V.A. KOSTITZIN

Sur l'équation de la chaleur dans le cas d'une sphère hétérogène en tenant compte de sources et de discontinuités

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 125-142

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__125_0>

SUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR DANS LE CAS D'UNE SPHÈRE HÉTÉROGÈNE, EN TENANT COMPTE DE SOURCES ET DE DISCONTINUITÉS;

PAR M. V. A. KOSTITZIN.

I. — Sphère hétérogène continue.

1. *Définitions et équations.* — Dans ce Mémoire, je vais étudier le régime thermique d'un corps céleste du type planétaire, c'est-à-dire hétérogène, stratifié, dans certains endroits producteur de la chaleur. En effet, la Terre est nettement stratifiée, et d'autre part certains auteurs se servent de l'hypothèse de la stratification pour expliquer soit la structure de la surface de la Lune, soit les inégalités de son mouvement. Sans l'existence de sources thermiques, l'état actuel de la Terre resterait inexplicable. Dans ce Chapitre nous considérons le cas d'un corps céleste continu, mais producteur de la chaleur [1].

Soient $u(r, \varphi, \psi, t)$ la température, $\rho(r)$ la densité, $c(r)$ la chaleur spécifique, $\gamma(r) = \rho(r)c(r)$ la capacité calorifique de l'unité de volume, $K(r)$ la conductivité thermique, $M(r, \varphi, \psi, t)$ l'apport de sources que nous supposons indépendant de la température, R le rayon de la sphère. Nous supposons toutes ces fonctions continues, dérivables, bornées, ne s'annulant nulle part et développables en séries de Taylor et séries sphériques. Dans ces conditions, l'état thermique de la sphère est représenté par l'équation différentielle

$$(1)\qquad r^2\gamma\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(K r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{K}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{K}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + M.$$

La fonction u doit vérifier la condition initiale

$$(2)\qquad u(r, \varphi, \psi, 0) = \omega(r, \varphi, \psi),$$

---

[1] *Voir* V. A. KOSTITZIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 972; t. 214, 1942, p. 47 et 461.

et la condition à la surface extérieure

$$(3)\qquad \mathrm{E}u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) + \mathrm{K}(\mathrm{R}) \Big/^{r=\mathrm{R}} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} = \Psi(\varphi, \psi, t),$$

en désignant par ω, Ψ, des fonctions connues et par E, le coefficient d'échange superficiel.

Supposons toutes ces fonctions développables en séries sphériques

$$(4)\qquad \begin{cases} u(r, \varphi, \psi, t) = \sum\sum u_{nk}(r, t)\mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi), \\ \omega(r, \varphi, \psi) = \sum\sum \omega_{nk}(r) \quad \mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi), \\ \Psi(\varphi, \psi, t) = \sum\sum \Psi_{nk}(t) \quad \mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi), \\ \mathrm{M}(r, \varphi, \psi, t) = \sum\sum \mathrm{M}_{nk}(r, t)\mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Les fonctions $u_{nk}(r, t)$ vérifient les relations suivantes :

$$(5)\qquad r^2\gamma\frac{\partial u_{nk}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{K}r^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial r}\right) - n(n+1)\mathrm{K}u_{nk} + \mathrm{M}_{nk},$$

$$(6)\qquad u_{nk}(r, 0) = \omega_{nk}(r),$$

$$(7)\qquad \mathrm{E}u_{nk}(\mathrm{R}, t) + \mathrm{K}(\mathrm{R})\Big/^{r=\mathrm{R}}\frac{\partial u_{nk}(r, t)}{\partial r} = \Psi_{nk}(t).$$

2. *Introduction des fonctions* $q_n(\lambda, r)$. — Multiplions les équations (5) par une fonction à déterminer $q_n(\lambda, r)$ et intégrons par rapport à r de zéro à R

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_0^{\mathrm{R}} r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr + \lambda\int_0^{\mathrm{R}} r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr \\ &= \Big/_0^{\mathrm{R}} r^2\mathrm{K}\left(q_n\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) + \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{M}_{nk}q_n\,dr \\ &\quad + \int_0^{\mathrm{R}} u_{nk}\left[\frac{d}{dr}\left(\mathrm{K}r^2\frac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)\mathrm{K}q_n + \lambda r^2\gamma q_n\right]dr. \end{aligned}$$

Supposons que les fonctions q_n vérifient l'équation différentielle

$$(9)\qquad \frac{d}{dr}\left(\mathrm{K}r^2\frac{dq_n}{dr}\right) + [\lambda\gamma r^2 - \mathrm{K}n(n+1)]q_n = 0.$$

En tenant compte de (7) et (9), l'équation (8) devient

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr + \lambda \int_0^R r^2 \gamma\, q_n u_{nk}\, dr$$
$$= \Big/^{r=R} r^2\left[q_n \Psi_{nk} - u_{nk}\left(\mathrm{E}\, q_n + \mathrm{K}\frac{dq_n}{dr}\right)\right]$$
$$-\Big/^{r=0} \mathrm{K}\, r^2\left(q_n \frac{du_{nk}}{dr} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) + \int_0^R \mathrm{M}_{nk}\, q_n\, dr.$$

Parmi les solutions de (9) choisissons celle qui vérifie les conditions aux limites

$$(11)\qquad \Big/^{r=0} \mathrm{K}\, r^2\left(q_n \frac{du_{nk}}{dr} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) = 0,$$

$$(12)\qquad \Big/^{r=R}\left(\mathrm{E}\, q_n + \mathrm{K}\frac{dq_n}{dr}\right) = 0.$$

