

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LEONCE LESIEUR

## **Sur la représentation rationnelle d'une hyperbiquadratique**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 73 (1945), p. 43-54

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1945\\_\\_73\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__43_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA REPRÉSENTATION RATIONNELLE  
D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE;

PAR M. LÉONCE LESIEUR.

INTRODUCTION.

L'intersection de deux quadriques n'est pas en général rationnelle, c'est-à-dire susceptible d'une représentation paramétrique unicursale propre. Au contraire, la variété commune à deux hyperquadriques est rationnelle quel que soit le nombre  $n$  des dimensions de l'espace considéré ( $n > 3$ ). C'est là un résultat connu : Bertini l'a démontré pour  $n = 4$  et Rosati étendu pour  $n > 4$  (*Annali di Matematica*, 3<sup>e</sup> série, 1899). La question présente d'ailleurs une certaine parenté avec la rationalité des variétés cubiques : l'irrationalité de la cubique plane équivaut en effet à l'irrationalité de la biquadratique ordinaire, la rationalité de la surface cubique équivaut à la rationalité de l'intersection de deux hyperquadriques d'un espace à quatre dimensions; après, les deux problèmes divergent : tandis que l'hyperbiquadratique reste rationnelle, la variété cubique serait, d'après un travail récent de Fano, irrationnelle. On voit quel rôle important joue le nombre des dimensions de l'espace, et comme il serait injuste dans cet ordre d'idées, de taxer « d'encombrantes », avec Halphen, les généralisations concernant les hyperespaces.

L'objet de cette Note est de rappeler les résultats de Rosati, que nous avons rencontrés sans les connaître, sur la représentation rationnelle d'une hyperquadrique; nous présentons certains d'entre eux d'une manière semi-analytique sans doute plus accessible au lecteur peu familier des espaces supérieurs, et qui donne, avec les équations paramétriques elles-mêmes et des précisions sur certains cas particuliers, la représentation rationnelle d'une hypercyclide. Deux applications non classiques feront l'objet d'un autre travail.

*Notations.* — Nous citerons en maints endroits par les noms de leurs auteurs les Ouvrages suivants :

BERTINI, *Iperspazi* (Messine, 1923).

ENRIQUES, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, 1926).

GODEAUX, *Transformations birationnelles de l'espace* (*Mémorial*, fasc. 67; Paris, 1934).

Nous indiquerons par  $E_n$  = espace linéaire à  $n$  dimensions;  $Q_n$  = quadrique de cet espace;  $B_n$  = biquadratique intersection de deux  $Q_n$ ;  $C_p$  = (hyper) cyclide = (hyper) surface du 4<sup>e</sup> ordre de  $E_p$  ayant une  $Q_{p-1}$  double;  $T_p$  = (hyper) cyclide cubique = surface du 3<sup>e</sup> ordre de  $E_p$  contenant une  $Q_{p-1}$ . L'hyperplan  $E_{p-1}$  qui contient cette  $Q_{p-1}$  recoupe  $T_p$  suivant un hyperplan  $E_{p-2}$ . Quand  $p = 3$  c'est la section plane décomposée d'une surface cubique en une droite et une conique. L'intersection résiduelle de  $T_p$  avec une quadrique  $Q_p$  [spéciale (1) si  $p > 2$ ] passant par cet  $E_{p-2}$  est une variété  $V_{p-2}^5$  à  $p - 2$  dimensions du 5<sup>e</sup> ordre. Quand  $p = 3$  c'est la quintique (2) commune à une quadrique et une surface cubique se coupant déjà suivant une droite. Quand  $p > 3$  nous lui conserverons le nom de quintique et nous la désignerons par  $q_p$ . Donc  $q_p = V_{p-2}^5$ , de même que  $Q_n = V_{n-1}^2$  et  $B_n = V_{n-2}^4$ .

#### REPRÉSENTATION RATIONNELLE D'UNE $B_n$ .

Celle-ci est liée à l'existence d'une droite sur la variété  $B_n$ . Dans le cas  $n = 3$ , elle n'en possède pas sans être décomposée en une droite et une cubique rationnelle. Nous supposons donc dans toute la suite  $n > 3$ ; il s'agit d'hyperbiquadratiques.

**1. Toute hyperbiquadratique qui n'est pas un cône est rationnelle (3).** — Rappelons d'abord ce théorème :

*Sur une  $B_n$  on peut toujours trouver une droite.*

(1) BERTINI (p. 141) : une quadrique spéciale est un cône, ayant un point, droite ou  $E_p$  double qui constitue son sommet.

