BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MONTEL

Sur les suites de fonctions non bornées dans leur ensemble

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 42-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__42_0>

SUR LES SUITES DE FONCTIONS NON BORNÉES DANS LEUR ENSEMBLE;

Par M. Paul Montel.

1. On sait que la théorie des familles de fonctions uniformes de variables complexes est dominée par le théorème suivant : *toute famille de fonctions bornées dans leur ensemble dans un domaine est normale dans l'intérieur de ce domaine* [1].

Examinons le cas où cette condition n'est pas remplie. Bornons-nous aux fonctions $f(z)$ d'une variable complexe z, holomorphes dans un domaine fermé (D) : désignons par M le module maximum de $f(z)$ dans (D). Les fonctions

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{M}$$

forment une famille normale dans (D), puisque leur module maximum est égal à l'unité. Soit $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$, une suite de fonctions $\varphi(z)$ convergeant uniformément, dans l'intérieur de (D), vers la fonction limite, finie ou infinie, $\varphi_0(z)$. Il suffit d'examiner le cas où la suite M_n des modules maxima augmente indéfiniment. Si $\varphi_0(z)$ n'a pas de zéro, la suite $f_n(z)$ augmente indéfiniment; si $\varphi_0(z)$ a des zéros, la suite augmente indéfiniment, sauf en ces zéros : elle est quasi normale. Enfin, si $\varphi_0(z)$ est identiquement nul, on ne peut rien dire; par exemple pour $f_n(z) = nz^n$, $|z| \leqq 1$, on a $M_n = n$, $\varphi_n(z) = z^n$ tend vers zéro, et la famille est normale pour $|z| < 1$; pour $f_n(z) = e^{nz}$, $|z| \leqq 1$, on a $M_n = e^n$, $\varphi_n(z) = e^{-n(1-z)}$ tend vers zéro et la famille n'est pas normale autour de l'origine qui est un point irrégulier.

Par conséquent, si l'on impose aux fonctions $f(z)$ une condition telle que $\frac{f(z)}{M}$ n'ait jamais pour limite la constante zéro, on pourra

---

[1] *Cf.* Paul Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1910), p. 20.

affirmer que la famille des fonctions $f(z)$ est normale ou quasi normale suivant que les fonctions limites des fonctions $\frac{f(z)}{M}$ sont dépourvues ou non de zéros.

Par exemple, si en un point z_0, intérieur à (D), $f(z)$ vérifie la condition

$$(1) \qquad |f(z_0)| \geqq \delta M \qquad (0 < \delta \leqq 1),$$

la famille est quasi normale. Le point z_0 peut varier avec la fonction pourvu que tous les points d'accumulation des points z_0 soient intérieurs à (D). Il suffit évidemment que l'inégalité soit vérifiée lorsque M est assez grand. Si une telle inégalité est vérifiée en chaque point intérieur à (D), la famille est normale.

Ce critère de quasi-normalité ou de normalité est un critère secondaire, car il n'est pas vérifié pour la famille

$$f_n(z) = nz^n \qquad |z| \leqq 1,$$

comme nous venons de le voir.

On obtient une extension apparente de ce critère en remplaçant dans l'inégalité, $f(z)$ par $f(z) - \alpha(z)$. Outre que le critère prendrait une forme compliquée et difficilement applicable, il est facile de voir que l'extension est illusoire et que le second cas se ramène au premier. Supposons en effet que l'on ait, pour M assez grand,

$$|f(z_0) - \alpha(z_0)| \geqq \delta M;$$

on en déduit

$$|f(z_0)| \geqq \delta M - |\alpha(z_0)| = M\left[\delta - \frac{|\alpha(z_0)|}{M}\right] \geqq M(\delta - \varepsilon),$$

pour $M > \frac{|\alpha(z_0)|}{\varepsilon}$.