Supposons les fonctions K, γ développables en séries de Taylor

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{K} = \mathrm{K}_0 + \mathrm{K}_1 r + \mathrm{K}_2 r^2 + \dots, \\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \dots, \end{cases}$$

et cherchons une solution de (9) représentable de la façon suivante

$$(14)\qquad q_n = r^m(1 + \sigma_1 r + \sigma_2 r^2 + \dots).$$

L'équation différentielle (9) donne dans ces conditions

$$(15)\qquad \mathrm{K}_0[m(m+1) - n(n+1)] = 0,$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathrm{K}_0\sigma_1[(m+1)(m+2) - n(n+1)] + \mathrm{K}_1[m(m+2) - n(n+1)] = 0, \\ \mathrm{K}_0\sigma_2[(m+2)(m+3) - n(n+1)] \\ + \mathrm{K}_1\sigma_1[(m+1)(m+3) - n(n+1)] \\ + \mathrm{K}_2[m(m+3) - n(n+1)] + \lambda\gamma_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

D'après nos hypothèses, K_0 est positif et différent de zéro. On doit donc avoir $m = n$ ou bien $m = -n-1$. Désignons les solutions correspondantes par $\xi_n(\lambda, r)$, $\eta_n(\lambda, r)$

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi_n(\lambda, r) = r^n \quad (1 + \alpha_n^{(1)} r + \alpha_n^{(2)} r^2 + \dots), \\ \eta_n(\lambda, r) = r^{-n-1}(1 + \beta_n^{(1)} r + \beta_n^{(2)} r^2 + \dots). \end{cases}$$

Les équations (16) permettent de déterminer les coefficients

$$(18)\qquad \alpha_n^{(1)} = -\frac{K_1 n}{2K_0(n+1)}, \qquad \beta_n^{(1)} = -\frac{K_1(n+1)}{2K_0 n}, \qquad \ldots.$$

La condition (11) montre que, quel que soit n, c'est la fonction $\xi_n(\lambda, r)$ qu'il faut choisir. Ainsi, la fonction $q_n(\lambda, r)$, égale dans le cas considéré à $\xi_n(\lambda, r)$, se trouve déterminée, sauf en ce qui concerne le paramètre λ.

3. *Valeurs et fonctions caractéristiques.* — La fonction $q_n(\lambda, r)$ doit remplir la condition (12). Cette équation nous donne une suite de valeurs caractéristiques $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots,$ et de cette façon nous obtenons une suite de fonctions caractéristiques $q_n(\lambda_{n1}, r), q_n(\lambda_{n2}, r), \ldots.$ Cette suite est orthogonale. En effet, il résulte de (9) et (12) la relation

$$(19)\qquad \int_0^R r^2\gamma(r) q_n(\lambda_{ni}, r) q_n(\lambda_{nj}, r)\, dr = 0 \qquad (\lambda_{ni} \neq \lambda_{nj}).$$

Cette condition montre en particulier que toutes les valeurs caractéristiques sont réelles. On peut montrer qu'elles sont positives. En effet, l'équation (9), multipliée par $q_n\, dr$ et intégrée par rapport à r de zéro à R, donne

$$\lambda \int_0^R \gamma r^2 q_n^2\, dr = n(n+1) \int_0^R K q_n^2\, dr + \int_0^R K r^2 \left(\frac{dq_n}{dr}\right)^2 dr - \Big/^{r=R} K r^2 q_n \frac{dq_n}{dr},$$

ou bien, en tenant compte de (12),

$$(20)\qquad \lambda \int_0^R \gamma r^2 q_n^2\, dr = n(n+1) \int_0^R K q_n^2\, dr + \int_0^R K r^2 \left(\frac{dq_n}{dr}\right)^2 dr + ER^2 q_n^2(\lambda, R).$$

La partie droite de cette relation est positive, et par conséquent *toutes les valeurs caractéristiques sont positives.*

Dans ces conditions l'équation (10) devient

$$(21)\qquad \frac{d}{dt}\int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr + \lambda\int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr$$
$$= R^2 q_n(\lambda, R)\Psi_{nk}(t) + \int_0^R M_{nk}(r, t) q_n(\lambda, r)\, dr,$$

et il en résulte, en tenant compte de (6),

$$(22)\qquad \int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr = e^{-\lambda t}\int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr$$
$$+ R^2 q_n(\lambda, R)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Psi_{nk}(s)\, ds$$
$$+ \int_0^R q_n(\lambda, z)\, dz\int_0^t M_{nk}(z, s) e^{-\lambda(t-s)}\, ds,$$

λ appartenant à la suite $\{\lambda_{ni}\}$.