(2) Quintique de genre 2 (ENRIQUES, p. 551).

(3) Pour ce paragraphe et le suivant cf. ROSATI (Ouvrage cité) : *Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di  $S_n$  sopra un  $S_{n-2}$ .*

Il en existe 16 en général sur une  $B_4$ ; pour  $n > 4$  il y en a une infinité dépendant de  $2(n-4)$  paramètres, telle qu'il en passe par tout point de la  $B_n$  (1).

Soit  $\Delta$  l'une de ces droites. Définissons  $B_n$  par deux quadriques  $Q_n$  contenant  $\Delta$ . Un plan variable  $E_2$  passant par  $\Delta$  recoupe la première quadrique suivant une droite  $D_1$  et la deuxième suivant une droite  $D_2$ , donc  $B_n$  en un seul point  $M$  qui est en correspondance birationnelle avec le plan, et par suite avec sa trace  $N$  sur un  $E_{n-2}$ . La rationalité se trouve établie en général. Nous allons préciser d'une façon analytique.

Choisissons un repère projectif tel que les deux sommets  $A_n(00\dots 10)$  et  $A_{n+1}(00\dots 01)$  soient sur  $\Delta(x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0)$ . Les deux quadriques sont alors définies par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} p_1 x_n + q_1 x_{n+1} + r_1 = 0, \\ p_2 x_n + q_2 x_{n+1} + r_2 = 0, \end{cases}$$

$p_1, q_1, p_2, q_2$  étant des formes linéaires en  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ,  $r_1$  et  $r_2$  des formes quadratiques des mêmes variables.

Introduisons le déterminant de ce système linéaire en  $x_n$  et  $x_{n+1}$ , soit  $Q = p_1 q_2 - p_2 q_1$  et distinguons deux cas  $a$  et  $b$ .

$a.$   $Q \neq 0$ . Alors (1) est équivalent à

$$(2) \quad x_n = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{Q}, \quad x_{n+1} = \frac{p_2 r_1 - p_1 r_2}{Q}.$$

Se donnant un point  $N$  de  $PE_{n-2}$ , défini par  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , par ses coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} = 1$ , ces formules définissent rationnellement un point  $M$  de  $B_n$ , situé dans le plan  $\Delta N$ . Inversement la connaissance des coordonnées de  $M$  donne immédiatement celles de  $N$ . Nous pouvons donc prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  dans  $E_{n-2}$ , et poser, après multiplication par  $Q$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = u_1 Q, & x_2 = u_2 Q, & \dots, & x_{n-1} = u_{n-1} Q, \\ x_n = q_1 r_2 - q_2 r_1, & x_{n+1} = p_2 r_1 - p_1 r_2. \end{cases}$$

Du point de vue géométrique le point  $N(u_i)$  est la projection faite de  $\Delta$  du point  $M(x_i)$ .

(1) BERTINI, p. 181.

*b.*  $Q = 0$ . — Une analyse facile met alors en lumière les deux faits suivants :

**A.** L'hyperbiquadratique est l'intersection de deux cônes de même sommet; c'est elle-même un cône dont la rationalité n'est pas assurée, par exemple si la base est une biquadratique non unicursale.

**B.** L'une des quadriques admet  $\Delta$  pour droite double, aucun de ses points n'étant double pour l'autre. Alors la rationalité est assurée et la représentation rationnelle peut s'obtenir par des formules (3'), que nous réservons pour les cas particuliers, et qui se rattachent encore au type (3).

En résumé, cette analyse conduit à la conclusion exprimée dans le titre du paragraphe; de plus, la représentation rationnelle d'une  $B_n$  non conique peut se mettre sous la forme (3), et les seuls cônes  $B_n$  (spéciaux ou non) qui ne soient pas rationnels sont ceux dont la base est l'intersection non rationnelle de deux quadriques d'un espace ordinaire  $E_3$ .

