BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL GHERMANESCU

Sur quelques équations fonctionnelles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 109-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__109_0>

SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES ;

Par M. MICHEL GHERMANESCU.

A l'occasion de recherches sur les équations fonctionnelles du premier ordre, j'ai eu besoin de la solution continue la plus générale de quelques équations fonctionnelles d'un type spécial rentrant dans la forme générale

$$\alpha\,\varphi(x, y, z) + \beta\,\varphi(y, z, x) + \gamma\,\varphi(z, x, y) = 0, \tag{A}$$

dans laquelle α, β, γ désignent des constantes réelles, non toutes nulles.

Comme l'intégration de ces équations dépassait le cadre du travail que j'avais entrepris, j'ai traité à part l'équation (A) dans le présent Mémoire.

Je rappelle brièvement quelques propriétés élémentaires dont j'aurai besoin dans la suite.

a. Une fonction $f(x, y)$ est dite *symétrique* par rapport aux variables x et y, lorsqu'elle satisfait à la relation

$$f(x, y) = f(y, x).$$

b. Une fonction $f(x, y)$ est dite *symétrique gauche* par rapport aux variables x et y, lorsqu'elle satisfait à la relation

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

c. Toute fonction $f(x, y)$ est décomposable d'*une seule manière* dans la somme d'une fonction symétrique et d'une fonction symétrique gauche par rapport aux variables x et y (¹)

$$f(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2} + \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}.$$

(¹) *Voir*, par exemple, M. GHERMANESCU (*Bull. de la Soc. roumaine de Math.*, t. 40, 1938, p. 141 et suiv.).

d. Une fonction $f(x, y, z)$, symétrique par rapport à deux couples de variables (x, y), (x, z), l'est encore par rapport à (y, z).

e. Une fonction $f(x, y, z)$, symétrique gauche par rapport à deux couples de variables (x, y), (x, z), l'est encore par rapport à (y, z).

f. Une fonction $f(x, y, z)$, symétrique par rapport à un couple (x, y) et symérique gauche par rapport à un autre (y, z), est *identiquement nulle*.

g. Toute fonction $f(x, y)$, symétrique par rapport à x et y, peut être, d'une infinité de manières, mise sous la forme

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(y, x).$$

h. Toute fonction $f(x, y)$, symétrique gauche par rapport à x et y, peut être, d'une infinité de manières, mise sous la forme

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x, y) - \mathrm{F}(y, x).$$

Les démonstrations de ces propriétés sont élémentaires.

I. — Équations à deux termes.

1. Considérons d'abord les équations à deux termes, de la forme

$$\text{(B)} \qquad \varphi(x, y, z) = \alpha\,\varphi(y, z, x).$$

Une telle équation n'a pas de solution réelle, quel que soit α. En effet, on en déduit

$$\varphi(y, z, x) = \alpha\,\varphi(z, x, y),$$
$$\varphi(z, x, y) = \alpha\,\varphi(x, y, z),$$

d'où, par multiplication, $\alpha^3 = 1$, dont la seule racine réelle est $\alpha = 1$.

Nous allons donc résoudre l'équation

$$\text{(1)} \qquad \varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x),$$

qu'on peut encore écrire

$$\text{(1')} \qquad \varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x) = \varphi(z, x, y).$$

On en déduit, par exemple,

$$\varphi(y, x, z) = \varphi(x, z, y) = \varphi(z, y, x), \tag{2}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) + \varphi(z, y, x) &= \varphi(z, x, y) + \varphi(y, x, z) \\ &= \varphi(y, z, x) + \varphi(x, z, y) = \lambda(x, y, z). \end{aligned} \tag{3}$$

Le premier membre est *symétrique* par rapport à x et z, le deuxième par rapport à y et z, le troisième par rapport à x et y. Il s'ensuit, d'après d, que tous sont symétriques par rapport aux trois couples formés avec les variables x, y, z. Leur valeur commune, $\lambda(x, y, z)$, est ainsi *symétrique* par rapport aux trois couples de variables (x, y), (y, z), (z, x). On a évidemment, dans ce cas,

$$\lambda(x, y, z) = (y, z, x) = \lambda(z, x, y) \tag{4}$$

qui montre, ce qui était évident *a priori*, que toute fonction $\lambda(x, y, z)$, symétrique par rapport aux trois couples de variables, est une solution de l'équation fonctionnelle (1). Il nous reste à trouver la plus générale. Or, on déduit encore de (1′) et (2),