Ces équations résolvent le problème. En effet, les fonctions $q_n(\lambda_{ni}, r)$ forment une suite orthogonale complète, et l'on peut supposer la fonction u_{nk} développable en série de fonctions orthogonales $q_n(\lambda_{ni}, r)$

$$(23)\qquad u_{nk}(r, t) = \sum_i v_{nki}(t) q_n(\lambda_{ni}, r);$$

les coefficients $v_{nki}(t)$ étant donnés par la formule

$$(24)\qquad \begin{cases} Q_{ni}\, v_{nki}(t) = \displaystyle\int_0^R r^2\gamma\, q_n u_{nk}\, dr, \\ Q_{ni} = \displaystyle\int_0^R r^2\gamma\, q_n^2(\lambda_{ni}, r)\, dr. \end{cases}$$

Posons pour simplifier

$$(25)\qquad \begin{cases} G_n(r, z, t) = \displaystyle\sum_i \frac{q_n(\lambda_{ni}, r) q_n(\lambda_{ni}, z) e^{-\lambda_{ni} t}}{Q_{ni}}, \\ H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t) = \displaystyle\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) G_n(r, z, t) P_n(\cos\theta), \\ \cos\theta = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi'). \end{cases}$$

On trouve sans peine

$$(26)\qquad u_{nk}(r, t) = \int_0^R G_n(r, z, t) z^2 \gamma(z) \omega_{nk}(z)\, dz + R^2 \int_0^t G_n(r, R, t-s) \Psi_{nk}(s)\, ds + \int_0^R dz \int_0^t G_n(r, z, t-s) M_{nk}(z, s)\, ds,$$

et la solution générale du problème prend la forme

$$(27)\qquad \begin{aligned} u(r, \varphi, \psi, t) = {} & \int_0^R \gamma(z) z^2\, dz \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t) \\ & \times \omega(z, \varphi', \psi') \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi' \\ & + R^2 \int_0^t ds \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, R, t-s) \\ & \times \Psi(\varphi', \psi', s) \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi' \\ & + \int_0^R dz \int_0^t ds \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t-s) \\ & \times M(z, \varphi', \psi', s) \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'. \end{aligned}$$

II. — Noyau sphérique hétérogène entouré d'une enveloppe hétérogène concentrique.

1. Dans ce Chapitre je vais examiner le cas d'une sphère à une seule surface sphérique de discontinuité, avec des sources distribuées dans la masse et sur la surface de discontinuité. Soient r_1 le rayon de la surface de discontinuité, $K_1(r)$, $K_2(r)$, la conductivité thermique resp. à l'intérieur et à l'extérieur de la surface de discontinuité; $\rho(r)$, $c(r)$, $\gamma(r)$ peuvent être discontinus au passage de la sphère (r_1); ils sont continus, dérivables, bornés et non nuls, développables en séries de Taylor dans les intervalles $(0, r_1)$, (r_1, R). Les équations différentielles du problème prennent la forme

$$(28)\qquad \left\{ \begin{aligned} & r^2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(K_1 r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{K_1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{K_1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + M \\ & \qquad (0 \leqq r < r_1), \\ & r^2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(K_2 r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{K_2}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{K_2}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + M \\ & \qquad (r_1 < r \leqq R). \end{aligned} \right.$$

La condition initiale (2) reste sans changement. L'équation (3) exprimant les conditions à la surface extérieure prend la forme

$$(29)\qquad \mathrm{E}\,u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) + \mathrm{K}_2(\mathrm{R}) \Big/^{r=\mathrm{R}} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} = \Psi(\varphi, \psi, t).$$

En ce qui concerne le passage de la chaleur à travers la surface de discontinuité, on peut l'exprimer par les équations suivantes :

$$(30)\qquad \begin{cases} \varepsilon[u(r_1 - 0, \varphi, \psi, t) - u(r_1 + 0, \varphi, \psi, t)] + \mathrm{K}_1(r_1) \Big/^{r=r_1-0} \dfrac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} \\ \quad = \Phi(\varphi, \psi, t), \\ \varepsilon[u(r_1 + 0, \varphi, \psi, t) - u(r_1 - 0, \varphi, \psi, t)] + \mathrm{K}_2(r_1) \Big/^{r=r_1+0} \dfrac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} \\ \quad = \Phi(\varphi, \psi, t). \end{cases}$$

Les équations (4) restent valables. Il faut y adjoindre le développement analogue de la fonction $\Phi(\varphi, \psi, t)$

$$(31)\qquad \Phi(\varphi, \psi, t) = \Sigma\Sigma\, \Phi_{nk}(t)\, \mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi).$$

On obtient de cette façon les équations suivantes :

$$(32)\qquad \begin{cases} r^2\gamma \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{K}_1 r^2 \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r}\right) - n(n+1)\mathrm{K}_1 u_{nk} + \mathrm{M}_{nk} & (0 \leqq r < r_1), \\ r^2\gamma \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{K}_2 r^2 \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r}\right) - n(n+1)\mathrm{K}_2 u_{nk} + \mathrm{M}_{nk} & (r_1 < r \leqq \mathrm{R}). \end{cases}$$

Les conditions initiales et aux limites prennent la forme

$$(33)\qquad u_{nk}(r, 0) = \omega_{nk}(r),$$

$$(34)\qquad \begin{cases} \varepsilon[u_{nk}(r_1 - 0, t) - u_{nk}(r_1 + 0, t)] + \mathrm{K}_1(r_1) \Big/^{r=r_1-0} \dfrac{\partial u_{nk}(r, t)}{\partial r} \\ \quad = \Phi_{nk}(t), \\ \varepsilon[u_{nk}(r_1 + 0, t) - u_{nk}(r_1 - 0, t)] + \mathrm{K}_2(r_1) \Big/^{r=r_1+0} \dfrac{\partial u_{nk}(r, t)}{\partial r} \\ \quad = \Phi_{nk}(t). \end{cases}$$

$$(35)\qquad \mathrm{E}\,u_{nk}(\mathrm{R}, t) + \mathrm{K}_2(\mathrm{R}) \Big/^{r=\mathrm{R}} \frac{\partial u_{nk}(r, t)}{\partial r} = \Psi_{nk}(t).$$

