BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAUCH

Deux remarques sur les fonctions entières d'ordre fini ρ

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 93-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__93_0>

DEUX REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ρ

PAR M. A. RAUCH.

1° Avec les notations de M. R. Nevanlinna (¹) nous posons

$$S(\theta, 2\alpha) = \lim_{k=\rho+0} \left\{ \left[\Sigma \frac{1}{r_n^k(x)} \right] : \int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right\}, \qquad k > \rho$$

$$I(\theta) = \lim_{k=\rho+0} \left\{ \left[\int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})| \frac{dr}{r^{k+1}} \right] : \int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+}} \right\},$$

où Σ est étendue aux racines de $f(z) = x$ situées dans un angle arbitrairement petit de bissectrice $\arg z = \theta$, et d'ouverture 2α. Nous supposons $f(z)$ de la classe de divergence de l'ordre $\rho > 0$ et fini. Considérons la courbe $I = I(\theta)$ rapportée à deux axes rectangulaires $O\theta$, OI. Si $\arg z = \theta$ est une direction isolée de Borel d'ordre ρ, on a

$$2\pi \lim_{\alpha=0} S(\theta, 2\alpha) = I'(\theta + 0) - I'(\theta - 0) \text{ (²)}.$$

Si la fonction a un nombre *fini* de directions de Borel, $S(\theta, 2\alpha)$ est généralement > 0, quelque petit que soit α. Il n'en est plus de même, si la fonction a une infinité de directions de Borel. M. Valiron nous a suggéré d'étudier alors le rapport $S : \alpha$.

Considérons un intervalle $a < \theta < b$ où S tend vers zéro avec α en chaque point. Partout dans l'intervalle la dérivée de $I(\theta)$ à droite est égale à la dérivée à gauche. $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ étant trois valeurs de l'intervalle ($\theta_0 - \theta_1 = \theta_2 - \theta_0 = \alpha$), on a, d'après une formule de M. Valiron (³)

$$2I(\theta_0)\cos\rho\alpha + \frac{2\pi}{\rho} \lim_{k=\rho+0} \left[\Sigma \frac{\sin k\alpha_n}{r_n^k(x)} \right] : \left[\int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right] = I(\theta_1) + I(\theta_2),$$

(¹) *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars.

(²) *Sur les directions de Borel des fonctions entières de la classe des divergences de l'ordre* ρ (*Bull. des Sc. Math.*, t. 65, 1941, p. 219-224).

(³) *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* (*Journ. de Math.*, t. 10, 1931, p. 457-480).

où Σ est étendue aux racines $r_n e^{i\theta_n}$ de $f(z) = x$, $\alpha - |\theta_n - \theta_0| = \alpha_n$, situées dans l'angle $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Développons les lignes trigonométriques et divisons les deux membres par α^2. Il vient

$$\frac{2\pi}{\alpha} \lim_{k=\rho+0} \left[\Sigma \frac{\alpha_n}{\alpha r_n^k}\right] : \left[\int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}}\right]$$
$$= \frac{\mathrm{I}(\theta_1) + \mathrm{I}(\theta_2) - 2\mathrm{I}(\theta_0)}{\alpha^2} + \rho^2 \mathrm{I}(\theta_0) + \varphi.$$

Le dernier terme tend vers zéro avec α. On diminue le premier membre en l'étendant seulement aux racines de l'angle $|\theta - \theta_0| \leq \frac{\alpha}{2}$ et en remplaçant α_n par $\frac{\alpha}{2}$. On obtient

$$\pi \frac{\mathrm{S}(\theta_0, \alpha)}{\alpha} \leq \frac{\mathrm{I}(\theta_1) + \mathrm{I}(\theta_2) - 2\mathrm{I}(\theta_0)}{\alpha^2} + \rho^2 \mathrm{I}(\theta) + \varphi \leq 4\pi \frac{\mathrm{S}(\theta_0, 2\alpha)}{2\alpha}.$$