2. Nous avons vu que la famille est normale lorsque, pour toute suite telle que M augmente indéfiniment et que $\frac{f(z)}{M}$ converge, la fonction limite n'a pas de zéro. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions $f(z)$ de la suite qui s'annulent dans (D). Inversement, s'il en est ainsi et si aucune fonction limite des $\varphi(z)$ n'est identiquement nulle, par exemple si la condition (1) est remplie, la famille est normale. D'autre part, si la famille $f(z)$ est normale, il ne peut y avoir de suite de fonctions $f(z)$ comprenant

une infinité de fonctions s'annulant dans un domaine intérieur à (D) lorsque M augmente indéfiniment, à moins que la suite correspondante des $\varphi(z)$ n'ait comme fonction limite la constante zéro. Par conséquent :

Si les fonctions $\frac{f(z)}{M}$ n'admettent pas zéro comme fonction limite dans un domaine, pour que la famille $f(z)$ soit normale dans ce domaine, il faut et il suffit que toute suite de ces fonctions dont le module maximum augmente indéfiniment n'ait qu'un nombre fini de zéros dans tout domaine intérieur.

La condition (1) peut être remplacée par beaucoup d'autres; par exemple, on peut remplacer, dans cette inégalité, $f(z)$ par $f'(z)$ ou toute autre dérivée. On peut adopter la condition

$$|f(z_0)-f(z_1)| \geqq \delta M \qquad (0 < \delta),$$

z_0 et z_1 désignant deux points intérieurs à (D) fixes ou variant convenablement. On peut exprimer que la valeur moyenne de $\frac{|f(z)|}{M}$ sur un arc de courbe, fixe ou variable, reste supérieure à un nombre positif, etc.

3. Supposons que la condition (1) soit vérifiée. On peut en conclure que la famille est normale dans une région voisine de z_0. Cela revient à dire qu'il existe une région voisine de z_0 dans laquelle $f(z)$ ne peut s'annuler si M est assez grand. En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite de fonctions $f_n(z)$ telle que $f_n(z)$ ait un zéro z_n situé à une distance de z_0 inférieure à $\frac{1}{n}$ et que M_n augmente indéfiniment. Nous pouvons extraire, de la suite correspondante $\varphi_n(z)$, une suite partielle que nous appellerons encore $\varphi_n(z)$ et qui converge uniformément dans (D) vers la limite $\varphi_0(z)$. On aurait $\varphi_0(z_0) = 0$ puisque $\varphi_n(z_n) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\varphi_n(z_0) \geqq \delta > 0$ si n est assez grand.

On peut d'ailleurs préciser quantitativement la région de normalité. On peut toujours supposer, si (D) est simplement connexe, que ce domaine coïncide avec le cercle $|z| \leqq 1$, en faisant au besoin une représentation conforme, et que $z_0 = 0$. La fonction

$$\frac{M[f(z)-f(0)]}{M^2-f(z)\overline{f(0)}}$$

est nulle à l'origine et son module ne dépasse pas l'unité : ce module est donc inférieur à $|z|$, d'après le lemme de Schwarz. On a donc

$$M|f(z)-f(0)| \leqq |z|\,|M^2-f(z)\overline{f(0)}|$$

et, si z est un zéro de $f(z)$, on aura

$$|z| \geqq \frac{|f(0)|}{M}.$$

Par conséquent, si M est assez grand pour que l'inégalité (1) soit vérifiée, $f(z)$ n'a pas de zéro dans le cercle $|z|<\delta$ et la famille y est normale.

On en déduit aussitôt que la famille est normale dans le domaine (D) si l'inégalité est vérifiée en un nombre fini de points z_0, par exemple aux sommets d'un réseau quadrillé dont les carrés ont une diagonale inférieure à 2δ, qui sont intérieurs à (D).

Si le nombre δ varie avec z_0, il suffit que, en chaque point intérieur à (D), la plus petite limite du rapport $\frac{|f(z)|}{M}$, pour toute suite de valeurs de M augmentant indéfiniment, soit un nombre positif. Dans ce cas, en effet, chaque point intérieur est régulier. La valeur δ obtenue comme rayon du cercle de normalité est d'ailleurs la valeur exacte, car la suite

$$f_n(z) = n\,\frac{\delta - z}{1-\delta z},$$

dans laquelle $M_n = n$, $f_n(0)=\delta M_n$, augmente indéfiniment pour $|z|<1$ et $z \neq \delta$; et tend vers zéro pour $z=\delta$. Le point δ est donc irrégulier.

