

BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ CHARRUEAU

Sur la courbure et la torsion géodésique

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 20-26

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__20_0

© Bulletin de la S. M. F., 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA COURBURE ET LA TORSION GÉODÉSIQUE;

PAR M. ANDRÉ CHARRUEAU.

1. Soient C_1 une courbe quelconque tracée sur une surface S ; $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{T_1}$, la courbure normale et la torsion géodésique de C_1 en l'un de ses points P ; $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$, celle des courbures principales, $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$ et $\frac{1}{\mathcal{R}_2}$, dont la valeur algébrique est la plus grande. Désignons par φ_1 l'angle positif, compris entre zéro et π , que fait la droite tangente à C_1 en P avec la direction principale Δ_1 correspondant à $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$; le sens dans lequel φ_1 est compté positivement est le sens direct (de gauche à droite) par rapport à la demi-normale positive de S .

Traçons dans le plan tangent à S en P deux axes rectangulaires $A\xi$ et $A\eta$, de sens direct par rapport à la demi-normale positive de S et dont le premier est parallèle à Δ_1 (*fig. 1*).

Soient A_1 et A_2 les deux points de $A\xi$ dont les abscisses ont des valeurs algébriques égales à celles de $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$ et de $\frac{1}{\mathcal{R}_2}$, et traçons la circonférence de centre C dont A_2A_1 est un diamètre.

Menons par le point A_2 une parallèle $A_2\tau_1$ à la tangente à la courbe C_1 en P . Cette parallèle coupe la circonférence C au point τ_1 . On a $\widehat{A_1A_2\tau_1} = \varphi_1$, et l'on voit que les coordonnées de τ_1 sont égales à $\frac{1}{R_1}$ et à $-\frac{1}{T_1}$. Le lieu du point $\left(\frac{1}{R_1}, -\frac{1}{T_1}\right)$ lorsque φ_1 varie est donc la circonférence C .

Traçons maintenant la droite $A\tau_1$, qui coupe la circonférence C en B et, par ce dernier point, menons une parallèle à $A\xi$, qui coupe la circonférence C en τ'_1 , et une parallèle à $A\eta$, qui coupe ladite circonférence en τ''_1 . Les points τ'_1 et τ''_1 sont diamétralement opposés.

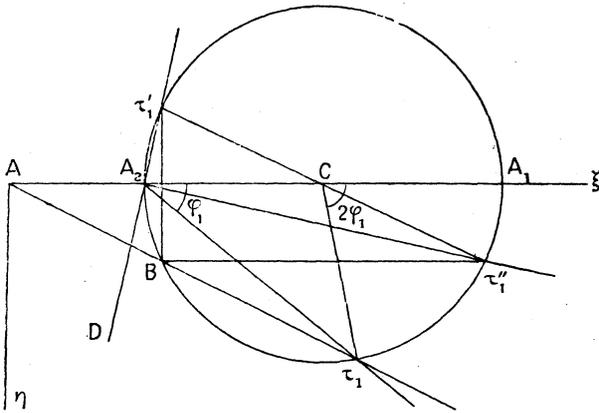
On démontre que les coordonnées du point τ'_1 sont égales l'une à la courbure normale et l'autre à la torsion géodésique changée de signe, relatives à la direction conjuguée de la tangente à la courbe C_1 par rapport à l'indicatrice de la surface. Donc la droite $A_2\tau'_1$ est parallèle à la direction conjuguée de la tangente à C_1 .

On vérifie qu'on a

$$(1) \quad \widehat{\text{tang} \xi A_2 \tau'_1} \cdot \widehat{\text{tang} \xi A_2 D} = - \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1},$$

conformément à une relation classique.

Fig. 1.



On voit aussi que la droite $A_2\tau''_1$, qui est perpendiculaire à $A_2\tau'_1$, est parallèle à la droite tangente à l'image sphérique de la courbe C_1 au point correspondant à P.

La représentation précédente ressemble à celle de Mohr du vecteur contrainte, relative à l'équilibre plan des milieux continus.

On peut faire des applications intéressantes de cette représentation de la courbure normale et de la torsion géodésique.