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) - \varphi(y, x, z) &= \varphi(z, x, y) - \varphi(z, y, x) \\ &= \varphi(y, z, x) - \varphi(x, z, y) = \mu(x, y, z), \end{aligned} \tag{5}$$

dans laquelle chaque membre est *symétrique gauche* par rapport à x et y. On aura par exemple

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(y, x, z) = \mu(x, y, z); \tag{6}$$

on en déduit, en ajoutant avec la première égalité (3) et compte tenu de (2),

$$2\varphi(x, y, z) = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z). \tag{7}$$

Les égalités (1′) sont satisfaites si

$$\mu(x, y, z) = \mu(y, z, x) = (z, x, y).$$

A cause de la symétrie gauche de μ, on déduit

$$\mu(x, y, z) = -\mu(z, x, y),$$

qui montre que μ est *symétrique gauche* par rapport aussi à x

et z, donc, d'après e, elle l'est encore par rapport à y et z. On a obtenu ainsi le résultat suivant :

Théorème I. — *La solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x) \tag{1}$$

est donnée par

$$\varphi(x, y, z) = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z), \tag{8}$$

dans laquelle λ *et* μ *sont deux fonctions continues arbitraires, l'une symétrique et l'autre symétrique gauche par rapport aux trois couples de variables* (x, y), (y, z), (z, x).

2. On déduit du théorème précédent, le résultat suivant, digne d'intérêt :

Toute fonction de la forme

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) \tag{8'}$$

peut se mettre sous la forme

$$F(x, y, z) = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z), \tag{8}$$

dans laquelle λ *et* μ *sont, l'une symétrique et l'autre symétrique gauche par rapport aux couples de variables* (x, y), (y, z), (z, x).

On en déduit encore

Une fonction donnée $F(x, y, z)$ *ne peut se mettre sous la forme* (8') *que si elle est solution de l'équation fonctionnelle* (1).

II. — Équations fonctionnelles.

3. Passons maintenant à la résolution de l'équation fonctionnelle (A). On a vu que cette équation n'admet pas de solution non identiquement nulle, quelles que soient les valeurs des constantes non toutes nulles α, β, γ. D'ailleurs, de

$$\alpha\varphi(x, y, z) + \beta\varphi(y, z, x) + \gamma\varphi(z, x, y) = 0, \tag{A}$$

on déduit en permutant les variables

$$\gamma\varphi(x,y,z)+\alpha\varphi(y,z,x)+\beta\varphi(z,x,y)=0,$$
$$\beta\varphi(x,y,z)+\gamma\varphi(y,z,x)+\alpha\varphi(z,x,y)=0$$

et, pour que ce système d'équations linéaires en φ admette une solution non identiquement nulle, il faut avoir

$$\delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix}=0.$$

Comme on a

$$-2\delta=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2],$$

$\delta=0$ exige que l'on ait, ou bien

$$(10)\qquad \alpha=\beta=\gamma,$$

ou bien

$$(11)\qquad \alpha+\beta+\gamma=0.$$

Il y a donc deux types seulement d'équations fonctionnelles (A), qui admettent des solutions non identiquement nulles

$$(\mathrm{A}')\qquad \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(y,z,x)=(\alpha+\beta)\varphi(z,x,y),$$
$$(\mathrm{A}'')\qquad \varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)=0.$$

5. **Résolution de l'équation fonctionnelle** (A′). — Nous allons montrer que l'équation (A′) admet la même solution que (1). On peut aussi l'écrire

$$\alpha[\varphi(x,y,z)-\varphi(z,x,y)]=\beta[\varphi(z,x,y)-\varphi(y,z,x)]$$

ou encore

$$(12)\qquad \alpha\varphi'(x,y,z)=\beta\varphi'(z,x,y)$$

en posant

$$(13)\qquad \varphi'(x,y,z)=\varphi(x,y,z)-\varphi(z,x,y).$$

L'équation (12) est du type (1). Il y a deux cas à distinguer.

1° Si $\alpha \neq \beta$, l'équation (12) n'admet que la solution $\varphi' \equiv 0$ donc, d'après (13),

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(z, x, y),$$

équation encore du type (1), dont la solution, et, par conséquent, celle de (A′) est donnée par (8).

