SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 175-185

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__175_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMMUNICATIONS ET CONFÉRENCES

FAITES AU COURS DES ANNÉES 1941 ET 1942

S'adresser, pour ce qui concerne le *Bulletin*,
à M. H. Cartan, 95, boulevard Jourdan, Paris (14e),
et pour ce qui concerne l'administration de la Société,
à M. Thiberge, 4, square Lagarde, Paris (5e).

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

BUREAU ET CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ
POUR 1942.

Président	MM.	PLATRIER.
Vice-Présidents		DARMOIS. GAMBIER. CHAPELON. BOULIGAND.
Secrétaires		H. CARTAN. THIBERGE.
Vice-Secrétaires		BRARD. EYRAUD.
Trésorier	Mme	DUBREIL.
Archiviste	MM.	A. CHÂTELET.
Autres Membres du Conseil		DARGENTON. DELSARTE. DUBOURDIEU. FAVARD. GIBRAT. GOT. HENNEQUIN. JANET. LE CORBEILLER. LEDOUX. MÉTRAL. MILLOUX. MYARD. VAULOT.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1941.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

Élections :

Sont élus à l'unanimité : M. Ledoux, présenté par MM. Got et Platrier; M. Roger Apéry, présenté par MM. Bouligand et Lichnerowicz; M. René Dugas, présenté par MM. Platrier et Bouligand.

M. Marotte fait une conférence sur « le dialogue théétète de Platon et les débuts de la science mathématique grecque ».

SÉANCE DU 14 JANVIER 1942.

Assemblée générale.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement total du Conseil, les renouvellements partiels prévus par les statuts n'ayant pu avoir lieu les années précédentes du fait de la guerre. En même temps se tient à Lyon une Assemblée des membres résidant en zone non occupée. Le total des voix obtenues tant à Paris qu'à Lyon se répartit ainsi :

Élus :

MM. Bouligand, Brard, H. Cartan, Chapelon, A. Châtelet, Darmois, Dubourdieu, Mme Dubreil-Jacotin, MM. Eyraud, Favard, Gibrat, Got, Hennequin, Janet, Milloux, Myard, Platrier, Thiberge, Vaulot, 73 voix; MM. Dargenton, Delsarte, Gambier, Le Corbeiller, Ledoux, Métral, 72 voix.

Ont obtenu en outre :

MM. Haag, Lagrange, Leconte, Leray, chacun 1 voix.

Élection :

M. René Hayart, étudiant à Lyon, présenté par MM. Dulac et Platrier, est élu à l'unanimité membre de la Société.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1942.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

Élections :

Sont élus à l'unanimité : M. Gérard Petiau, présenté par MM. de Broglie et Bouligand, M. Charles Ehresmann, présenté par MM. Élie Cartan et Lichnerowicz.

M Dufresnoy fait une conférence « sur quelques progrès récents de la théorie des fonctions d'une variable complexe ».

SÉANCE DU 11 MARS 1942.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

M. P. Dubreil fait une conférence sur « la théorie moderne de la divisibilité algébrique ».

SÉANCE DU 13 MAI 1942.

PRÉSIDENCE DE M. BOULIGAND.

Élection :

M. Germain Kreweras, présenté par MM. Valiron et Henri Cartan, est élu à l'unanimité.

M. Lelong fait une conférence sur « l'application de la théorie sous-harmonique aux fonctions de plusieurs variables complexes ».

SÉANCE DU 10 JUIN 1942.

PRÉSIDENCE DE M. HENRI CARTAN.

M. Albert Châtelet fait une conférence sur « le crible d'Eratosthène et la divisibilité des nombres entiers quadratiques ».

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1942.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

M. Maurice Fréchet fait une conférence « sur les fonctions périopiques, presque périodiques et asymptotiquement presque périodiques, et leurs applications ».

SÉANCE DU 9 DÉCEMBRE 1942.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

M. Élie Cartan prononce l'éloge funèbre de M. S. Zaremba, qui était l'un des plus anciens membres de la Société et faisait partie des membres honoraires du Bureau.