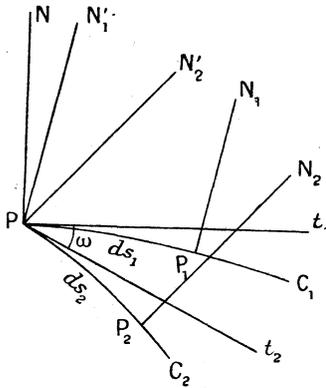
2. Soient u, v des coordonnées curvilignes quelconques; E, F, G, D, D', D'' les coefficients des deux formes fondamentales de S; H la quantité positive $\sqrt{EG - F^2}$.

Appelons respectivement courbes C_1 et C_2 les lignes $v = \text{const.}$ et les lignes $u = \text{const.}$ de S et prenons pour demi-normale posi-

tive en un point quelconque $P(x, y, z)$ de S , celle dont les cosinus directeurs sont égaux à $\frac{1}{H} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{1}{H} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $\frac{1}{H} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$.

Soient (*fig. 2*) Pt_1 la demi-tangente à une courbe C_1 en P dirigée dans le sens de u croissant; Pt_2 la demi-tangente à une courbe C_2 en P dirigée dans le sens de v croissant; PN , P_1N_1 et P_2N_2 les demi-normales positives à S en P , P_1 et P_2 ; PN'_1 et PN'_2 les demi-droites issues de P , parallèles à P_1N_1 et à P_2N_2 et de

Fig. 2.



même sens; ds_1 et ds_2 les longueurs des arcs PP_1 et PP_2 positifs et infiniment petits; $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ et $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$ les courbures normales et les torsions géodésiques en P de la courbe C_1 et de la courbe C_2 qui passent en ce point.

Désignons par ω le plus petit angle positif (Pt_1, Pt_2) , le sens positif adopté pour compter ω étant le sens direct par rapport à PN . On a $\omega < \pi$.

On sait que

$$(2) \quad \frac{1}{R_1} = -\frac{\cos(Pt_1, PN'_1)}{ds_1} = \frac{D}{HE}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\cos(Pt_2, PN'_2)}{ds_2} = \frac{D'}{HG}.$$

Considérons deux *éléments analogues* aux précédents, mais dépendant à la fois des courbes C_1 et C_2 :

$$(3) \quad \frac{1}{R_{1,2}} = -\frac{\cos(Pt_2, PN'_1)}{ds_1}, \quad \frac{1}{R_{2,1}} = -\frac{\cos(Pt_1, PN'_2)}{ds_2}.$$

On démontre que les quantités $\frac{I}{R_{1,2}}$ et $\frac{I}{R_{2,1}}$, définies par (3), sont égales et telles que

$$(4) \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = \frac{D'}{H\sqrt{EG}}.$$

Bien entendu, cette valeur n'est égale ni à la courbure de la projection de C_1 sur le plan NPt_2 , ni à la courbure de la projection de C_2 sur le plan NPt_1 .

Appelons $Pm_{1,2}$ la projection de la demi-droite PN'_1 sur le plan NPt_2 , et $Pm_{2,1}$ la projection de la demi-droite PN'_2 sur le plan NPt_1 .

Posons

$$(5) \quad (Pm_{1,2}, PN'_1) = \varepsilon_{1,2}, \quad (Pm_{2,1}, PN'_2) = \varepsilon_{2,1},$$

ces angles étant comptés positivement, le premier dans le sens direct par rapport à Pt_2 , et le second dans le sens direct par rapport à Pt_1 .

Considérons les deux éléments suivants dépendant à la fois des courbes C_1 et C_2 :

$$(6) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = \frac{\varepsilon_{1,2}}{ds_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{\varepsilon_{2,1}}{ds_2}.$$

On démontre que les quantités $\frac{I}{T_{1,2}}$ et $\frac{I}{T_{2,1}}$, définies par (6), sont telles que

$$(7) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = \frac{D'F - DG}{H^2\sqrt{EG}}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{D'E - D'F}{H^2\sqrt{EG}}.$$