2° Si $\alpha = \beta$, l'équation (12) admet la solution générale donnée par (8), donc (13) devient

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(z, x, y) = \lambda + \mu. \tag{14}$$

Mais on en déduit

$$\varphi(y, z, x) - \varphi(x, y, z) = \lambda + \mu,$$
$$\varphi(z, x, y) - \varphi(y, z, x) = \lambda + \mu,$$

d'où, par addition,

$$\lambda + \mu = 0.$$

Comme λ est symétrique, tandis que μ est symétrique gauche, une telle égalité ne peut avoir lieu que si $\lambda = \mu = 0$. On déduit alors, de (14),

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(z, x, y),$$

donc φ est encore donnée par (8). On a alors le

Théorème II. — *La solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle*

$$\alpha\varphi(x, y, z) + \beta\varphi(y, z, x) = (\alpha + \beta)\varphi(z, x, y), \tag{A′}$$

dans laquelle α et β sont des constantes, est donnée par

$$\varphi(x, y, z) = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z), \tag{8}$$

où λ et β sont deux constantes continues arbitraires, l'une symétrique et l'autre symétrique gauche par rapport aux couples de variables (x, y), (y, z), (z, x).

III. — Équation fonctionnelle A″.

6. Considérons maintenant l'équation fonctionnelle (A″)

$$\varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) = 0, \tag{A″}$$

et soit $\varphi_1(x, y, z)$ une solution particulière de cette équation; en posant

$$(15) \qquad \varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z)\varphi'(x, y, z),$$

l'équation (A″) devient, compte tenu que φ en est une solution,

$$(16) \qquad \frac{\varphi_1(x, y, z)}{u(z, x, y)} = \frac{\varphi_1(y, z, x)}{u(x, y, z)}$$

dans laquelle

$$(17) \qquad u(x, y, z) = \varphi'(x, y, z) - \varphi'(z, x, y).$$

Mais, en posant encore [1]

$$\varphi_1(x, y, z) = u(z, x, y)\,v(x, y, z),$$

(16) devient

$$v(x, y, z) = v(y, z, x),$$

donc, d'après (8), $v = \lambda + \mu$. On a donc

$$\varphi_1(x, y, z) = (\lambda + \mu)[\varphi'(z, x, y) - \varphi'(y, z, x)]$$

de sorte que (15) devient

$$\varphi(x, y, z) = (\lambda + \mu)\varphi'(x, y, z)[\varphi'(z, x, y) - \varphi'(y, z, x)]$$

ou encore

$$(18) \qquad \varphi(x, y, z) = \mathrm{A}(x, y, z) - \mathrm{A}(y, z, x),$$

dans laquelle

$$\mathrm{A}(x, y, z) = (\lambda + \mu)\varphi'(x, y, z)\varphi'(z, x, y).$$

Comme λ, μ, φ' sont arbitraires, il s'ensuit que A est aussi arbitraire, mais continue. On a donc le

Théorème III. — *La solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle*

$$(\mathrm{A}'') \qquad \varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) = 0$$

---

[1] Nous écartons le cas $u = 0$, qui donne un résultat évident.

est donnée par

$$\varphi(x, y, z) = \Lambda(x, y, z) - \Lambda(y, z, x), \tag{18}$$

dans laquelle Λ *est une fonction continue arbitraire.*

Nous ne regardons pas comme distinctes les solutions qui se déduisent de l'une d'elles par permutation circulaire des variables. D'ailleurs, une telle solution est toujours de la forme (18), comme l'on peut s'en assurer en changeant de notation. Par exemple, la fonction

$$\Lambda(x, y, z) - \Lambda(z, x, y)$$

est aussi une solution de (A''), le changement de notation

$$\Lambda'(x, y, z) = -\Lambda(z, x, y)$$

ramène celle-ci à la forme (18).

7. Solutions symétriques de l'équation fonctionnelle (A''). — On a besoin, quelquefois, d'une solution de l'équation fonctionnelle (A''), *symétrique* ou *symétrique gauche* par rapport à deux variables, par exemple, par rapport à y et z. On devra donc déterminer la fonction arbitraire Λ, de (18), de manière qu'on ait

$$\Lambda(x, y, z) - \Lambda(y, z, x) = \pm [\Lambda(x, z, y) - \Lambda(z, y, x)]$$

ou

$$\Lambda(x, y, z) \pm \Lambda(z, y, x) = \pm \Lambda(x, z, y) + \Lambda(y, z, x). \tag{19}$$

Nous pouvons déterminer les propriétés de la fonction Λ, moyennant l'égalité précédente. Démontrons d'abord l'élégante propriété qui suit :

Théorème IV. — *Lorsqu'une fonction* φ *est solution de l'équation fonctionnelle* (A'') *ses parties, symétrique et symétrique gauche par rapport à deux quelconques des trois variables* x, y, z, *le sont également.*