M^lle^ Sophie Piccard, professeur à l'Université de Neuchâtel, présentée par MM. Wavre et Lichnerowicz, est élue à l'unanimité membre de la Société.

M. Henri Cartan fait une conférence « sur les fondements des mathématiques ».

SECTION DE CLERMONT-FERRAND

(DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE).

SÉANCE DU 16 AVRIL 1942.

Constitution de la Section. Élections de M. André Roussel comme Président et de M. Marchaud comme Président d'honneur.

Trois communications ont été présentées.

M. de Rham : Le parallélisme sur la sphère.

M. Ehresmann : Sur la théorie des espaces fibrés.

M. J. Laboureur : Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme (*Voir* le texte p. 181).

SÉANCE DU 4 MAI 1942.

Communication de M. Schwartz : Sur l'approximation des fonctions par des polynomes généralisés.

SÉANCE DU 21 MAI 1942.

Deux communications ont été présentées :

M. A. Roussel : Sur une fonction nouvelle admettant pour zéros les nombres premiers.

M. Delange : Sur le domaine de convergence des séries entières de deux variables.

COMMUNICATION

FAITE A LA SECTION DE CLERMONT-FERRAND LE 16 AVRIL 1942.

LES STRUCTURES FIBRÉES SUR LA SPHÈRE ET LE PROBLÈME DU PARALLÉLISME;

PAR M. JACQUES LABOUREUR.

L'exposé qui suit est consacré à l'étude de deux problèmes particuliers de la théorie des espaces fibrés; il s'agit d'une part de la classification des espaces fibrés dont la variété de base est une sphère à n dimensions; d'autre part, de l'étude de certaines conditions pour qu'une sphère soit parallélisable (1).

1. *Mode de définition d'une structure fibrée.* — Soit E un espace fibré, F la fibre, B la base que nous supposerons recouverte par une famille d'ensembles ouverts U_i. Deux structures fibrées E(B, F, G, H) et E(B, F, G, H′) correspondant au même groupe structural G seront dites *isomorphes* s'il existe un automorphisme ω de F et un automorphisme α de E, conservant chaque fibre (2), tels que

$$H' = \omega H \alpha.$$

Il en résulte que

$$G = \omega G \omega^{-1};$$

autrement dit, que ω appartient au plus grand groupe d'automorphismes de F admettant G comme sous-groupe distingué. Ce groupe $\overline{G}$ est le *normalisateur* de G (dans le groupe de tous les automorphismes de F).

Pour tout couple (U_i, U_j), soit t_{ij} une application continue de $U_i \cap U_j$ dans G vérifiant la relation d'associativité

$$t_{ij}(x).t_{jk}(x) = t_{ik}(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

---

(1) Pour les définitions et notations relatives aux espaces fibrés, voir *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1621; 212, 1941, p. 945; et 213, 1941, p. 762.

(2) Condition plus restrictive que celle adoptée dans [3].

La donnée d'une telle famille $T = \{t_{ij}\}$ permet de définir une structure fibrée bien déterminée [3]. Deux familles $T = \{t_{ij}\}$ et $T' = \{t'_{ij}\}$ seront dites *équivalentes* s'il existe un automorphisme $\omega \in \overline{G}$ et, pour chaque U_i, une application continue g_i de U_i dans G, tels que

$$t'_{ij}(x) = \omega . g_i(x) . t_{ij}(x) . g_j^{-1}(x) . \omega^{-1}.$$

On peut alors dire : *La donnée d'une classe de familles* T *équivalentes définit sur* B *un type de structures fibrées isomorphes.*

2. *Structures fibrées sur la sphère* S^n. — Supposons que la variété de base soit une sphère orientée $S^n (n \geqq 2)$, que nous partageons en deux hémisphères par une sphère équatoriale S^{n-1}. La famille T se réduit ici à un seul élément, à savoir une classe de représentations de S^{n-1} dans G, ou encore (si l'on suppose le groupe G localement contractile), un élément du groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(G)$ [4].