On démontre aussi que

$$(8) \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = \frac{\cos \omega}{R_1} + \frac{\sin \omega}{T_1} = \frac{\cos \omega}{R_2} - \frac{\sin \omega}{T_2},$$

$$(9) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = -\frac{\sin \omega}{R_1} + \frac{\cos \omega}{T_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{\sin \omega}{R_2} + \frac{\cos \omega}{T_2}.$$

En outre, on a, notamment,

$$(10) \quad -\frac{I}{R_{1,2}T_1} + \frac{I}{R_1T_{2,1}} = \frac{I}{R_{1,2}T_2} - \frac{I}{R_2T_{1,2}} = \frac{\sin \omega}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

$$(11) \quad \frac{I}{R_1R_2} - \frac{I}{R_{1,2}^2} = \frac{I}{T_1T_2} - \frac{I}{T_{1,2}T_{2,1}} = \frac{\sin^2 \omega}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}.$$

Nous allons indiquer ce que représentent, au point de vue cinématique, les quantités $\frac{I}{R_{1,2}}$, $\frac{I}{T_{1,2}}$ et $\frac{I}{T_{2,1}}$.

3. Soient \mathcal{T}_1 un trièdre trirectangle mobile de sens direct qui, lorsque son sommet est en P, a pour premier axe la demi-tangente Pt_1 à C_1 et pour troisième axe la demi-normale positive PN à la surface S, et \mathcal{T}_2 un autre trièdre trirectangle mobile de sens direct qui, lorsque son sommet est en P, a pour premier axe la demi-tangente Pt_2 à C_2 et pour troisième axe la demi-normale positive PN à la surface S.

Considérons les deux mouvements suivants de \mathcal{T}_1 , son troisième axe étant toujours la demi-normale positive à S :

1° mouvement \mathcal{M}_1 : le sommet de \mathcal{T}_1 se déplace sur C_1 et le premier axe de \mathcal{T}_1 est toujours la demi-tangente positive à C_1 ;

2° mouvement $\mathcal{M}_{2,1}$: le sommet de \mathcal{T}_1 se déplace, non plus sur C_1 , mais sur C_2 , et le premier axe de \mathcal{T}_1 est la demi-tangente positive, en chaque point, à la courbe C_1 qui y passe.

Considérons, de même, les deux mouvements suivants de \mathcal{T}_2 , son troisième axe étant toujours la demi-normale positive à S :

1° mouvement \mathcal{M}_2 : le sommet de \mathcal{T}_2 se déplace sur C_2 et le premier axe de \mathcal{T}_2 est toujours la demi-tangente positive à C_2 ;

2° mouvement $\mathcal{M}_{1,2}$: le sommet de \mathcal{T}_2 se déplace, non plus sur C_2 , mais sur C_1 et le premier axe de \mathcal{T}_2 est la demi-tangente positive, en chaque point, à la courbe C_2 qui y passe.

Faisons jouer le rôle du temps à l'élément d'arc de C_1 ou de C_2 parcouru par le sommet du trièdre.

Les projections du vecteur rotation du trièdre mobile sur les deux premiers axes de ce trièdre sont données, pour chacun des quatre mouvements considérés et pour le point P, dans le tableau suivant :

Trièdre mobile.	Mouvement.	Désignation adoptée pour le vecteur rotation.	Projections sur le	
			1 ^{er} axe du trièdre mobile.	2 ^e axe du trièdre mobile.
\mathcal{T}_1	\mathcal{M}_1	\vec{V}_1	$\frac{1}{T_1}$	$-\frac{1}{R_1}$
\mathcal{T}_2	$\mathcal{M}_{1,2}$	$\vec{V}_{1,2}$	$\frac{1}{T_{1,2}}$	$-\frac{1}{R_{1,2}}$
\mathcal{T}_1	$\mathcal{M}_{2,1}$	$\vec{V}_{2,1}$	$\frac{1}{T_{2,1}}$	$-\frac{1}{R_{2,1}}$
\mathcal{T}_2	\mathcal{M}_2	\vec{V}_2	$\frac{1}{T_2}$	$-\frac{1}{R_2}$

} $R_{1,2} = R_{2,1}$

Les indications du tableau relatives à \mathcal{M}_1 et à \mathcal{M}_2 sont classiques.