En effet, soit

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) \tag{20}$$

une solution de l'équatiou (A''), dont φ_1 est la partie *symétrique*, tandis que φ_2 la partie *symétrique gauche* par rapport, par exemple à y et z (propriété c, p. 109). En écrivant que φ, donnée par (20), satisfait à (A″), on obtient la condition

$$u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z) = 0, \tag{21}$$

avec

$$u_1(x,y,z) = \varphi_1(x,y,z) + \varphi_1(y,z,x) + \varphi_1(z,x,y),$$
$$u_2(x,y,z) = \varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(y,z,x) + \varphi_2(z,x,y).$$

Mais on peut écrire, vu la *symétrie* de φ_1,

$$u_1(x,y,z) = \varphi_1(x,y,z) + \varphi_1(y,z,x) + \varphi_1(z,y,x),$$

donc $u_1(x, y, z)$ est *symétrique* par rapport à y et z. On a aussi, à cause de la *symétrie gauche* de φ_2,

$$u_2(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z) + \varphi_2(y,z,x) - \varphi_2(z,y,x),$$

donc $u_2(x, y, z)$ est *symétrique gauche* par rapport toujours à y et z. Mais alors, l'égalité (21), qu'on peut écrire

$$u_1(x,y,z) = -u_2(x,y,z),$$

est impossible, à moins que $u_1 = u_2 = 0$, parce qu'une fonction symétrique ne peut pas être égale à une fonction symétrique gauche. $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ montrent justement que φ_1 et φ_2 sont solutions de l'équation fonctionnelle (A″).

Dès lors, la détermination des solutions de (A″), telles que φ_1 et φ_2, est immédiate, lorsqu'on connaît la solution générale (18) et la propriété c, page 109; on aura pour la solution *symétrique*

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z) &= \frac{\varphi(x,y,z)+\varphi(x,z,y)}{2}\\ &= \frac{A(x,y,z)-A(y,z,x)+A(x,z,y)-A(z,y,x)}{2}\\ &= \frac{A(x,y,z)-A(z,y,x)}{2}+\frac{A(x,z,y)-A(y,z,x)}{2}\end{aligned}$$

ou, finalement,

$$\varphi_1(x,y,z) = A_1(x,y,z) + A_1(x,z,y),$$

dans laquelle A_1 est une fonction *symétrique gauche* par rapport à x et z, arbitraire d'ailleurs, comme A.

En écrivant encore

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{A(x,z,y)-A(y,z,x)}{2}+\frac{A(x,y,z)-A(z,y,x)}{2},$$

on aura aussi

$$\varphi_1(x, y, z) = A'_1(x, y, z) + A'_1(x, z, y),$$

dans laquelle A'_1, est, cette fois, *symétrique gauche* par rapport à x et y. Donc :

Théorème V. — *La solution continue générale de l'équation fonctionnelle* (A″), *symétrique par rapport à deux variables y et z, est de la forme*

$$A'(x, y, z) + A'(x, z, y), \tag{22}$$

A′ étant une fonction continue arbitraire, symétrique gauche par rapport à un autre couple de deux variables.

On peut écrire ensuite

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x, y, z) &= \frac{\varphi(x, y, z) - \varphi(x, z, y)}{2} \\
&= \frac{A(x, y, z) + A(z, x, y)}{2} - \frac{A(x, z, y) + A(z, y, x)}{2} \\
&= \frac{A(x, y, z) - A(z, y, x) - A(x, z, y) + A(y, z, x)}{2}
\end{aligned}$$

ou, finalement,

$$\varphi_2(x, y, z) = A''(x, y, z) - A''(x, z, y),$$

dans laquelle $A''(x, y, z)$ désigne une fonction *symétrique* par rapport à x et z, arbitraire. Donc :

Théorème VI. — *La solution continue générale de l'équation fonctionnelle* (A″), *symétrique gauche par rapport à deux variables y et z, est de la forme*

$$\varphi_2(x, y, z) = A''(x, y, z) - A''(x, z, y), \tag{23}$$

A″ étant une fonction continue arbitraire, symétrique par rapport à un autre couple de deux variables.

8. Les deux théorèmes précédents permettent de répondre à deux questions, d'apparence élémentaire, mais nécessitant la résolution de l'équation fonctionnelle (A″) :

a. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $\varphi(x, y, z)$, *symétrique par rapport à un couple de deux variables* (y, z), *puisse se mettre sous la forme*

$$\varphi(x, y, z) = A'(x, y, z) + A'(x, z, y), \tag{22}$$

dans laquelle A' *soit symétrique gauche par rapport à un autre couple, est que* $\varphi(x, y, z)$ *soit solution de l'équation fonctionnelle* (A''). *Dans ce cas, on peut d'une infinité de manières, mettre* $\varphi(x, y, z)$ *sous la forme* (22).