Considérons, dans l'ensemble des applications continues de S^{n-1} dans G, la relation d'équivalence suivante : deux telles applications φ, φ' seront équivalentes s'il existe des applications ε_1, ε_2 de S^{n-1} dans G, prolongeables chacune à une hémisphère, c'est-à-dire homotopes à o, et un élément ω de $\overline{G}$ tels que

$$\varphi' = \omega . \varepsilon_1 . \varphi . \varepsilon_2^{-1} . \omega^{-1}.$$

La classe d'équivalence d'une application φ contient toujours la classe d'homotopie $[\varphi]$ de cette application, mais elle ne lui est pas identique, en général, si le groupe G n'est pas connexe. D'autre part, cette classe d'équivalence contient toujours une application de S^{n-1} dans la composante connexe G_0 de G contenant l'automorphisme identique de F.

Soient $\pi_0(\overline{G})$ le groupe des composantes de $\overline{G}$ et $\pi_{n-1}(G_0)$ le $(n-1)^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de G_0. Les éléments de $\pi_0(\overline{G})$ forment un système d'opérateurs pour le groupe $\pi_{n-1}(G_0)$: le transformé d'un élément $c \in \pi_{n-1}(G_0)$ par un élément $\gamma \in \pi_0(\overline{G})$ sera par définition la classe d'homotopie c' de l'application $\varphi' = a . \varphi . a^{-1}$ de S^{n-1} dans G_0,

---

(3) *Voir* Ehresmann, ***Espaces fibrés associés*** (*Comptes rendus*, 213, 1941, p. 762).

(4) *Voir* W. Hurewicz, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 37, 1935, p. 112-119.

dans laquelle φ représente une application de S^{n-1} dans G_0 appartenant à la classe c, et a un automorphisme de F appartenant à la composante connexe γ de $\overline{G}$. On a alors le résultat suivant : *à tout type de structures fibrées isomorphes sur* S^n *correspond de façon biunivoque une classe d'éléments de* $\pi_{n-1}(G_0)$ *équivalents par rapport à* $\pi_0(\overline{G})$ ([5]).

Cette classe sera dite *classe caractéristique* de la structure fibrée considérée. La classe des applications inessentielles correspond à la structure de produit topologique $S^n \times F$. Le résultat précédent reste valable pour $n = 1$, à condition de remplacer le groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(G_0)$ par le groupe des composantes $\pi_0(G)$.

3. *Le problème du parallélisme absolu dans les sphères.* — On appelle *variété de Stiefel* $V_{n+1,p+1}$ ([6]) l'ensemble des systèmes orthonormés et ordonnés de $p+1$ vecteurs issus de l'origine dans l'espace numérique R^{n+1} $(0 < p < n)$. Ces variétés admettent une structure fibrée de base S^n, de fibre $V_{n,p}$, le groupe structural étant le groupe orthogonal mixte $\Omega_n + \sigma_0\Omega_n$ à n variables. (Ω_n désigne le groupe orthogonal connexe, et σ_0 une symétrie fixe de l'espace R^n.)

La classe caractéristique de $V_{n+1,p+1}$ est définie dans le groupe

$$\pi_{n-1}(\Omega_n).$$

Un élément représentatif en est l'application qui à tout point x de S^{n-1} associe la symétrie par rapport au diamètre de S^{n-1} passant par x. Désignons, de façon plus précise, par $\sigma_{n-1}(x)$ cette symétrie si n est impair, et le produit de cette symétrie par σ_0 si n est pair. Ainsi σ_{n-1} est toujours une application de S^{n-1} dans le groupe connexe Ω_n. La classe caractéristique de $V_{n+1,p+1}$ comprend les classes d'homotopie $[\sigma_{n-1}]$ et $[\sigma_{n-1}^{-1}]$, distinctes ou non suivant que n est pair ou impair.

L'espace fibré associé principal ([3]) de $V_{n+1,p+1}$ est l'espace de groupe Ω_{n+1}, quel que soit $p < n$. Cet espace n'est d'ailleurs autre que $V_{n+1,n}$. Il est fibré par Ω_n sur S^n. Soit p_n la projection canonique de Ω_{n+1} sur S^n.