**2. Image des sections planes.** — La section de  $B_n$  par l'hyperplan  $E_{n-1}$  d'équation  $\sum \lambda_i x_i = 0$  a pour image dans l'espace  $E_{n-2}$  défini par les  $u_k$  sa projection d'équation  $\sum \lambda_i x_i(u_k) = 0$  obtenue en remplaçant les  $x_i$  par les expressions (3). Elle fait partie d'un système linéaire  $S$  de surfaces du 3<sup>e</sup> ordre ayant en commun la variété définie par

$$(4) \quad \begin{cases} Q = p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0, & F = q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0, \\ G = p_2 r_1 - p_1 r_2 = 0, \end{cases}$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

lorsque aucune des formes  $p_2, q_2, r_2$  n'est égale à zéro.

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la quadrique  $Q$  avec la surface cubique  $F$  en dehors de l'espace linéaire  $E_{n-4}$  d'équations  $q_1 = q_2 = 0$ . Ainsi, en posant  $p = n - 2$ ,  $Q$  est une quadrique  $Q_p$  (spéciale si  $p \geq 4$  avec l'espace double  $E_{p-4}$ ,  $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$ )  $F$  une cyclide cubique  $T_p$  contenant

un  $E_{p-2}$  de  $Q_p$  et la recoupant ultérieurement suivant la quintique  $q_p = V_{p-2}^5$  d'équations (4). Le système s'écrit encore

$$(5) \quad PQ + \lambda F + \mu G = 0,$$

ou  $P = 0$  est l'équation de la trace  $E_{p-1}$  sur l'espace  $(u_i)$  de l'hyperplan de section  $E_{n-1}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  des constantes. Sa dimension est  $n$ ; les surfaces cubiques qui le constituent sont coupées par  $Q$  en dehors de la quintique  $q_p$  suivant un  $E_{p-2}$  qui a pour équations  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$ , et fait donc partie du système des  $E_{p-2}$  générateurs de  $Q$ ; celui-ci contient  $p_1 = p_2 = 0$  ainsi que  $q_1 = q_2 = 0$ . Nous l'appellerons 1<sup>er</sup> système. Ces  $E_{p-2}$  (exemple  $p_1 = p_2 = 0$ ) coupent  $q_p$  suivant une variété cubique  $V_{p-3}^3$  (telle que la section de  $F$ ), tandis que ceux de l'autre système (exemple  $p_1 = q_1 = 0$ ) rencontrent  $q_p$  suivant une variété quadrique  $V_{p-3}^2$  (telle que la section de  $r_2 = 0$ ).

Résumons l'essentiel :

*Les images des sections planes de  $B_n$  forment un système linéaire de cyclides (1)  $T_p$  passant par une quintique  $q_p$  elles recoupent la quadrique  $Q_p$  qui la contient suivant le premier système de ses  $E_{p-2}$  générateurs.*

Parmi elles s'en trouvent  $\infty^p$  décomposées en la quadrique  $Q$  et un  $E_{p-1}$  quelconque  $P$ , images de la section par l'hyperplan  $\Delta P$ . Les points de la section ayant leurs projections sur  $Q$  sont ceux qui sont infiniment voisins de  $\Delta$ . Il y a en effet pour les coordonnées d'un point  $N$  de  $Q$  impossibilité du système (1), donc aucun point de  $B_n$  en dehors de  $\Delta$  dans le plan  $\Delta N$ .  $Q$  se présente alors comme la base dans  $E_p$  de la quadrique (spéciale) formée par les plans  $E_2$  tangents à  $B_n$  passant par  $\Delta$ ; pour un tel plan les deux génératrices  $D_1, D_2$  de la section se coupent sur  $\Delta$ . Quand elles sont confondues il y a indétermination pour le système (1), exprimée par les équations (4) de la quintique; on est en présence d'une droite  $D$  de  $B_n$  rencontrant  $\Delta$ , et le plan  $\Delta D$  a pour trace sur  $E_p$  un point  $N$  de  $q_p$ . Dans la section hyperplane de  $B_n$ , le point situé sur  $D$  a toujours pour projection  $N$ ; on s'explique que

---

(1) Au sens des notations. Elles n'ont pas l'ombilicale commune.

la quintique figure comme base du système linéaire image des sections planes.

Examinons le cas des petites valeurs de  $p$  :

$p = 2$ . — La représentation d'une  $B_4$  se fait par un système linéaire de cubiques passant par 5 points, qui définissent la conique  $Q$ , et sont les images de 5 droites rencontrant  $\Delta$ , tandis que  $Q$  est l'image de  $\Delta$  elle-même. L'hyperplan qui contient  $\Delta$  et deux d'entre elles recoupe  $B_4$  suivant une 4<sup>e</sup> droite; sa projection joint deux des points, on trouve ainsi  $C_5^2 = 10$  autres droites, ce qui fait 16 au total.