En effet, si $\varphi(x, y, z)$ est de la forme (20), elle satisfait à l'équation (A''); réciproquement, si $\varphi(x, y, z)$ satisfait à (A''): elle est de la forme (22), d'après le théorème V. Autrement dit,

a'. L'équation fonctionnelle

$$A'(x, y, z) + A'(x, z, y) = \varphi(x, y, z)$$

n'admet de solution $A'(x, y, z)$, *symétrique gauche par rapport à* (x, y) *ou* (x, z), *que si* $\varphi(x, y, z)$ *est solution de* (A''), *auquel cas elle en a une infinité, différant deux à deux par une fonction symétrique gauche par rapport à* y *et* z.

La dernière partie de cette proposition ressort du fait que de l'égalité

$$A_1(x, y, z) + A_1(x, z, y) = A_2(x, y, z) + A_2(x, z, y),$$

dans laquelle A_1 et A_2 sont symétriques gauches par rapport à x et z, par exemple, on déduit

$$A_1(x, y, z) - A_2(x, y, z) = -[A_1(x, z, y) - A_2(x, z, y)],$$

qui montre que la différence $A_1 - A_2$ est symétrique gauche par rapport à y et z.

De la même manière, on déduit les propositions suivantes :

b. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $\varphi(x, y, z)$, *symétrique gauche par rapport à un couple de deux variables* (y, z), *puisse se mettre sous la forme*

$$\varphi(x, y, z) = A''(x, y, z) - A''(x, z, y), \tag{23}$$

dans laquelle A'' *est symétrique par rapport à un autre couple, est que* $\varphi(x, y, z)$ *soit solution de l'équation fonctionnelle* (A'').

Dans ce cas, on peut mettre $\varphi(x, y, z)$ *d'une infinité de manières sous la forme* (23).

b'. L'équation fonctionnelle

$$A''(x, y, z) - A''(x, z, y) = \varphi(x, y, z)$$

n'admet de solution $A''(x, y, z)$ *symétrique par rapport à* (x, y) *ou* (x, z), *que si* $\varphi(x, y, z)$ *est solution de* (A''), *auquel cas elle en a une infinité, différant deux à deux par une fonction symétrique par rapport à* y *et* z.

c. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue quelconque $\varphi(x, y, z)$ *puisse se mettre sous la forme*

$$\varphi(x, y, z) = A(x, y, z) - A(y, z, x)$$

est que φ *soit solution de l'équation* (A'').

c'. L'équation fonctionnelle

$$A(x, y, z) - A(y, z, x) = \varphi(x, y, z)$$

n'admet de solution que si $\varphi(x, y, z)$ *est solution de* (A'').

IV. — Équations fonctionnelles réductibles aux précédentes.

9. De nombreuses équations fonctionnelles sont réductibles aux précédentes. Examinons quelques types remarquables.

L'équation

$$\Phi(x, y, z)\Phi(y, z, x)\Phi(z, x, y) = 1 \tag{24}$$

se réduit à (A'') par la substitution

$$\varphi(x, y, z) = L\,|\,\Phi(x, y, z)\,|. \tag{25}$$

D'après le théorème III, on a

$$\Phi(x, y, z) = e^{A(x, y, z) A(y, z, x)} = \frac{u(x, y, z)}{u(y, z, x)}, \tag{26}$$

u étant une fonction continue arbitraire.

On traite de la même manière l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x, y, z)\Phi(y, z, x)\Phi(z, x, y) = -1. \tag{27}$$

De même, l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x, y, z)\Phi(y, z, x) = \Phi^2(z, x, y) \tag{29}$$

est réductible à l'équation (A′), avec $\alpha = \beta$, par la même substitution. On a ici une circonstance particulière : cette équation admet deux groupes de solutions, égales et de signes contraires.

10. L'équation fonctionnelle

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)\varphi(y, z, x) \tag{30}$$

n'a pas toujours de solution non identiquement nulle, Φ étant quelconque. En effet, en permutant les variables, on trouve que Φ doit être solution de l'équation fonctionnelle (24), donc de la forme (26). L'équation (30) devient alors