2. Comme dans le Chapitre précédent nous allons chercher une suite de fonctions orthogonales $q_n(\lambda, r)$, permettant d'obtenir la solution sous forme d'une série orthogonale. Dans ce but multiplions les équations (28) par $q_n dr$ et intégrons par rapport à r dans les intervalles correspondants. La somme de résultats de ces opérations, en tenant compte de (34-35), donne l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
(36)\quad & \frac{d}{dt}\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr + \lambda\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr \\
&= \int_0^{r_1} u_{nk}\left[\frac{d}{dr}\left(K_1 r^2\frac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_1 q_n + \lambda r^2\gamma q_n\right]dr \\
&+ \int_{r_1}^R u_{nk}\left[\frac{d}{dr}\left(K_2 r^2\frac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_2 q_n + \lambda r^2\gamma q_n\right]dr \\
&+ \Big/^{r=R} r^2\left(q_n\Psi_{nk} - E q_n u_{nk} - K_2 u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) \\
&- \Big/^{r=0} K_1 r^2\left(q_n\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) + \int_0^R M_{nk} q_n\,dr \\
&+ u_{nk}(r_1 - 0, t)\Bigg[-K_1(r_1)\Big/^{r=r_1-0}\frac{dq_n}{dr} \\
&\qquad - \varepsilon q_n(\lambda, r_1 - 0) + \varepsilon q_n(\lambda, r_1 + 0)\Bigg] \\
&+ u_{nk}(r_1 + 0, t)\Bigg[\quad K_2(r_1)\Big/^{r=r_1+0}\frac{dq_n}{dr} \\
&\qquad + \varepsilon q_n(\lambda, r_1 - 0) - \varepsilon q_n(\lambda, r_1 + 0)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Supposons que les fonctions q_n vérifient les équations suivantes :

$$
(37)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dr}\left(K_1 r^2\dfrac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_1 q_n + \lambda\gamma r^2 q_n = 0 \qquad (0 \leqq r < r_1), \\[2ex]
\dfrac{d}{dr}\left(K_2 r^2\dfrac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_2 q_n + \lambda\gamma r^2 q_n = 0 \qquad (r_1 < r \leqq R);
\end{cases}
$$

$$
(38)\quad \Big/^{r=0} K_1 r^2\left(q_n\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) = 0;
$$

$$
(39)\quad \Big/^{r=R}\left(E q_n + K_2\frac{dq_n}{dr}\right) = 0;
$$

$$
\begin{aligned}
(40)\quad K_1(r_1)\Big/^{r=r_1-0}\frac{dq_n}{dr} &= K_2(r_1)\Big/^{r=r_1+0}\frac{dq_n}{dr} \\
&= \varepsilon[q_n(\lambda, r_1+0) - q_n(\lambda, r_1-0)].
\end{aligned}
$$

La condition (38) permet de déterminer complètement la fonction $q_n(\lambda, r)$ dans l'intervalle $(0, r_1)$

$$(41) \qquad q_n(\lambda, r) = \xi_{n1}(\lambda, r) = r^n[1 + \alpha_{n1}^{(1)} r + \alpha_{n1}^{(2)} r^2 + \ldots) \qquad (0 \leqq r < r_1).$$

Dans l'intervalle (r_1, R) on a la solution générale de (37_2) sous la forme

$$(42) \quad \begin{cases} q_n(\lambda, r) = A_n\,\xi_{n2}(\lambda, r) + B_n\,\eta_{n2}(\lambda, r), \\ \xi_{n2}(\lambda, r) = r^n[1 + \alpha_{n2}^{(1)} r + \alpha_{n2}^{(2)} r^2 + \ldots], \\ \eta_{n2}(\lambda, r) = r^{-n-1}[1 + \beta_{n2}^{(1)} r + \beta_{n2}^{(2)} r^2 + \ldots] \qquad (r_1 < r \leqq R). \end{cases}$$

La substitution dans les équations (39-40) donne

$$(43) \quad \begin{cases} A_n \xi_{n2}(\lambda, r_1) + B_n \eta_{n2}(\lambda, r_1) = \xi_{n1}(\lambda, r_1) + \dfrac{K_1(r_1)}{\varepsilon}\xi'_{n1}(\lambda, r_1), \\ A_n \xi'_{n2}(\lambda, r_1) + B_n \eta'_{n2}(\lambda, r_1) = \dfrac{K_1(r_1)}{K_2(r_1)}\xi'_{n1}(\lambda, r_1), \\ A_n[E\,\xi_{n2}(\lambda, R) + K_2(R)\xi'_{n2}(\lambda, R)] \\ \quad + B_n[E\,\eta_{n2}(\lambda, R) + K_2(R)\,\eta'_{n2}(\lambda, R)] = 0. \end{cases}$$

L'élimination des coefficients A_n, B_n nous donne l'équation caractéristique que nous n'écrivons pas explicitement. La condition d'orthogonalité des fonctions caractéristiques (19) reste valable. Les valeurs caractéristiques $\{\lambda_{ni}\}$ sont toutes réelles. La relation

$$(44) \quad \lambda \int_0^R \gamma q_n^2 r^2\,dr = n(n+1)\int_0^{r_1} K_1 q_n^2\,dr + n(n+1)\int_{r_1}^R K_2 q_n^2\,dr$$
$$+ \int_0^{r_1} K_1 r^2 \left(\frac{dq_n}{dr}\right)^2 dr + \int_{r_1}^R K_2 r^2 \left(\frac{dq_n}{dr}\right)^2 dr$$
$$+ ER^2 q_n^2(\lambda, R) + \varepsilon\, r_1^2 [q_n(\lambda, r_1+0) - q_n(\lambda, r_1-0)]^2$$

montre que toutes les valeurs caractéristiques sont positives.