$p = 3$ . — Le système représentatif est celui des surfaces cubiques <sup>(1)</sup> ayant une quintique base commune <sup>(2)</sup>. Les génératrices du 1<sup>er</sup> système de la quadrique qui la contient sont des trisécantes, tandis que celles du 2<sup>e</sup> système sont des cordes s'appuyant sur les précédentes.

$p = 4$ . —  $Q$  devient un cône de sommet  $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$ . La cyclide  $F$  admet 4 points doubles définis par

$$q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = 0$$

(les dérivées partielles s'annulent en effet pour les coordonnées d'un de ces points). Chaque surface cubique du système, qui est une  $T_4$  possède de même 4 points doubles. Ces surfaces se distinguent essentiellement de la surface cubique générale, et c'est une différence fondamentale avec l'espace ordinaire.

$p = 5$ . —  $Q_5$  est un cône à droite double; les  $T_5$  sont des cyclides ayant une  $B_3$  de points doubles.

$p = 6$ . —  $Q_6$  admet l' $E_2$  double  $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 0$ ; les  $T_6$  ont une  $B_4$  de points doubles, et les 4 points vérifiant

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = r_1 = r_2 = 0$$

sont triples pour la quintique. En effet, un  $E_2$  passant par l'un de ces points, qui est double pour  $Q$  et  $T$ , coupe  $T$  suivant une

(1) Cf. ENRIQUES, p. 556 : droites d'une surface cubique d'après son image plane.

(2) Il figure comme l'un des types birationnellement distincts de systèmes linéaires de degré  $> 3$ , à intersections variables elliptiques (GODEAUX, p. 35).

cubique nodale et Q le long de deux droites se croisant au point double et recoupant la cubique en deux points seulement.

Ce raisonnement s'étend mot pour mot quand  $p > 6$ ; il conduit à l'existence sur  $q_p$  d'une  $B_{p-1} \equiv V_{p-6}^4$  située dans l' $E_{p-1}$  double de Q et dont tous les points sont triples.

Abordons pour terminer une réciproque : un système de  $p + 2$  surfaces cubiques  $T_p$  ayant une quintique base commune  $q_p$  définit-il une  $B_{p+2}^2$ ? Soit une surface cubique et une quadrique ayant un plan commun ( $p_1 = p_2 = 0$ ); leurs équations se mettent sous la forme  $G = p_2 r_1 - p_1 r_2 = 0$ ,  $Q = p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$  (comme on le voit en prenant  $p_1$  et  $p_2$  comme plans de coordonnées); leur quintique commune a pour équations  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$  et la surface cubique  $F = q_1 r_2 - q_2 r_1$  la contient aussi, Q, F, G sont trois formes bases définissant la variété algébrique  $q_p$ , et toutes les formes cubiques qui la contiennent sont, d'après un théorème de Nœther,  $PQ + \lambda F + \mu G$ , où P est une forme linéaire,  $\lambda$  et  $\mu$  des constantes. Par un changement des  $p + 2$  formes de base données, qui équivaut à une homographie dans  $E_n$ , on se ramène aux expressions (3) des  $x_i$  d'où l'on déduit (1). La réponse est affirmative.

**3. Cas particuliers.** — La représentation paramétrique (3) de  $B_p$  englobe le cas particulier où l'une des quadriques (1) est un cône de sommet  $A_n$  situé sur  $\Delta$ . Ceci entraîne  $p_1 = 0$ , et, pour  $B_n$ , l'existence d'un point double  $A_n$ . Les formules (3) deviennent

$$(3') \begin{cases} x_1 = -u_1 p_2 q_1, & x_2 = -u_2 p_2 q_1, & \dots, & x_{n-1} = -u_{n-1} p_2 q_1. \\ & x_n = q_1 r_2 - q_2 r_1, & & x_{n+1} = p_2 r_1. \end{cases}$$

Le système linéaire des surfaces S images des sections planes  $\lambda_i x_i = 0$  est formé de cyclides cubiques ayant en commun la variété d'équations  $p_2 q_1 = 0$ ,  $p_2 r_1 = 0$ ,  $q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0$ , soit la quintique  $q_p$  décomposée suivant

$$q_1 = 0, \quad r_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_2 = 0, \quad q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0.$$

