$$

nous aurons

$$\frac{l_h}{\sin\varphi_h} = l\left[1 + \left(4\frac{f_h}{c_h} - \mathrm{T}\right)\cot\varphi_h + \mathbf{2}\right], \tag{12}$$

équation analogue à la (1, 10) de M. Levi-Civita.

On pourra de la même manière par transposition des formules de la trigonométrie rectiligne, établir celles relatives au petit triangle curviligne plan, et cela avec une approximation arbitraire : il suffira seulement de développer les β_h et les l_h à partir des équations (4) et (4′) jusqu'au terme convenable. Ainsi, en allant jusqu'aux termes de troisième ordre inclusivement, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \beta_h &= 4\frac{f_h}{c_h} - \frac{16}{3}\frac{f_h^3}{c_h^3} + \mathbf{4}, \\ l_h &= c_h\left[1 + \frac{8}{3}\frac{f_h^2}{c_h^2} + \mathbf{4}\right], \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et, en conséquence,

$$\alpha_h = \varphi_h - 4\left[\frac{f_{h+1}}{c_{h+1}} + \frac{f_{h+2}}{c_{h+2}}\right] + \frac{16}{3}\left[\frac{f_{h+1}^3}{c_{h+1}^3} + \frac{f_{h+2}^3}{c_{h+2}^3}\right] + \mathbf{4}. \tag{14}$$

Les équations (13) et (14) jouent le même rôle que les équations (5) et (6), mais leur approximation est beaucoup plus grande, de troisième ordre.