3. Dans ces conditions les équations (36) deviennent

$$(45) \qquad \frac{d}{dt}\int_0^R r^2 \gamma\, q_n u_{nk}\,dr + \lambda \int_0^R r^2 \gamma\, q_n u_{nk}\,dr$$
$$= R^2 q_n(\lambda, R)\Psi_{nk} + \int_0^R M_{nk} q_n\,dr$$
$$+ r_1^2[q_n(\lambda, r_1 - 0) + q_n(\lambda, r_1 + 0)]\Phi_{nk},$$

et il en résulte, en tenant compte de (33),

$$(46) \quad \int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\, dr = e^{-\lambda t}\int_0^R r^2\gamma q_n \omega_{nk}\, dr$$
$$+ R^2 q_n(\lambda, R)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Psi_{nk}(s)\, ds$$
$$+ r_1^2 [q_n(\lambda, r_1 - o)$$
$$+ q_n(\lambda, r_1 + o)]\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Phi_{nk}(s)\, ds$$
$$+ \int_0^t ds \int_0^R M_{nk}(z, s) e^{-\lambda(t-s)} q_n(\lambda, z)\, dz,$$

λ appartenant à la suite $\{\lambda_{ni}\}$.

Les équations (46) résolvent le problème. On trouve sans peine la solution générale

$$(47) \quad u(r, \varphi, \psi, t) = \int_0^R \gamma(z) z^2\, dz \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t)$$
$$\times\, \omega(z, \varphi', \psi') \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'$$
$$+ R^2 \int_0^t ds \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, R, t-s)$$
$$\times\, \Psi(\varphi', \psi', s) \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'$$
$$+ r_1^2 \int_0^t ds \iint [H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, r_1 - o, t-s)$$
$$+ H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, r_1 + o, t-s)]$$
$$\times\, \Phi(\varphi', \psi', s) \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'$$
$$+ \int_0^t ds \int_0^R dz \iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t-s)$$
$$\times\, M(z, \varphi', \psi', s) \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'.$$

Les fonctions G_n, H sont définies par les équations (25).

III. — Sphère stratifiée à plusieurs couches hétérogènes.

1. Dans ce Chapitre nous considérons le problème général d'une sphère composée de plusieurs couches hétérogènes. L'hypothèse de l'existence de plusieurs surfaces de discontinuité rend les opérations de calcul plus compliquées, mais ne change rien dans le mécanisme même de la méthode. Soient

$$o = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m = R$$

les rayons successifs des surfaces de discontinuité, $K_1(r)$, $K_2(r)$, ..., $K_m(r)$ les conductivités des couches. Les équations différentielles du problème ont la forme habituelle

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(K_i r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{K_i}{\sin^2\varphi}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \dfrac{K_i}{\sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + M \\ \qquad (r_{i-1} < r < r_i,\ i = 1, 2, \ldots, m). \end{array} \right.$$

La condition initiale (2) reste sans changement. On a sur la surface extérieure

$$(49) \quad E\,u(R, \varphi, \psi, t) + K_m(R) \Big/^{r=R} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} = \Psi(\varphi, \psi, t).$$

Les conditions sur les surfaces de discontinuité prennent la forme

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i[u(r_i - 0, \varphi, \psi, t) - u(r_i + 0, \varphi, \psi, t)] \\ \quad + K_i(r_i) \Big/^{r=r_i-0} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \Phi_i(\varphi, \psi, t), \\ \varepsilon_i[u(r_i + 0, \varphi, \psi, t) - u(r_i - 0, \varphi, \psi, t)] \\ \quad + K_{i+1}(r_i) \Big/^{r=r_i+0} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \Phi_i(\varphi, \psi, t) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \end{array} \right.$$

En supposant toutes les fonctions développables en séries sphériques, on obtient les équations suivantes :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2\gamma \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(K_i r^2 \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r}\right) - n(n+1)K_i u_{nk} + M_{nk} \\ \qquad (r_{i-1} < r < r_i,\ i = 1, 2, \ldots, m). \end{array} \right.$$

Les conditions initiales et aux limites deviennent

$$(52) \quad u_{nk}(r, 0) = \omega_{nk}(r),$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i[u_{nk}(r_i - 0, t) - u_{nk}(r_i + 0, t)] + K_i\ (r_i) \Big/^{r=r_i-0} \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r} = \Phi_{ink}, \\ \varepsilon_i[u_{nk}(r_i + 0, t) - u_{nk}(r_i - 0, t)] + K_{i+1}(r_i) \Big/^{r=r_i+0} \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r} = \Phi_{ink} \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \end{array} \right.$$

$$(54) \quad E\,u_{nk}(R, t) + K_m(R) \Big/^{r=R} \frac{\partial u_{nk}}{\partial r} = \Psi_{nk}.$$