La première variété est une quadrique  $Q_{p-1}$  de l'espace  $q_1 = 0$  elle rencontre la deuxième, cubique, suivant la  $Q_{p-2}$  :

$$p_2 = q_1 = r_1 = 0.$$

Cette cubique est donc une cyclide  $T_{p-1}$ . Ainsi :

*Quand  $B_n$  admet un point double, on peut prendre comme quintique de base du système représentatif une variété décomposée en une quadrique  $Q_{p-1}$  et une cyclide cubique  $T_{p-1}$  passant par une  $Q_{p-2}$  de la quadrique.*

Lorsque  $p = 2$ , trois des cinq points bases du système linéaire de cubiques sont alignés sur la droite  $p_2 = 0$ .

Pour  $p = 3$  la quintique est décomposée en une conique et une cubique plane la rencontrant en deux points <sup>(1)</sup>.

*Remarque.* — Pour  $p = 2$ , dans le cas général (3), le système S est birationnellement équivalent à celui des cyclides du 4<sup>e</sup> ordre  $C_2$  passant par 4 points fixes. Il suffit pour le voir d'effectuer une transformation quadratique ayant pour sommets du triangle fondamental deux des cinq points bases, que nous prenons pour points cycliques dans le langage. Quand les quatre points fixes sont sur un même cercle,  $B_3$  admet un point double.

Cette remarque ne s'étend pas à l'espace ( $p = 3$ ). C'est seulement dans le cas particulier du point double qu'on peut réaliser la représentation paramétrique d'une  $B_3$  par des cyclides du 4<sup>e</sup> ordre  $C_3$ . En effectuant alors une inversion qui prend pour ombilicale la conique commune à toutes les cyclides  $T_2$  du système S, on les transforme en cyclides C ayant une cyclique sphérique ou plane commune. Il en va de même pour  $p > 3$ .

Il nous reste à faire rentrer dans le type (3') donc (3) le cas particulier B réservé au 1. Rappelons les hypothèses : aucun point de  $\Delta$  n'est double pour la 2<sup>e</sup> quadrique, tandis que la 1<sup>e</sup> admet  $\Delta$  comme droite double. C'est un lieu de plans passant par  $\Delta$ ; celle-ci est double pour la  $B_n$ , alors constituée par des droites rencontrant  $\Delta$ . Un changement de repère permet d'obtenir la conclusion suivante :

*La représentation (3') convient au cas réservé du 1. La par-*

---

<sup>(1)</sup> Le genre  $g$  de la courbe décomposée est lié à celui des courbes composantes  $g_1$  et  $g_2$  d'après la formule  $g = g_1 + g_2 + i - 1$  ou  $i$  est le nombre des points de jonction (ENRIQUES, p. 403).  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 1$ ,  $i = 2$  donc  $g = 2$  comme dans le cas général.

ticularité porte sur la quadrique  $Q_{p-1}$ , qui devient spéciale, et dont la singularité peut aller jusqu'à la décomposition en deux  $E_{p-2}$ .

*Exemple* :  $p = 3$ , quintique constituée par deux droites concourantes et une cubique plane rencontrant chacune d'elles. La  $B_3$  correspondante admet une droite double.

Nous n'avons pas voulu, dans cette étude, tenter une classification des  $B_n$ , mais montrer seulement que la représentation paramétrique (3) convient à toute  $B_n$  non conique, tandis que la représentation particulière (3') traduit la présence d'éléments doubles dans  $C_n$ .

**4. Rationalité des cyclides.** — *a. Cyclides  $C_p$  du 4<sup>e</sup> ordre.* — La projection d'une  $B_{p+1}$  faite d'un point  $O$  extérieur, sur un  $E_p$  ne passant pas par  $O$ , est une surface du 4<sup>e</sup> ordre  $C_p$ . Il y a dans cette projection correspondance birationnelle entre  $E_p$  et la quadrique  $Q_{p+1}$  du faisceau, qui passe par  $O$  et contient  $B_{p+1}$ ; la rationalité de  $B_{p+1}$  entraîne celle de  $C_p$ , elle lui est équivalente. La section de  $Q_{p+1}$  par son plan tangent en  $O$  a pour trace sur  $E_p$  une  $Q_{p-1}$  qui est double pour  $C_p$  : il est facile de voir en effet qu'une droite de  $E_p$  s'appuyant sur  $Q_{p-1}$  ne recoupe  $C_p$  qu'en deux points.  $C_p$  est donc bien une cyclide du 4<sup>e</sup> ordre de l'espace  $E_p$ .