On dit que la sphère S^n est *parallélisable* s'il existe dans l'espace Ω_{n+1} un système continu de représentants de la base S^n. Il résulte de

---

([5]) Ceci constitue une rectification du théorème B de la première Note citée en ([1]). Ce théorème n'est exact que si l'on suppose $\overline{G}$ connexe.

([6]) STIEFEL, *Comm. math. helv.*, 8, 1936, p. 305-353.

la Note citée en ([3]) et de ce qui précède que les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :

(a) S^n *est parallélisable;*

(b) $V_{n+1,p+1}$ *est isomorphe au produit topologique* $V_{n,p} \times S^n$; en particulier : (b_1) Ω_{n+1} *est isomorphe à* $\Omega_n \times S^n$ ([7]);

(c) *l'application* σ_{n-1} *de* S^{n-1} *dans* Ω_n *est homotope à zéro.*

A toute application φ de S^n dans Ω_{n+1} correspond une application $p_n.\varphi$ de S^n dans S^n, dite projection de φ; on voit immédiatement que les conditions de parallélisabilité énoncées sont encore équivalentes à la suivante :

(d) *Il existe une application de* S^n *dans* Ω_{n+1} *projetée suivant une application de* S^n *dans* S^n *de degré topologique* 1.

4. *Le problème des recouvrements fibrés.* — Étant donnés un espace topologique B et une fibre F convenablement choisie, peut-on construire un espace E fibré par F sur B et dont les n premiers groupes d'homotopie s'annulent ($n \geqq 1$)? Pour $n = 1$, ce problème admet, moyennant des hypothèses convenables sur B, une réponse affirmative, et conduit à la théorie des espaces de recouvrements universels; la fibre est alors un espace discret. Mais pour $n > 1$, une telle fibre ne suffira pas en général, d'après un résultat de Hurewicz [théorème IV de l'article cité en ([4])].

Étudions ici le cas où B est la sphère S^n. On peut alors prendre pour fibre une sphère S_0^{n-1} et pour groupe structural $\Omega_n + \sigma_0\Omega_n$. Les théorèmes d'isomorphie ([8]) montrent que l'on a toujours, dans ce cas,

$$\pi_k(E) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqq k \leqq n-2.$$

Il faut donc construire E de façon à d'abord annuler $\pi_{n-1}(E)$. Pour caractériser E (à un isomorphisme près), il faut se donner une application φ de S^{n-1} dans Ω_n à une équivalence près. L'application $p_{n-1}.\varphi$ est une application de S^{n-1} dans S_0^{n-1} dont le degré topologique a une valeur absolue d bien déterminée, indépendante de l'application φ choisie dans la classe caractéristique de E. On déduit alors des théorèmes d'isomorphie que $\pi_{n-1}(E)$ est isomorphe au groupe quotient du

---

([7]) L'implication (a) → (b_1) se trouve dans la Thèse de M. ECKMANN (*Comm. math. helv.*, 14, 1942, p. 141-192).

([8]) *Voir* la deuxième des Notes citées en ([1]).

groupe additif Z des entiers par le groupe dZ des multiples de d. Pour que $\pi_{n-1}(\mathrm{E})$ se réduise à l'unité, il faut et il suffit que $d=1$, donc, en vertu de (d), que S^{n-1} soit parallélisable. Donc la propriété suivante est encore équivalente à la parallélisabilité de S^n :

(e) *Il existe un espace* E *fibré par* S^n *sur* S^{n+1}, *de groupe structural* Ω_{n+1} *et tel que* $\pi_n(\mathrm{E})=0$.

En particulier : pour qu'une sphère S^{N} soit fibrée par une sphère $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-n}$ sur une sphère S^n, il faut que $\mathrm{N}=2n-1$ et que la fibre S^{n-1} soit parallélisable.

Dans les seuls cas connus de parallélisabilité d'une sphère, cette condition est d'ailleurs suffisante, car Hopf a montré [9] que S^{2n-1} est fibrée par S^{n-1} sur S^n pour $n=2, 4, 8$.

---

[9] H. Hopf, *Fundamenta Math.*, 25, 1935, p. 427-440.