2. Multiplions les équations (48) par $q_n dr$ et intégrons par rapport à r de r_{i-1} à r_i. En prenant la somme de ces intégrales, on obtient

$$(55)\quad \frac{d}{dt}\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr + \lambda\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\int_{r_{i-1}}^{r_i} u_{nk}\left[\frac{d}{dr}\left(K_i r^2\frac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_i q_n + \lambda r^2\gamma q_n\right]dr$$

$$+ \Big/^{r=R} r^2\left(q_n\Psi_{nk} - E u_{nk} q_n - K_m u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right)$$

$$- \Big/^{r=0} K_1 r^2\left(q_n\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} r_i^2\Big\{[q_n(\lambda, r_i - 0) + q_n(\lambda, r_i + 0)]\Phi_{ink}$$

$$+ u_{nk}(r_i - 0, t)\Big[-K_i(r_i)\Big/^{r=r_i-0}\frac{dq_n}{dr} + \varepsilon_i q_n(\lambda, r_i + 0) - \varepsilon_i q_n(\lambda, r_i - 0)\Big]$$

$$+ u_{nk}(r_i + 0, t)\Big[K_{i+1}(r_i)\Big/^{r=r_i+0}\frac{dq_n}{dr} + \varepsilon_i q_n(\lambda, r_i - 0) - \varepsilon_i q_n(\lambda, r_i + 0)\Big]\Big\}$$

$$+ \int_0^R M_{nk} q_n\,dr.$$

Supposons que les fonctions q_n vérifient les équations suivantes :

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(K_i r^2\dfrac{dq_n}{dr}\right) - n(n+1)K_i q_n + \lambda r^2\gamma q_n = 0 \\ (r_{i-1} < r < r_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

$$(57)\quad \Big/^{r=0} K_1 r^2\left(q_n\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} - u_{nk}\frac{dq_n}{dr}\right) = 0,$$

$$(58)\quad \Big/^{r=R}\left(E q_n + K_m\frac{dq_n}{dr}\right) = 0,$$

$$(59)\quad \begin{cases} K_i(r_i)\Big/^{r=r_i-0}\dfrac{dq_n}{dr} = K_{i+1}(r_i)\Big/^{r=r_1+0}\dfrac{dq_n}{dr} \\ \qquad = \varepsilon_i[q_n(\lambda, r_i + 0) - q_n(\lambda, r_i - 0)] \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \end{cases}$$

Avec nos hypothèses sur les fonctions K_i, γ, on peut donner aux solutions fondamentales de (56) la forme

$$(60)\quad \begin{cases} \xi_{ni}(\lambda, r) = r^n \quad (1 + \alpha_{ni}^{(1)} r + \alpha_{ni}^{(2)} r^2 + \ldots) \\ \eta_{ni}(\lambda, r) = r^{-n-1}(1 + \beta_{ni}^{(1)} r + \beta_{ni}^{(2)} r^2 + \ldots) \end{cases} \quad (r_{i-1} < r < r_i),$$

ou bien une autre forme équivalente. La solution générale de (56)

$$(61)\quad \begin{cases} q_n(\lambda, r) = A_{ni}\xi_{ni}(\lambda, r) + B_{ni}\eta_{ni}(\lambda, r) \\ \quad (r_{i-1} < r < r_i;\ i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

contient $2m$ coefficients inconnus A_{ni}, B_{ni} qu'il faut déterminer par l'intermédiaire de $2m$ équations linéaires (57-59). Or, l'équation (57) montre que $B_{n1} = 0$; on peut poser $A_{n1} = 1$. Il reste donc $2(m-1)$ coefficients à déterminer et $2m - 1$ équations linéaires. En éliminant ces coefficients, on trouve l'équation caractéristique permettant de calculer une suite de valeurs caractéristiques $\{\lambda_{nh}\}$ et de former la suite correspondante de fonctions caractéristiques $\{q_n(\lambda_{nh}, r)\}$. Ces fonctions forment une suite orthogonale. Les valeurs caractéristiques $\{\lambda_{nh}\}$ sont toutes réelles, et la relation

$$(62)\quad \lambda\int_0^R r^2\gamma(r)q_n^2(\lambda, r)\,dr = n(n+1)\sum_{i=1}^{m}\int_{r_{i-1}}^{r_i} K_i q_n^2\,dr + \sum_{i=1}^{m}\int_{r_{i-1}}^{r_i} K_i r^2\left(\frac{dq_n}{dr}\right)^2 dr + ER^2 q_n^2(\lambda, R) + \sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i r_i^2[q_n(\lambda, r_i - 0) - q_n(\lambda, r_i + 0)]^2$$

montre que toutes les valeurs $\{\lambda_{ah}\}$ sont positives.

3. Dans ces conditions l'équation (55) devient

$$(63)\quad \frac{d}{dt}\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr + \lambda\int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr = R^2 q_n(\lambda, R)\Psi_{nk}(t) + \sum_{i=1}^{m-1} r_i^2[q_n(\lambda, r_i - 0) + q_n(\lambda, r_i + 0)]\Phi_{ink}(t) + \int_0^R M_{nk}(r, t)q_n\,dr,$$

et il en résulte

$$(64)\quad \int_0^R r^2\gamma q_n u_{nk}\,dr = e^{-\lambda t}\int_0^R r^2\gamma q_n \omega_{nk}\,dr$$
$$+ R^2 q_n(\lambda, R)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Psi_{nk}(s)ds$$
$$+\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\,ds\int_0^R M_{nk}(z, s)q_n(\lambda, z)\,dz$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1} r_i^2[q_n(\lambda, r_i-0)+q_n(\lambda, r_i+0)]$$
$$\times\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Phi_{ink}(s)\,ds,$$