4. On obtiendra des résultats semblables en remplaçant le module maximum M par une des moyennes de Hardy $M_p(r)$. On sait que cette moyenne est définie par l'égalité

$$M_p(r) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (p>0).$$

Nous supposerons que $f(z)$ est holomorphe dans le cercle fermé $|z| \leqq 1$ et nous utiliserons la moyenne $M_p(1)$ que nous désignerons par M_p.

Si $f(z)$ ne s'annule pas pour $|z| < 1$, chaque branche de $[f(z)]^p$ est uniforme dans ce cercle et l'on a

$$[f(z)]^p = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{[f(\zeta)]^p\, d\zeta}{\zeta - z}, \qquad \zeta = e^{i\theta}, \qquad |z| = \rho, \qquad 0 \leqq \rho < 1,$$

l'intégrale étant étendue à la circonférence $|\zeta| = 1$. On en déduit

$$|[f(z)]^p| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{i\theta})|^p\, d\theta}{1-\rho},$$

$$(2) \qquad |f(z)| \leqq \frac{M_p}{(1-\rho)^{\frac{1}{p}}}.$$

Si $f(z)$ s'annule aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, posons

$$g(z) = \prod_{i=1}^{i=h} \frac{\alpha_i - z}{1 - \bar{\alpha}_i z}.$$

Le module de $g(z)$ est égal à *un* pour $|z| = 1$; il est inférieur à *un* dans le cercle $|z| < 1$. Si l'on pose

$$f(z) = g(z)\, h(z),$$

la fonction $h(z)$ est dépourvue de zéro pour $|z| < 1$; on a

$$|f(z)| < |h(z)| \quad \text{si} \quad |z| < 1,$$
$$|f(z)| = |h(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1.$$

Donc M_p a la même valeur pour $f(z)$ et pour $h(z)$. On en déduit

$$|f(z)| < |h(z)| \leqq \frac{M_p}{(1-\rho)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{pour} \quad |z| = \rho < 1.$$

Ainsi, l'inégalité (2) est vraie dans tous les cas. Donc, *toute famille de fonctions holomorphes dans le cercle-unité fermé pour laquelle la moyenne* M_p *est bornée est une famille normale.*

Lorsque p augmente indéfiniment, le nombre M_p a pour limite M et l'on retrouve le théorème classique. Lorsque p tend vers zéro, le nombre M_p a pour limite la moyenne géométrique M_0 de $|f(z)|$:

$$M_0 = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta}.$$

Dans ce cas, le théorème n'est plus vrai, comme le montre la famille des fonctions $f_n(z) = e^{nz}$; on a ici

$$M_0 = e^{\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta} = 1,$$

mais la famille n'est pas normale autour de l'origine qui est un point irrégulier. Lorsque p croît de zéro à l'infini, M_p croît de M_0 à M : le théorème est vrai pour toute valeur de p sauf la valeur zéro.

5. Si l'on introduit la condition

$$(3') \qquad |f(z_0)| \geqq \delta M_p \qquad (0 < \delta \leqq 1),$$

on voit, en répétant le raisonnement du paragraphe 1, que la famille est quasi normale. Il suffit d'ailleurs que cette inégalité soit vérifiée pour M_p assez grand. La famille est normale si toute suite de fonctions $f(z)$ pour laquelle M_p augmente indéfiniment n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout domaine intérieur.

On voit aussi que la famille est normale dans un cercle fixe de centre z_0 dont le rayon ne dépend que de p et de δ. Supposons que (D) soit le cercle-unité. Dans tout cercle concentrique, de rayon ρ inférieur à *un*, le module maximum de $f(z)$ est borné par le nombre $M_p(1-\rho)^{-\frac{1}{p}}$, d'après l'inégalité (2). Comme on a, en prenant $z_0 = 0$,

$$|f(z_0)| \geqq \delta M_p = \delta(1-\rho)^{\frac{1}{p}} \times \frac{M_p}{(1-\rho)^{\frac{1}{p}}},$$

on retrouve, en remplaçant z par ρz, les conditions du paragraphe 3. La famille est donc normale dans le cercle de centre origine et de rayon $\delta\rho(1-\rho)^{\frac{1}{p}}$. Comme on peut choisir ρ arbitrairement entre 0 et 1, donnons-lui la valeur $\frac{p}{p+1}$ qui rend cette expression maximum. On obtient ainsi, pour le rayon de normalité, la limite inférieure

$$\frac{p\delta}{(p+1)^{\frac{p+1}{p}}}.$$

Lorsque p augmente indéfiniment cette expression a pour limite la valeur exacte δ qui correspond à $M_\infty = M$. Lorsque p tend vers zéro, elle a pour limite la valeur exacte o qui correspond à M_0.