Celles qui concernent $\mathcal{M}_{1,2}$ et $\mathcal{M}_{2,1}$ se justifient aisément de diverses façons.

Une première méthode consiste à remarquer que, dans les mouvements \mathcal{M}_1 et $\mathcal{M}_{1,2}$, les trièdes mobiles ont toujours leur troisième axe commun et que, par suite, le vecteur $\vec{V}_{1,2} - \vec{V}_1$ est parallèle à ce troisième axe. Il en est de même de $\vec{V}_{2,1} - \vec{V}_2$. Donc, d'après (8) et (9), on a bien les résultats indiqués.

Une deuxième méthode consiste à utiliser les relations servant à déterminer, pour une surface donnée, les translations et rotations qui figurent dans les formules de Darboux (1) correspondant à celles de Codazzi.

L'élément d'arc $\sqrt{E} du$ de C_1 jouant le rôle de l'accroissement du temps dans le mouvement $\mathcal{M}_{1,2}$, les projections de $\vec{V}_{1,2}$ sur les deux premiers axes du trièdre mobile sont respectivement égales

$$\text{à } \frac{D'F - DG}{H^2\sqrt{EG}} \text{ et à } -\frac{D'}{H\sqrt{EG}}, \text{ donc à } \frac{I}{T_{1,2}} \text{ et à } -\frac{I}{R_{1,2}} = -\frac{I}{R_{2,1}}.$$

De même, l'élément d'arc $\sqrt{G} dv$ de C_2 jouant le rôle de l'accroissement du temps dans le mouvement $\mathcal{M}_{2,1}$, les projections de $\vec{V}_{2,1}$ sur les deux premiers axes du trièdre mobile sont respectivement égales à $\frac{D'E - D'F}{H^2\sqrt{EG}}$ et à $-\frac{D'}{H\sqrt{EG}}$, donc à $\frac{I}{T_{2,1}}$ et

$$\text{à } -\frac{I}{R_{2,1}} = -\frac{I}{R_{1,2}}.$$

On peut encore dire, en vertu de (8) et de (9) :

1° que la projection de \vec{V}_1 sur le premier axe de \mathcal{C}_2 est égale à $\frac{I}{T_{1,2}}$ et que la projection de \vec{V}_2 sur le premier axe de \mathcal{C}_1 est égale à $\frac{I}{T_{2,1}}$;

2° que la projection de \vec{V}_1 sur le deuxième axe de \mathcal{C}_2 et celle de \vec{V}_2 sur le deuxième axe de \mathcal{C}_1 sont égales et que leur valeur commune est $-\frac{I}{R_{1,2}} = -\frac{I}{R_{2,1}}$.

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1315, p. 391.

On établit également la seconde propriété en utilisant la première des formules de Codazzi relatives au cas des coordonnées curvilignes obliques ou la dernière des formules correspondantes de Darboux ⁽¹⁾.

Ces résultats s'appliquent évidemment à deux familles quelconques de courbes de S, dépendant chacune d'un paramètre, puisqu'on peut les prendre pour lignes coordonnées.

Si les courbes coordonnées sont conjuguées, on a

$$(12) \quad D' = 0, \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = 0, \quad -\frac{R_1}{T_1} = \frac{R_2}{T_2} = \cotang \omega,$$

$$(13) \quad \frac{T_{2,1}}{T_{1,2}} = \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{DG}{D'E}.$$

Dans ce cas particulier, \vec{V}_1 est situé dans le plan $NP t_2$ et \vec{V}_2 , dans le plan $NP t_1$.

Si les courbes coordonnées sont les lignes de courbure, on a

$$(14) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = -\frac{I}{\mathcal{R}_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{I}{\mathcal{R}_2}, \quad \text{avec } \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{DG}{D'E},$$

$\frac{I}{\mathcal{R}_1}$ et $\frac{I}{\mathcal{R}_2}$ étant les courbures principales correspondant respectivement aux lignes de courbure $v = \text{const.}$ et aux lignes de courbure $u = \text{const.}$

(Manuscrit reçu le 25 mars 1943.)

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1915, p. 375 (formules de Darboux) et p. 407 (formules de Codazzi).