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{u(x, y, z)} = \frac{\varphi(y, z, x)}{u(y, z, x)},$$

donc de la forme (1), l'inconnue étant $\frac{\varphi}{u}$. On a alors, d'après (8),

$$\varphi(x, y, z) = (\lambda + \mu)u(x, y, z). \tag{31}$$

11. L'équation fonctionnelle

$$\alpha\varphi(x, y, z) + \beta\varphi(y, z, x) + \gamma\varphi(z, x, y) = f(x, y, z) \tag{32}$$

offre un exemple d'équation fonctionnelle admettant une solution *unique*. En effet, supposons que α, β, γ ne satisfassent à aucune des relations (10) et (11). On déduit de (32)

$$\begin{aligned}\gamma\varphi(x, y, z) + \alpha\varphi(y, z, x) + \beta\varphi(z, x, y) &= f(y, z, x),\\ \beta\varphi(x, y, z) + \gamma\varphi(y, z, x) + \alpha\varphi(z, x, y) &= f(z, x, y),\end{aligned}$$

de sorte que la règle de Cramer nous donne facilement

$$\left\{\begin{aligned}\delta\varphi(x, y, z) &= (\alpha^2 - \beta\gamma)f(x, y, z) + (\gamma^2 - \alpha\beta)f(y, z, x) + (\beta^2 - \gamma\alpha)f(z, x, y),\\ \delta\varphi(y, z, x) &= (\beta^2 - \gamma\alpha)f(x, y, z) + (\alpha^2 - \beta\gamma)f(y, z, x) + (\gamma^2 - \alpha\beta)f(z, x, y),\\ \delta\varphi(z, x, y) &= (\gamma^2 - \alpha\beta)f(x, y, z) + (\beta^2 - \gamma\alpha)f(y, z, x) + (\alpha^2 - \beta\gamma)f(z, x, y),\end{aligned}\right. \tag{33}$$

où δ est le déterminant de la page 113, non nul, d'après les hypothèses faites sur α, β, γ. On vérifie facilement que la fonction obtenue satisfait à (32).

La solution générale de (32) s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène, c'est-à-dire, de l'équation (A). Cette équation n'admet que la solution identiquement nulle, d'après les hypothèses faites sur α, β, γ. Il s'ensuit que *l'équation fonctionnelle* (32) *admet la solution unique donnée par* (33).

En particulier, pour $\gamma = 0$, l'équation

$$(34) \qquad \alpha\varphi(x, y, z) + \beta\varphi(y, z, x) = f(x, y, z)$$

admet lorsque $\alpha + \beta \neq 0$ la solution unique

$$(35) \qquad \varphi(x, y, z) = \frac{\alpha^2 f(x, y, z) - \alpha\beta f(y, z, x) + \beta^2 f(z, x, y)}{\alpha^3 + \beta^3}.$$

12. Les résultats sont tous autres lorsque α, β, γ satisfont à (10) ou à (11). En effet, considérons d'abord l'équation fonctionnelle

$$(36) \qquad \varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) = f(x, y, z).$$

Comme le premier membre ne change pas lorsqu'on permute circulairement les variables, $f(x, y, z)$ doit jouir de la même propriété, donc

$$(37) \qquad f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y)$$

qui, d'après (1) et (8), montrent qu'on a

$$(38) \qquad f(x, y, z) = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z).$$

L'équation (36) peut alors s'écrire

$$\left[\varphi(x, y, z) - \frac{1}{3}f(x, y, z)\right] + \left[\varphi(y, z, x) - \frac{1}{3}f(y, z, x)\right] + \left[\varphi(z, x, y) - \frac{1}{3}f(z, x, y)\right] = 0$$

dont la solution, d'après (18), est donnée par

$$(39) \qquad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}f(x, y, z) + u(x, y, z) - u(y, z, x),$$

dans laquelle u désigne une fonction continue arbitraire, tandis que f est donnée par (38).

13. Considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(40)\qquad \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(y,z,x)-(\alpha+\beta)\varphi(z,x,y)=f(x,y,z).$$

On en déduit, en permutant circulairement les variables et ajoutant,

$$f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)=0,$$

donc, d'après (18), f doit être de la forme

$$(41)\qquad f(x,y,z)=u(x,y,z)-u(y,z,x).$$

Maintenant, on peut écrire l'équation (40)

$$(42)\qquad \beta\varphi'(x,y,z)-\alpha\varphi'(y,z,x)=f(x,y,z)$$

en posant

$$(43)\qquad \varphi'(x,y,z)=\varphi(y,z,x)-(z,x,y).$$

L'équation (42) est du type (34); on obtient sa solution en remplaçant dans (35), α par β et β par $-\alpha$: on obtient

$$\varphi'(x,y,z)=\frac{\beta^2 f(x,y,z)+\alpha\beta f(y,z,x)+\alpha^2 f(z,x,y)}{\beta^3-\alpha^3}$$

de sorte que (43) devient

$$\varphi(x,y,z)-\varphi(y,z,x)=\frac{\alpha\beta f(x,y,z)+\alpha^2 f(y,z,x)+\beta^2 f(z,x,y)}{\beta^3-\alpha^3}$$

ou encore, compte tenu de (41),

$$(44)\qquad \begin{aligned}&\varphi(x,y,z)-\varphi(y,z,x)\\ &\quad=-\frac{\beta u(x,y,z)+\alpha u(y,z,x)-(\alpha+\beta)u(z,x,y)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}.\end{aligned}$$