6. Substituons maintenant au module, les valeurs extrêmes de la partie réelle ou de la partie imaginaire de $f(z)$. Soit, par exemple, A le maximum de $R(f)$. Nous supposerons en outre

$$(4) \qquad \mathcal{R}(f_0) \geqq \delta A \quad (0 < \delta \leqq 1) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{R}(f_0) \leqq \delta A \quad (\delta < 0),$$

en admettant que A est positif, ce que l'on peut toujours obtenir en ajoutant au besoin une constante aux fonctions $f(z)$. On obtient ainsi les mêmes résultats que lorsqu'il s'agit des modules. On peut d'ailleurs être ramené à ce cas, par la transformation

$$(5) \qquad F(z) = \frac{A f(z)}{f(z) - 2A}.$$

Comme on a

$$\mathcal{R}(f) \leqq A,$$

on en déduit

$$\left|\frac{f(z)}{f(z) - 2A}\right| \leqq 1, \qquad |F(z)| \leqq A.$$

D'ailleurs,

$$|F(z_0)| = \frac{A\,|f(z_0)|}{|f(z_0) - 2A|} \geqq \frac{|f(z_0)|}{|f(z_0)| + 2A} A \geqq \frac{|\delta|}{|\delta| + 2} A,$$

puisque

$$|f(z_0)| \geqq |\mathcal{R}[f(z_0)]| \geqq |\delta| A.$$

Si, en particulier, le domaine (D) est l'intérieur du cercle de rayon *un*, on voit que le rayon de normalité est

$$\frac{|\delta|}{|\delta| + 2}.$$

Cette valeur est atteinte par la famille de fonctions

$$f_n(z) = n \frac{[|\delta| + 2]z - |\delta|}{z+1},$$

déduite de la famille introduite au paragraphe 3 par la transformation (5).

Ces résultats ont déjà été obtenus par M. G. Valiron et notre méthode ne diffère pas de celle qu'il a suivie ([1]).

On peut remplacer, dans les inégalités (4), le maximum A de $\mathcal{R}(f)$ par son minimum B, ou par le maximum A′ ou le minimum B′ de la partie imaginaire $\mathcal{I}(f)$. Il suffit de substituer à $f(z)$, soit la fonction $-f(z)$, soit la fonction $-if(z)$, soit la fonction $if(z)$ pour être ramené au premier cas.

7. Nous avons jusqu'à présent porté notre attention sur certaines propriétés extrémales de l'aire couverte sur le plan Z des valeurs $Z = f(z)$: distance maximum à un point fixe, distance maximum ou minimum à une droite fixe. Nous allons voir que l'utilisation de l'aire de la surface couverte nous conduira aux mêmes conclusions.

Lorsqu'on mesure l'aire couverte par les valeurs Z de $f(z)$, on peut distinguer l'aire de la surface plane remplie par ces valeurs ou la somme des aires des surfaces remplies dans différents feuillets lorsque la fonction est multivalente. Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas et désignons par $\mathcal{A}$ l'aire totale de la région formée par les points d'affixes Z.

On sait que les fonctions holomorphes dans un domaine (D), pour lesquelles les aires $\mathcal{A}$ sont bornées par un nombre fixe, forment une famille normale ([2]). En reprenant encore le raisonnement du paragraphe 1, on arrivera à des conclusions semblables : si la famille des fonctions $\varphi(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{\mathcal{A}}}$, pour lesquelles l'aire totale couverte ne dépasse pas l'unité, n'a aucune limite égale à la constante zéro, la famille $f(z)$ est quasi normale. Si toute suite de fonctions $f(z)$ pour laquelle la suite des valeurs $\mathcal{A}$ augmente indéfiniment n'a qu'un nombre fini de zéros, la famille est normale.

