BULLETIN DE LA S. M. F.

S MANDELBROJT

Sur un théorème de M. Whittaker

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 1-2 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__s1_0>

COMMUNICATION

FAITE AU COURS DE LA SEANCE DU 24 MAI 1939.

SUR UN THÉORÈME DE M. WHITTAKER;

PAR M. S. MANDELBROJT.

En 1923, j'ai démontré le théorème suivant : Si $\Sigma a_{\lambda_n} z^{\lambda_n} = f(z)$ est méromorphe sur le cercle de convergence et y admet k pôles, on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leqq k.$$

Plusieurs auteurs ont généralisé ce théorème (MM. Pólya, Ostrowski, Obreschcoff, Jungen, Tsuji, Wilson, etc.). Dernièrement M. J. M. Whittaker a démontré, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant (*The Journal of the London Math. Society*, vol. XIII, n° 52, octobre, 1938, p. 295) :

Si $f(z)$ n'admet sur le cercle de convergence que k points singuliers tous isolés non critiques, on a

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{n} \leqq k,$$

c'est-à-dire que la limite supérieure de la *moyenne* des quantités $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ ne dépasse pas k.

Or, en analysant la méthode employée par M. Whittaker, j'ai remarqué qu'on peut énoncer un théorème plus précis, que voici :

Si $f(z) = \Sigma a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ n'admet sur le cercle de convergence supposé de rayon un que k points singuliers, tous isolés, non critiques, et si α désigne la longueur d'un arc sur lequel sont situés tous ces points on a, en désignant par $\mu_n^{(p)}$ la suite des λ_n vérifiant l'égalité

$$\lambda_n \equiv p \left[\operatorname{mod} E\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \right] \quad (^1),$$

(1) E(x) désigne la partie entière de x.

où p est un entier inférieur à $\frac{2\pi}{\alpha}$,

$$\overline{\lim}\,\frac{\mu_n^{(p)}}{n} \leqq K\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right].$$

M. Whittaker se base sur le lemme suivant : Si

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_k \qquad (0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \ldots \leqq \alpha_k < 2\pi)$$

sont les arguments des singularités (le rayon de convergence étant supposé égal à *un*), on a, en écrivant $f(z) = \Sigma a_n z^n$,

$$a_n = g(n) + b_n, \qquad \overline{\lim}\,|b_n|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

où $g(z)$ **est une fonction entière qui peut se mettre sous la forme**

$$g(z) = \sum_{s=1}^{k} e^{-i\alpha_s z} h_s(z),$$

chaque fonction $h_s(z)$ **étant d'ordre *un* et du type minimum, donc, telle que, quel que soit** $\delta > 0$, **l'inégalité**

$$(1) \qquad |h_s(n)| > e^{-\delta n}$$

soit vérifiée pour des entiers positifs formant une suite de densité *un*.

Si nous posons

$$E\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right] = \omega, \qquad g(\omega\zeta + p) = g_p(\zeta), \qquad h_s(\omega\zeta + p) = h_{p,s}(\zeta),$$
$$\omega\alpha_s = \alpha'_s, \qquad e^{-ip\alpha_s} h_{p,s}(\zeta) = h^*_{p,s}(\zeta),$$

[nous prenons $\alpha_1 = 0$ $(\alpha_1 \leqq \alpha_2 \ldots \leqq \alpha_k \leqq \alpha)$], **on voit que**

$$g_p(\zeta) = \sum_{s=1}^{k} e^{i\alpha'_s \zeta} h^*_{p,s}(\zeta),$$

chaque fonction $h^*_{p,s}(\zeta)$ **jouissant encore de la propriété (1). Il suffit maintenant de continuer le raisonnement de M. Whittaker, en y remplaçant** $g(n)$ **par** $g_p(n) = g(\omega n + p)$.