Réciproquement, toute cyclide  $C_p$  du 4<sup>e</sup> ordre peut s'obtenir par projection d'une  $B_{p+1}$ , car  $\Sigma_{p+1} = 0$  et  $\varphi_1(x_1, \dots, x_p) = 0$  étant les équations de la  $Q_{p-1}$  double, la cyclide aura pour équation par rapport aux coordonnées absolues  $x_1, \dots, x_p$

$$\varphi_1^2 + \varphi_1 P_1 + \varphi_2 = 0.$$

où  $\varphi_1$  est une forme quadratique et  $P_1, \varphi_2$  des polynomes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> degré respectivement, équation qui résulte de l'élimination de  $x_n$  entre les deux quadriques  $Q_{p+1}$

$$x_n - \varphi_1 = 0, \quad x_n^2 + x_n P_1 + \varphi_2 = 0.$$

Celles-ci définissent une  $B_{p+1}$  qui se projette suivant  $C_p$  du point  $A_n$  (oo ... 1).

La représentation paramétrique s'obtient immédiatement si l'on choisit  $Q$  comme sommet du repère dans  $E_{p+1}$ , les  $p + 1$  autres

sommets se trouvant dans  $E_p$ ; elle est fournie par les  $p + 1$  expressions des coordonnées correspondantes de  $B_{p+1}$ . Donc :

*On peut toujours obtenir une représentation rationnelle d'une  $C_p$  par  $p + 1$  cyclides cubiques  $T_{p-1}$ , de l'espace des paramètres  $E_{p-1}$ , qui possèdent une quintique  $q_{p-1}$  commune.*

*b. Cyclides  $T_p$  du 3<sup>e</sup> ordre.* — Quand le point  $O$  est sur  $B_{p+1}$  la projection est du 3<sup>e</sup> ordre. Elle contient la trace du plan tangent  $E_{p-1}$  à  $B_{p+1}$ , qui est un  $E_{p-2}$ . Elle se fait donc suivant une cyclide cubique  $T_p$ . Réciproquement toute  $T_p$  s'obtient de cette manière, car  $x_{p+1} = 0$  et  $x_p = 0$  étant les équations du  $E_{p-2}$ ,  $T_p$  aura pour équation par rapport aux coordonnées absolues  $x_1, \dots, x_p$  :  $x_p \varphi_1 + \varphi_2 = 0$  (où  $\varphi_1$  est une forme quadratique et  $\varphi_2$  un polynôme du 2<sup>e</sup> degré), équation qui résulte de l'élimination de  $x_n$  entre  $x_n - \varphi_1 = 0$ ,  $x_p x_n + \varphi_2 = 0$ . Celles-ci définissent une  $B_{p+1}$ , qui se projette suivant  $T_p$  du point  $A_n(00 \dots 1)$  situé sur  $B_{p+1}$ . La rationalité de  $B_{p+1}$  entraîne celle de  $T_p$ , dont les  $p + 1$  premières équations (3) nous fournissent une représentation paramétrique particulière; les  $p + 1$  surfaces correspondantes de l'espace des paramètres sont des cyclides cubiques  $T_{p-1}$  ayant en commun l'intersection complète de  $Q$  et  $F$ , décomposée suivant la quintique  $q_p$  et un  $E_{p-2}$  de  $Q$  du 1<sup>er</sup> système. Cette propriété subsiste après changement du repère dans  $E_p$ . Donc :

*On peut toujours obtenir une représentation rationnelle d'une  $T_p$  par  $p + 1$  cyclides cubiques  $T_{p-1}$  se rencontrant suivant une quintique  $q_{p-1}$  et un  $E_{p-3}$  du 1<sup>er</sup> système de la quadrique  $Q_{p-1}$  qui la contient.*

$p = 3$ . — Réseau des cubiques passant par 6 points, représentant la surface cubique la plus générale de l'espace ordinaire. On le transforme birationnellement en cycliques passant par 5 points fixes au moyen d'une transformation quadratique.

$p = 4$ . — Réseau des surfaces cubiques ayant en commun une quintique de genre 2 et l'une de ses cordes trisécantes. On représente ainsi la  $T_4$ , qui n'est pas comme on l'a vue au 2 la variété cubique à trois dimensions la plus générale de l'espace à quatre dimensions, malheureusement, car autrement sa rationalité serait démontrée.