On évitera, ici encore, les fonctions limites identiques à zéro,

([1]) G. Valiron, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, vol. XXI, 6ᵉ série, 1935, p. 145-148.

([2]) Paul Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales sc. de l'École Normale sup.*, t. XXIV, 3ᵉ série, 1937, p. 239).

en limitant inférieurement, en un point, le module de $\varphi(z)$, par exemple par la condition

(6) $$|f(z_0)| \geqq \delta\sqrt{\mathfrak{A}} \qquad (\delta > 0),$$

Dans ce cas, il existe un cercle de normalité de centre z_0, ne dépendant que de δ.

8. Déterminons le rayon de ce cercle lorsque le domaine (D) coïncide avec le cercle-unité $|z| \leqq 1$ et z_0 avec le centre de ce cercle. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

On sait que

$$\mathfrak{A} = \pi R^2 = \pi[|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 + \ldots].$$

Supposons

$$|f(z_0)| = |a_0| \geqq \delta R \qquad (\delta > 0).$$

$f(z)$ ne s'annulera pas tant que l'inégalité

$$|f(z) - a_0| < \delta R \leqq |a_0|$$

sera vérifiée. Or, si $|z| = \rho < 1$, on peut écrire

$$|f(z) - a_0| = |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots| \leqq |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots;$$

$$[|a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots]^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n\sqrt{n}|^2 \times \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho^n}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

d'après l'identité de Lagrange. Le second membre est égal à

$$R^2 \log\frac{1}{1-\rho^2}$$

et l'inégalité devient

$$\log\frac{1}{1-\rho^2} < \delta^2,$$

d'où

$$\rho < \sqrt{1 - e^{-\delta^2}} = \rho_0.$$

Le rayon de normalité est donc supérieur ou égal à ρ_0. Mais il ne peut dépasser ρ_0, comme le montre la famille des fonctions

$$f_n(z) = n \log\left(\frac{1-\rho_0^2}{1-\rho_0 z}\right),$$

pour lesquelles

$$\mathcal{A} = \pi R^2 = \pi n^2 \log \frac{1}{1-\rho_0^2} = \pi n^2 \delta^2, \qquad R = n\delta,$$

$$f_n(0) = -n \log \frac{1}{1-\rho_0^2} = -n\delta^2 = -\delta R.$$

$f_n(z)$ augmente indéfiniment pour $|z| < 1$, sauf au point irrégulier $z = \rho_0$ (1).

9. Introduisons maintenant l'aire $\mathcal{S}$, comptée sur le plan Z, de la région couverte par les points d'affixes $f(z)$: les fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) pour lesquelles les aires $\mathcal{S}$ sont bornées par un nombre fixe forment une famille normale (2). Nous pouvons donc substituer l'aire $\mathcal{S}$ à l'aire $\mathcal{A}$ et obtenir les mêmes résultats qualitatifs qu'au paragraphe 7. En introduisant la condition

$$|f(z_0)| \geqq \delta\sqrt{\mathcal{S}} \qquad (\delta > 0),$$

nous obtiendrons un cercle de normalité de centre Z_0.

Déterminons une limite inférieure de son rayon dans le cas où (D) est le cercle $|z| \leqq 1$ et où $z_0 = 0$. Soit z_1 un point de ce cercle dont le module ρ_1 est inférieur à 1. La fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle de centre z_1 et de rayon $1 - \rho_1$ et l'on peut écrire

$$f(z) = f(z_1) + (z - z_1)f'(z_1) + \ldots + \frac{(z-z_1)^n}{n!} f^{(n)}(z_1) + \ldots$$

avec

$$|z - z_1| \leqq 1 - \rho_1.$$

Donc, en posant

$$z - z_1 = (1 - \rho_1)\zeta,$$

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{(1-\rho_1)f'(z_1)} = \zeta + \ldots,$$

(1) Il résulte du calcul du texte que la fonction $f(z)$ ne peut prendre les valeurs arbitraires a_0 et b qu'en des points dont la distance est supérieure à

$$\rho = \left[1 - e^{-\frac{|b-a_0|^2}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}};$$

limite atteinte pour la fonction $a_0 + \dfrac{R^2}{b - a_0} \log \dfrac{1}{1 - \rho z}$.