λ appartenant à la suite $\{\lambda_{nk}\}$. Ces équations résolvent le problème, et l'on trouve sans peine la solution générale

$$(65)\quad u(r, \varphi, \psi, t) = \int_0^R \gamma(z)z^2\,dz\iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t)$$
$$\times\,\omega(z, \varphi', \psi')\sin\varphi'\,d\varphi'\,d\psi'$$
$$+ R^2\int_0^t ds\iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, R, t-s)$$
$$\times\,\Psi(\varphi', \psi', s)\sin\varphi'\,d\varphi'\,d\psi'$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1} r_i^2\int_0^t ds\iint[\;H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, r_i-0, t-s)$$
$$+ H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, r_i+0, t-s)]$$
$$\times\,\Phi_i(\varphi', \psi', s)\sin\varphi'\,d\varphi'\,d\psi'$$
$$+\int_0^t ds\int_0^R dz\iint H(\varphi, \psi, \varphi', \psi', r, z, t-s)$$
$$\times\,M(z, \varphi', \psi', s)\sin\varphi'\,d\varphi'\,d\psi'.$$

IV. — Quelques applications.

1. *Température moyenne au niveau r.* — Soit

$$(66)\quad U(r, t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} u(r, \varphi, \psi, t)\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi$$

la température moyenne au niveau r. Il est facile de voir que cette fonction est égale au premier terme du développement de $u(r, \varphi, \psi, t)$ en série sphérique, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
(67) \qquad \mathrm{U}(r, t) = u_0(r, t) = \int_0^{\mathrm{R}} & \mathrm{G}_0(r, z, t)\gamma(z)\omega(z)z^2\,dz \\
& + \mathrm{R}^2 \int_0^t \mathrm{G}_0(r, \mathrm{R}, t-s)\Psi_0(s)\,ds \\
& + \int_0^t ds \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{G}_0(r, z, t-s)\mathrm{M}_0(z, s)\,dz \\
& + \sum_{i=1}^{m-1} r_i^2 \int_0^t [\mathrm{G}_0(r, r_i - 0, t-s) \\
& + \mathrm{G}_0(r, r_i + 0, t-s)]\Phi_{i0}(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

On obtient la température centrale, en posant $r = 0$ soit dans la formule (65), soit dans (67).

2. *Influence de la distribution initiale de la température.* — Nous avons vu que dans toutes les circonstances les valeurs caractéristiques $\{\lambda_{ni}\}$ restent positives. Cela signifie que les fonctions G_n, H ne contiennent le temps que sous la forme de facteurs exponentiels décroissants $e^{-\lambda_{ni}t}$, et par conséquent

$$
(68) \qquad \lim_{t \to \infty} \mathrm{G}_n = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \mathrm{M} = 0.
$$

Donc, le premier terme de la partie droite des formules (65), (67), décroît indéfiniment, et *l'influence de la distribution initiale de la température devient insensible après un laps de temps suffisamment long.*

3. *Influence des sources à débit indépendant du temps.* — Supposons les fonctions M et Φ_i indépendantes du temps. Dans l'expression (65) les termes qui dépendent de ces sources tendent vers une limite constante par rapport au temps, et *pour t suffisamment grand l'influence des sources à débit indépendant du temps s'exprime par des termes constants par rapport à t.* On arrive au même résultat limite, en supposant que les débits des sources tendent vers des limites déterminées.

4. *Établissement du régime périodique.* — Supposons la fonction $\Psi(\varphi, \psi, t)$, exprimant l'apport thermique extérieur, périodique

$$\Psi(\varphi, \psi, t+p) = \Psi(\varphi, \psi, t). \tag{69}$$

Donnons à cette fonction la forme d'une série trigonométrique

$$\Psi(\varphi, \psi, t) = \sum A_m(\varphi, \psi) \cos m\bar{\omega}t + B_m(\varphi, \psi) \sin m\bar{\omega}t \tag{70}$$

avec $\bar{\omega}p = 2\pi$. Formons l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^t G_n(r, z, t-s)\Psi(\varphi, \psi, s)\,ds &= \sum_i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m q_n(\lambda_{ni}, r) q_n(\lambda_{ni}, z)}{Q_{ni}} \int_0^t \cos m\bar{\omega}s\, e^{-\lambda_{ni}(t-s)}\,ds \\ &+ \sum_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m q_n(\lambda_{ni}, r) q_n(\lambda_{ni}, z)}{Q_{ni}} \int_0^t \sin m\bar{\omega}s\, e^{-\lambda_{ni}(t-s)}\,ds.\end{aligned} \tag{71}$$

Mais on trouve facilement

$$\int_0^t \cos m\bar{\omega}s\, e^{-\lambda(t-s)}\,ds = \frac{\lambda \cos m\bar{\omega}t + m\bar{\omega} \sin m\bar{\omega}t - \lambda e^{-\lambda t}}{m^2\bar{\omega}^2 + \lambda^2}$$

$$\int_0^t \sin m\bar{\omega}s\, e^{-\lambda(t-s)}\,ds = \frac{\lambda \sin m\bar{\omega}t - m\bar{\omega} \cos m\bar{\omega}t + m\bar{\omega}e^{-\lambda t}}{m^2\bar{\omega}^2 + \lambda^2},$$

ce qui donne pour t très grand

$$\begin{aligned}\int_0^t G_n(r, z, t-s)\Psi(\varphi, \psi, s)\,ds &\simeq \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\bar{\omega}t + B_m \sin m\bar{\omega}t) \sum_i \frac{q_n(\lambda_{ni}, r) q_m(\lambda_{ni}, z)\lambda_{ni}}{Q_{ni}(m^2\bar{\omega}^2 + \lambda_{ni}^2)} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin m\bar{\omega}t - B_m \cos m\bar{\omega}t) m\bar{\omega} \sum_i \frac{q_n(\lambda_{ni}, r) q_m(\lambda_{ni}, z)}{Q_{ni}(m^2\bar{\omega}^2 + \lambda_{ni}^2)}.\end{aligned} \tag{72}$$