En faisant tendre α vers zéro on conclut :

Si en chaque point d'un intervalle $a < \theta < b$ l'expression $\lim(\mathrm{S} : \alpha)$ *a un sens, et si la fonction* $\mathrm{I}(\theta)$ *y admet une dérivée seconde, on a dans tout l'intervalle*

$$(1) \qquad \pi \varlimsup_{\alpha=0} \frac{\mathrm{S}(\theta, \alpha)}{\alpha} \leq \mathrm{I}''(\theta) + \rho^2 \mathrm{I}(\theta) \leq 4\pi \varlimsup_{\alpha=0} \frac{\mathrm{S}(\theta, 2\alpha)}{2\alpha}.$$

Aux limites a et b nous pouvons avoir des directions de Borel, où S ne tend plus vers zéro avec α.

Cas particuliers. — Dans les hypothèses précédentes on a $\lim(\mathrm{S} : \alpha) = 0$ dans tout intervalle, où la fonction $\mathrm{I}(\theta)$ est partout nulle, ou sinusoïdale

$$\mathrm{I} = \mathrm{A} \cos \rho\theta + \mathrm{B} \sin \rho\theta.$$

De même $\lim(\mathrm{S} : \alpha) > 0$ dans tout intervalle, où $\mathrm{I}(\theta) \equiv \mathrm{C}$, ou bien

$$\mathrm{I} = \mathrm{A} \cos \rho\theta + \mathrm{B} \sin \rho\theta + \mathrm{C}.$$

2° Soit $f(z)$ une fonction méromorphe de l'ordre $\rho > 0$ et fini. On sait que

$$m\left(r, \frac{1}{f - a_0}\right) = m\left(r, \frac{1}{f'} \frac{f'}{f - a_0}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mathrm{S}(r)$$
$$\leq \mathrm{T}(r, f') - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mathrm{S}(r).$$

D'autre part

$$m\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) \geqq T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) - O(1).$$

Donc

$$(2) \qquad T(r, f) \leqq N\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) + T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Appliquons aux fonctions f', f'', ... le deuxième théorème fondamental

$$T(r, f') \leqq \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'-a_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r),$$
$$a_1 \neq 0,$$
$$T(r, f'') \leqq \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f''-a_2}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'''}\right) + S(r),$$
$$a_2 \neq 0,$$

et ainsi de suite. Ajoutons toutes ces inégalités, y comprise (2), membre à membre; il vient

$$T(r, f) + T(r, f'') + T(r, f''') + \ldots + T(r, f^{(\nu)})$$
$$\leqq \sum_{0}^{\nu} N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) + \nu\overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f^{(\nu+1)}}\right) + S(r).$$

L'inégalité se simplifie si $f(z)$ est entière

$$m(r, f) + m(r, f'') + m(r, f''') + \ldots + m(r, f^{(\nu)})$$
$$\leqq \sum_{0}^{\nu} N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(\nu+1)}}\right) + S(r),$$

et *a fortiori*

$$(3) \qquad \nu m(r, f^{(\nu)}) \leqq \sum_{0}^{\nu} N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) + S(r), \qquad a_1 a_2 \ldots a_\nu \neq 0.$$

Considérons maintenant la classe des fonctions entières pour lesquelles

$$\lim_{r=\infty} \frac{m(r, f^{(i)})}{m(r, f)} = 1$$

quel que soit i. Divisons les deux membres de (3) par $m(r, f)$ et introduisons avec M. Milloux ([4]) les défauts

$$\delta(a, f^{(i)}) = 1 - \overline{\lim} \cdot \frac{N\left(r, \dfrac{1}{f^{(i)} - a}\right)}{T(r, f)}.$$

On trouve immédiatement

$$\sum_{0}^{\nu} \delta(a, f^{(i)}) \leqq 1, \qquad a \neq 0,$$

pour toute valeur de ν.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1944.)

([4]) *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées,* Paris, Hermann. (Les résultats de M. Milloux sont plus généraux que les nôtres).