(2) Paul Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 114.

le second membre désignant une série entière convergente pour $|\zeta| \leqq 1$. D'après un théorème de M. A. Bloch, les valeurs de la fonction définie par la somme de cette série couvrent une région à un feuillet dont l'aire est au moins égale à une constante $\mathcal{B}$. Donc $f(z)$ couvre une aire au moins égale à

$$(1-\rho_1)^2 |f'(z_1)|^2 \mathcal{B}.$$

Comme cette aire ne peut dépasser $\mathfrak{S}$, on a

$$|f'(z_1)| < \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\mathcal{B}}} \frac{1}{1-\rho_1}.$$

Remarquons en passant que cette inégalité montre que la famille des fonctions $f(z)$ est normale lorsque $\mathfrak{S}$ est bornée, puisque les valeurs de $f(z)$ sont bornées dans tout cercle intérieur au cercle-unité.

Soit encore $\mathfrak{S} = \pi R^2$, désignons par μ le rapport $\sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{B}}}$, on aura, quel que soit z de module ρ inférieur à *un*,

$$|f'(z)| < \frac{\mu R}{1-\rho}$$

et

$$|f(z)-f(0)| = \left|\int_0^z f'(z)\,dz\right| \leqq \int_0^\rho \frac{\mu R\,d\rho}{1-\rho} = \mu R \log \frac{1}{1-\rho}.$$

Si l'on introduit la condition

$$|f(0)| \geqq \delta R \qquad (\delta > 0),$$

on voit que $f(z)$ ne s'annulera pas tant que l'inégalité

$$|f(z)-f(0)| < \delta R$$

sera vérifiée, ce qui entraîne

$$\mu \log \frac{1}{1-\rho} < \delta$$

ou

$$\rho < 1 - e^{-\frac{\delta}{\mu}}.$$

La valeur de $\mathcal{B}$ étant numérique, le coefficient μ est un nombre indépendant de $\mathfrak{S}$.

On obtiendrait des résultats de même nature en remplaçant l'aire couverte sur le plan par l'aire couverte, sur une sphère de Riemann, par les points représentatifs des valeurs de $f(z)$, ou par la masse obtenue en attachant une densité à chaque point (¹).

10. Nous avons introduit les modules maxima, les valeurs moyennes, les aires des régions couvertes correspondant aux fonctions $f(z)$ elles-mêmes. On peut remplacer la fonction par une de ses dérivées sans altérer l'allure générale des propositions.

Bornons-nous au cas où l'on utilise le module maximum de l'une des dérivées.

Soit d'abord M′ le module maximum de la dérivée première $f'(z)$: une famille de fonctions pour lesquelles le nombre M′ est borné supérieurement par un nombre fixe est une famille normale. En effet, la famille des dérivées $f'(z)$ est normale et bornée; il en est de même de la famille des fonctions $f(z)-f(z_0)$, z_0 désignant un point fixe du domaine (D); il en est donc de même pour la famille $f(z)$ qui peut avoir comme fonction limite la constante infinie si une suite des valeurs de $f(z_0)$ augmente indéfiniment.

Posons $\varphi(z)=\frac{f(z)}{M'}$; la famille $\varphi(z)$ est normale puisque l'on a $|\varphi'(z)|\leq 1$. Soit alors une suite convergente de fonctions $\varphi_n(z)$; on peut supposer que la suite M'_n a une limite finie ou infinie. Si cette limite est finie, la suite $f_n(z)$ correspondante est normale puisque les dérivées $f'_n(z)$ ont un module borné. Si M'_n augmente indéfiniment écrivons

$$\varphi_n(z)=A_n+\Phi_n(z), \qquad \Phi_n(z)=\int_0^z \varphi'_n(z)\,dz,$$

la suite $\Phi_n(z)$ converge uniformément vers une limite finie; on peut supposer que A_n a une limite; si cette limite est infinie, écrivons

$$f_n(z)=M'_n\varphi_n(z)=M'_nA_n\left(1+\frac{\Phi_n(z)}{A_n}\right).$$

Sous cette forme, on voit que $f_n(z)$ augmente indéfiniment.