Donc, *si l'apport thermique extérieur est périodique, et si en outre les débits des sources intérieures tendent aux limites déterminées, il s'établit, après un laps de temps suffisamment long, un régime périodique indépendant de la distribution initiale de la température.*

5. *Degré géothermique.* — On peut montrer qu'en dépit de tout ce que l'on a affirmé et que l'on continue encore à affirmer, *le degré géothermique ne dépend pas directement de l'état intérieur du globe.* Supposons que la profondeur h d'un point soit très petite par rapport au rayon terrestre R. On a

$$(73)\quad u(\mathrm{R}-h, \varphi, \psi, t) \simeq u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) - h\int^{r=\mathrm{R}-0} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r},$$

ou bien, en tenant compte de la condition (3),

$$(74)\quad u(\mathrm{R}-h, \varphi, \psi, t) \simeq u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) + \frac{h}{\mathrm{K(R)}}[\mathrm{E}u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) - \Psi(\varphi, \psi, t)].$$

Cette équation permet de déterminer le degré géothermique. Soient $r_1 = \mathrm{R} - h_1$, $r_2 = \mathrm{R} - h_2$ deux niveaux tels que les températures correspondantes ne diffèrent entre elles que d'un degré. Cela donne

$$\mathrm{I} = \frac{h_1 - h_2}{\mathrm{K(R)}}[\mathrm{E}u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) - \Psi(\varphi, \psi, t)],$$

et l'on en tire la valeur du degré géothermique

$$(75)\qquad h_1 - h_2 = \frac{\mathrm{K(R)}}{\mathrm{E}u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) - \Psi(\varphi, \psi, t)},$$

Cette expression ne dépend pas explicitement de l'état intérieur du globe, sauf par l'intermédiaire de la température superficielle $u(\mathrm{R}, \varphi, \psi\ t)$ et peut-être de la fonction $\Psi(\varphi, \psi, t)$. Notre conclusion n'est valable que pour h suffisamment petit.

Ici quelques mots à propos de la condition à la surface (3) sont nécessaires. Le problème physique réel de l'état thermique du globe terrestre est beaucoup plus compliqué que le problème mathématique linéaire que nous avons résolu. Si l'on peut encore conserver l'équation différentielle linéaire (1) ou (48), en négligeant le fait de la dépendance qui existe entre la température et la fonction γ, il est nécessaire, en établissant la condition à la surface extérieure, de tenir compte du rayonnement, et celui-ci, d'après la loi de Stephan, est proportionnel à la quatrième et non pas à la première puissance de la température absolue. Dans ces conditions il faut remplacer (3) par la relation suivante

$$(76)\qquad a\sigma u^4(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) + \mathrm{K(R)}\int^{r=\mathrm{R}-0} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} = a\mathrm{W}(\varphi, \psi, t),$$

en désignant par a le pouvoir absorbant de la surface, par σ la constante de la loi de Stephan, par $W(\varphi, \psi, t)$ la radiation solaire. En tenant compte de cette relation, l'équation (74) devient

$$(77)\quad u(R-h, \varphi, \psi, t) = u(R, \varphi, \psi, t) + \frac{ha}{K(R)}[\sigma u^4(R_1, \varphi, \psi, t) - W(\varphi, \psi, t)],$$

et le degré géothermique est donné par la formule

$$(78)\qquad h_1 - h_2 = \frac{K(R)}{a[\sigma u^4(R, \varphi, \psi, t) - W(\varphi, \psi, t)]}$$

6. *Approximations successives.* — Pour conserver le caractère linéaire du problème mathématique, il faut remplacer la température absolue $u(r, \varphi, \psi, t)$ par la température $v(r, \varphi, \psi, t)$

$$(79)\qquad u(r, \varphi, \psi, t) = 273^{\circ} + v(r, \varphi, \psi, t).$$

En admettant $v(r, \varphi, \psi, t)$ suffisamment petit par rapport à 273°, on peut remplacer, en première approximation, la condition (76) par la relation linéaire

$$(80)\qquad 4a\sigma\, 273^3 v_0 + K(R) \Big/^{r=R-0} \frac{\partial v_0}{\partial r} = aW - a\sigma\, 273^4$$

identique avec (3) si l'on pose

$$(81)\qquad E = 4a\sigma\, 273^3, \qquad \Psi = aW - a\sigma\, 273^4.$$

On peut continuer ensuite, en posant

$$(82)\qquad 4a\sigma\, 273^3 v_m + K(R) \Big/^{r=R-0} \frac{\partial v_m}{\partial r}$$
$$= aW - a\sigma\, 273^4 - 6a\sigma\, 273^2 v_{m-1}^2 - 4a\sigma\, 273\, v_{m-1}^3,$$

et en désignant par $v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots$ les approximations successives.

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1943.)