Nous voyons ici pourquoi les deux problèmes annoncés dans l'introduction divergent :  $T_4$  a un point double (elle en a même 4 situés dans un  $E_2$ ); on ne s'étonne plus de sa rationalité, ni de celle de  $B_3$ . Il en va de même pour  $p > 4$ , où les points doubles de  $T_p$  sont tous les points d'une  $B_{p-2}$ .

*Remarque.* — Il est facile de voir dans l'espace à  $p$  dimensions, en prenant l'origine au point double d'une  $V_{p-1}^3$  qui en possède un, que le réseau des surfaces cubiques qui la représentent rationnellement dans un  $E_{p-1}$  a pour base l'intersection générale d'une surface cubique quelconque et d'une quadrique, tandis que pour une  $T_p$ , cette intersection est comme on l'a vu décomposée (1).

§. **Exemple.** — Illustrons la représentation rationnelle d'une  $B_n$  par l'exemple d'une  $B_3$  déterminée, d'équations

$$(6) \quad \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_5^2 = 0, \end{cases}$$

nous apercevons sur  $B_3$  la droite (2)

$$(Δ) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 = x_6, \\ x_3 = x_4 = x_5. \end{cases}$$

Opérons le changement de variables, défini par

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = x'_1, & x_3 = x'_3, & x_4 = x'_4, & x_5 = x'_5, \\ x_2 - x_1 = x'_2, & x_4 - x_3 = x'_4, & \text{ou} & x_2 = x'_1 + x'_2, & x_4 = x'_3 + x'_4, \\ x_6 - x_1 = x'_6, & x_5 - x_3 = x'_5, & & x_6 = x'_1 + x'_6, & x_5 = x'_3 + x'_5. \end{cases}$$

Les équations de  $\Delta$  deviennent  $x'_2 = x'_4 = x'_5 = x'_6 = 0$  et celles des deux quadriques doivent être linéaires en  $x'_1$  et  $x'_3$ . Elles s'écrivent en effet

$$\begin{aligned} 2x'_1 x'_2 + 2x'_3 (x'_4 + x'_5) + x'_2^2 + x'_4^2 + x'_5^2 &= 0, \\ 2x'_1 (x'_2 - 2x'_6) - 6x'_3 x'_4 + x'_2^2 - 2x'_4^2 - 2x'_6^2 &= 0. \end{aligned}$$

(1) C'est ainsi que pour  $p = 4$  la sextique gauche de genre 4 (ENRIQUES, p. 180) dégénère en quintique de genre 2 et corde trisécante, sur lesquelles on peut comme au 3, vérifier la formule du genre d'une courbe décomposée ( $4 = 2 + 0 + 3 - 1$ ).

(2) Si aucune droite n'était apparente, il faudrait prendre un point sur  $B_3$  et couper par le plan tangent. On obtiendrait ainsi 4 droites.

Nous en sommes au stade des équations (1). Prenons comme paramètres  $x_1 = u$ ,  $x_4 = v$ ,  $x_5 = w$ ,  $x_6 = h$ ; résolvons en  $x_1$  et  $x_3$ , chassons les dénominateurs et revenons aux  $x_i$  par les formules (7), on obtient les équations paramétriques suivantes :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\ x_2 = -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2u[3uv + (v + w)(u - 2h)], \\ x_3 = -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\ x_4 = -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)], \\ x_5 = -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2w[3uv + (v + w)(u - 2h)], \\ x_6 = -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2w[3uv + (v + w)(u - 2h)]. \end{array} \right.$$

La quintique  $q$  de base  $a$  pour équations

$$\frac{u}{u - 2h} = \frac{v + w}{-3v} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{u^2 - 3v^2 - 2h^2}.$$

La vérification directe des identités qu'on obtient en portant dans (6) les expressions (8) des  $x_i$  n'est plus alors qu'une assurance contre les accidents de calcul.

Il est à noter qu'en prenant pour  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $h$  des nombres entiers, les formules (8) donnent une infinité à 4 paramètres de solutions en nombres entiers du système (6). C'est ainsi que les nombres 1, 2, 3, 4 fournissent, au signe près, qui n'intervient pas dans (6) pour  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  les valeurs

$$131, 73, 55, 61, 119, 101$$

qui sont effectivement une solution.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1945).