Si la limite de A_n est finie, $\varphi_n(z)$ converge vers une fonction

(¹) Paul Montel, *Sur les critères des familles normales* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. LX, 2ᵉ série, 1936, p. 244).

finie $\varphi_0(z)$ et $f_n(z)$ augmente indéfiniment sauf aux zéros de $\varphi_0(z)$, à moins que $\varphi_0(z)$ ne soit identiquement nulle. Introduisons alors une condition permettant d'écarter ce cas, par exemple la condition

$$|f(z_0)| \geqq \delta M' \qquad (\delta > 0),$$

vérifiée pour M′ assez grand.

Alors, la suite précédente est quasi normale. Ainsi : *toute suite de fonction $f(z)$ est normale ou quasi normale suivant que la suite des M′ correspondante est bornée ou non.*

Soit M'' le module maximum de $f''(z)$. Montrons d'abord que toute famille de fonctions $f(z)$ pour lesquelles le nombre M'' est borné supérieurement par un nombre fixe est quasi normale d'ordre *un*.

Considérons une suite infinie $f_n(z)$ pour laquelle on peut supposer que la suite M''_n ait une limite.

Si cette limite est nulle, $f''_n(z)$ a pour limite zéro. On peut écrire

$$f_n(z) = A_n(\alpha_n + \beta_n z) + g_n(z), \qquad g_n(z) = \int_0^z \int_0^z f''_n(z)\,dz\,dz.$$

$g_n(z)$ a pour limite zéro. Dans le polynome du premier degré, on a mis en facteur le plus grand des modules des coefficients. On a donc $|\alpha_n| \leqq 1$; $|\beta_n| \leqq 1$, et l'une au moins de ces inégalités est une égalité. On peut donc extraire une suite partielle telle que $\alpha_n + \beta_n z$ converge vers $\alpha + \beta z$, α et β n'étant pas nuls tous les deux. On voit alors que $f_n(z)$ converge vers un binome du premier degré ou vers l'infini, sauf au zéro de $\alpha + \beta z$ qui est un point irrégulier. La suite est quasi normale d'ordre *un*.

Si la limite de M''_n est finie et non nulle, on peut extraire une suite partielle telle que $f''_n(z)$, donc $g_n(z)$, ait une limite finie. Alors, $\alpha_n + \beta_n z$ convergeant toujours vers $\alpha + \beta z$, on voit que $f_n(z)$ converge vers une fonction finie si la suite A_n obtenue est finie; vers l'infini, sauf au zéro de $\alpha + \beta z$, si A_n croît indéfiniment, car on peut écrire

$$f_n(z) = A_n\left[\alpha_n + \beta_n z + \frac{g_n(z)}{A_n}\right].$$

La suite est encore quasi normale d'ordre *un*.

Soit enfin une famille de fonctions $f(z)$. Posons $\varphi(z) = \frac{f(z)}{M''}$; la famille des $\varphi(z)$ est quasi normale d'ordre *un*. Il suffit d'examiner le cas d'une suite $f_n(z)$ telle que la suite M''_n correspondante augmente indéfiniment. On peut toujours supposer que la suite $\varphi_n(z)$ a une limite. Si cette limite est l'infini, sauf en un point irrégulier, il en sera de même pour $f_n(z)$. Si cette limite est une fonction finie $\varphi_0(z)$, la suite $f_n(z)$ augmente indéfiniment, sauf aux zéros de $\varphi_0(z)$, à moins que $\varphi_0(z)$ ne soit identiquement nulle. Pour éviter cette circonstance nous introduirons une condition telle que

$$|f(z_0)| \geqq \delta M'' \qquad (\delta > 0),$$

vérifiée pour M'' assez grand.

On voit que l'on peut énoncer le théorème suivant : *Soit une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes dans un domaine* (D) *où elles vérifient la condition*

$$|f(z_0)| \geqq \delta M^{(p)} \qquad (\delta > 0),$$

lorsque le nombre $M^{(p)}$, module maximum de $f^{(p)}(z)$, est assez grand. Toute suite infinie de fonctions $f(z)$ est quasi normale d'ordre $p-1$ si la suite correspondante des $M^{(p)}$ est bornée; elle est quasi normale d'ordre arbitraire si cette suite n'est pas bornée.