Traitons alors l'équation générale

$$(45)\qquad \varphi(x,y,z)-\varphi(y,z,x)=\mathrm{F}(x,y,z).$$

On en déduit la condition de possibilité [1]

$$(46)\qquad \mathrm{F}(x,y,z)+\mathrm{F}(y,z,x)+\mathrm{F}(z,x,y)=0.$$

---

[1] *Voir* aussi propriété c', page 120.

F doit donc être de la forme

$$(47)\qquad F(x, y, z) = v(x, y, z) - v(y, z, x);$$

alors (45) s'écrit

$$\varphi(x, y, z) - v(x, y, z) = \varphi(y, z, x) - v(y, z, x)$$

et, d'après (8), on aura

$$(48)\qquad \varphi(x, y, z) = v(x, y, z) + \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z).$$

En revenant à l'équation fonctionnelle (44), la condition de compatibilité (47) est satisfaite, avec

$$(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\,u(x, y, z) = -\alpha\, u(y, z, x) + \beta\, u(z, x, y),$$

de sorte que la solution la plus générale de (40), sera d'après (48),

$$(49)\qquad \varphi(x, y, z) = -\frac{\alpha\, u(y, z, x) - \beta\, u(z, x, y)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} + \lambda + \mu,$$

avec λ, μ arbitraires et l'on constate facilement que cette expression de φ vérifie bien (40).

14. On a supposé $\alpha \neq \beta$ dans le raisonnement : si $\alpha = \beta$, il doit être légèrement modifié ; l'équation (40) prend la forme

$$(50)\qquad \varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) - 2\varphi(z, x, y) = f(x, y, z),$$

la condition (46) doit encore être satisfaite par f. En écrivant (50) sous la forme

$$[\varphi(y, z, x) - \varphi(z, x, y) - u(x, y, z)] = [\varphi(z, x, y) - \varphi(x, y, z) - u(y, z, x)],$$

c'est-à-dire $\varphi'(x, y, z) = \varphi'(y, z, x)$, (8) donne

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(y, z, x) = u(z, x, \ ) + \lambda y + \mu,$$

équation de la forme (45), qui exige (46),

$$u(x, y, z) + u(y, z, x) + u(z, x, y) + 3(\lambda + \mu) = 0,$$

donc

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(y, z, x) = \frac{-u(x, y, z) - u(y, z, x) + 2u(z, x, y)}{3},$$

qui est encore de la forme (45), la condition (47) étant satisfaite par le second membre, qu'on peut écrire

$$\frac{1}{3}[u(z, x, y) - (y, z, x)] - \frac{1}{3}[u(x, y, z) - u(z, x, y)].$$

La formule (48) donne alors

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}[u(z, x, y) - u(y, z, x)] + \lambda + \mu$$

ou

$$(51) \qquad \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{3}f(y, z, x) + \lambda + \mu,$$

résultat qu'on pouvait aussi déduire de (49) en faisant $\alpha = \beta = 1$, mais que le raisonnement employé pour arriver à (49) ne nous permettait pas de le faire.

En résumé :

Théorème VII. — *L'équation fonctionnelle*

$$(40) \qquad \alpha\varphi(x, y, z) + \beta\varphi(y, z, x) + \gamma\varphi(z, x, y) = f(x, y, z),$$

dans laquelle f est donnée, ainsi que les constantes non toutes nulles α, β, γ, admet des solutions dans les conditions suivantes :

a. Une solution unique, quel que soit f, donnée par

$$(33) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)f(x, y, z) + (\gamma^2 - \alpha\beta)f(y, z, x) + (\beta^2 - \gamma\alpha)f(z, x, y)}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]}$$

lorsque les constantes α, β, γ ne sont pas toutes égales, ni de somme nulle.

b. Une infinité de solutions, données par

$$(39) \qquad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{3\alpha}f(x, y, z) + u(x, y, z) - u(y, z, x),$$

dans laquelle u est arbitraire, lorsque $\alpha = \beta = \gamma$ et seulement lorsque f satisfait aux équations fonctionnelles

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y).$$

c. Une infinité de solutions données par

$$(49)\quad \varphi(x,y,z) = -\frac{\alpha\,\mu(y,z,x) - \beta\,u(z,x,y)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} + \lambda(x,y,z) + \mu(x,y,z),$$

dans laquelle λ, μ *sont arbitraires, la première symétrique, la deuxième symétrique gauche par rapport à tous les couples de variables* (x, y), (y, z), (z, x), *lorsque* $\alpha+\beta+\gamma = 0$ *et seulement lorsque* f *satisfait à* (46), *et se met alors sous la forme*

$$(47)\qquad f(x,y,z) = u(x,y,z) - u(y,z,x).$$

Si $\alpha = \beta$, *la solution devient*

$$(51)\qquad \varphi(x,y,z) = -\frac{1}{3\alpha} f(y,z,x) + \lambda(x,y,z) + \mu(x,y,z).$$

14. L'équation fonctionnelle

$$(52)\qquad \varphi(x,y,z) + \mathrm{A}(x,y,z)\varphi(y,z,x) = \mathrm{B}(x,y,z),$$

dans laquelle A et B sont données, offre un autre curieux exemple, quant à l'unicité de la solution. On en déduit, par permutations circulaires,

$$\varphi(y,z,x) + \mathrm{A}(y,z,x)\varphi(z,x,y) = \mathrm{B}(y,z,x),$$
$$\varphi(z,x,y) + \mathrm{A}(z,x,y)\varphi(x,y,z) = \mathrm{B}(z,x,y),$$

compatibles avec (52) lorsque $\mathrm{A}(x, y, z)$ *n'est pas* solution de l'équation fonctionnelle

$$(27)\qquad \Phi(x,y,z)\Phi(y,z,x)\Phi(z,x,y) = -1,$$

considérée à la page 121. La règle de Cramer nous donne

$$(53)\quad \varphi(x,y,z) = \frac{\mathrm{B}(x,y,z) - \mathrm{A}(x,y,z)\mathrm{B}(y,z,x) + \mathrm{A}(x,y,z)\mathrm{A}(y,z,x)\mathrm{B}(z,x,y)}{1+\mathrm{A}(x,y,z)\mathrm{A}(y,z,x)\mathrm{A}(z,x,y)}.$$

Cette solution est *unique* lorsque A n'est pas solution de (27) car, en admettant l'existence de deux solutions, leur différence satisfait à l'équation (52) homogène

$$(52')\qquad \varphi(x,y,z) + \mathrm{A}(x,y,z)\varphi(y,z,x) = 0,$$

équation du type étudié (30), qui n'admet de solution non identiquement nulle que lorsque A satisfait à l'équation (27), contrairement à l'hypothèse.

Mais si A est solution de (27), on a, d'après (26) et (28),

$$A = -\frac{u(x, y, z)}{u(y, z, x)}. \tag{54}$$

D'autre part, la théorie des équations linéaires algébriques exige

$$B(x, y, z) - A(x, y, z)B(y, z, x) + A(x, y, z)A(y, z, x)B(z, x, y) = 0 \tag{55}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &B(x, y, z)u(y, z, x)u(z, x, y) \\ &\quad + B(y, z, x)u(z, x, y)u(x, y, z) \\ &\quad + B(z, x, y)u(x, y, z)u(y, z, x) = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{B(x, y, z)}{u(x, y, z)} + \frac{B(y, z, x)}{u(y, z, x)} + \frac{B(z, x, y)}{u(z, x, y)} = 0, \tag{56}$$

et comme l'équation fonctionnelle (52) peut s'écrire, avec (54),

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{u(x, y, z)} - \frac{\varphi(y, z, x)}{u(y, z, x)} = \frac{B(x, y, z)}{u(x, y, z)},$$

on voit que celle-ci est justement de la forme (45) en $\frac{\varphi}{u}$ et son second membre $\frac{B}{u}$ satisfait aussi à (46), d'après (56). On aura donc, d'après (48),

$$\varphi(x, y, z) = u(x, y, z)[v(x, y, z) + \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z)] \tag{57}$$

avec, d'après (47),

$$B(x, y, z) = u(x, y, z)[v(x, y, z) - v(y, z, x)]. \tag{58}$$

On a donc

Théorème VIII. — *L'équation fonctionnelle*

$$\varphi(x, y, z) + A(x, y, z)\varphi(y, z, x) = B(x, y, z) \tag{52}$$

admet une solution unique, donnée par (53), *lorsque* A *n'est pas solution de* (27). *Dans le cas contraire*, B *doit satisfaire à* (55) *et il y a une infinité de solutions données par* (57).