BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRE BLANC-LAPIERRE
ROGER BRARD

Les fonctions aléatoires stationnaires et la loi des grands nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 102-115
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__102_0>

LES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES ET LA LOI DES GRANDS NOMBRES;

PAR MM. BLANC-LAPIERRE ET BRARD.

Introduction. — Considérons une fonction aléatoire $x(t, \mathcal{E})$ définie, pour toutes les valeurs réelles du paramètre t, sur toutes les épreuves $\mathcal{E}$ d'une catégorie E. Nous dirons que x est *stationnaire* si les moments d'ordre un et deux, $M\{x(t, \mathcal{E})\}$, $M\{x^2(t, \mathcal{E})\}$ et $M\{x(t_1, \mathcal{E})x(t_2, \mathcal{E})\}$ (où M représente une espérance mathématique) sont invariants lorsqu'on remplace t_1, t_2 par $t_1+\theta$, $t_2+\theta$ et, cela, quels que soient t_1, t_2, θ.

Le mot *stationnaire* a ici le même sens que dans un travail fondamental de Khintchine [1]. Pour être tout à fait exact, on devrait dire « stationnaire d'ordre deux » pour bien marquer le fait que l'ordre des moments que nous considérons vaut au plus 2.

D'une façon précise, nous ferons sur $x(t, \mathcal{E})$ les hypothèses suivantes

1° Les espérances mathématiques

$$M\{x(t, \mathcal{E})\} \quad \text{et} \quad M\Big\{\big[x(t, \mathcal{E}) - M\{x(t, \mathcal{E})\}\big]^2\Big\}$$

sont constantes

$$(1) \qquad M\{x(t, \mathcal{E})\} = m \qquad M\Big\{\big[x(t, \mathcal{E}) - M\{x(t, \mathcal{E})\}\big]^2\Big\} = \sigma^2$$

et la fonction de corrélation ([1])

$$(2) \qquad M\{[x(t_1, \mathcal{E}) - m][x(t_2, \mathcal{E}) - m]\} = R(t_1, t_2) = R(\tau)$$

ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$;

([1]) L'espérance mathématique que nous appelons fonction de corrélation a été utilisée sous le nom de « covariance » par M. Loève (*voir* [2]) pour des fonctions aléatoires non supposées et stationnaires. Cet auteur a indiqué des propriétés générales des fonctions aléatoires qui possèdent une covariance, propriétés auxquelles se rattachent un certain nombre de résultats contenus dans cette étude.

2° $x(t, \mathcal{E})$ est stochastiquement continu; cela impose à $R(\tau)$ la condition $R(+0) = \sigma^2$, ce qui entraîne d'ailleurs (1) que $R(\tau)$ est une fonction de τ uniformément continue de $-\infty$ et $+\infty$;

3° Les questions à traiter nous conduiront à introduire $\int_a^b x(t, \mathcal{E})\, dt$ ou des intégrales du type

$$\int_a^b \int_a^b x(t, \mathcal{E})\, x(t', \mathcal{E})\, dt\, dt';$$

nous admettrons que les intégrales introduites existent et que les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de Fubini (*voir* par exemple Saks [3] p. 262) sont satisfaites de façon à permettre les permutations du type

$$M\left\{\int [\quad]\, dt\right\} = \int M[\quad]\, dt.$$

Sous les hypothèses précédentes, on montre aisément que $R(\tau)$ est une fonction définie positive. L'utilisation d'un théorème de Bochner [4] conduit alors au résultat fondamental suivant dû à Khintchine [1] : *la condition nécessaire et suffisante pour que* $R(\tau)$ *soit une fonction de corrélation est que la fonction* $R(\tau)$ *puisse se mettre sous la forme*

$$R(\tau) = \int_0^\infty \cos \omega\tau \, d\mathcal{F}(\omega), \tag{3}$$

$\mathcal{F}(\omega)$, *supposé nul pour* $\omega \leqq 0$, *a toutes les propriétés d'une fonction de répartition à ceci près* $\mathcal{F}(+\infty) = \sigma^2$ *n'est pas nécessairement égal à* $+1$.

Les propriétés du 1er et du 2e ordre des fonctions considérées sont caractérisées par la donnée de m et de $R(\tau)$ (fonction de corrélation) ou de m et de $\mathcal{F}(\omega)$ (fonction spectrale).

I. — La loi des grands nombres.

Rappelons brièvement un certain nombre de résultats connus, dus, pour l'essentiel, à Khintchine [1] et Slutsky [5].

Nous poserons, pour les expliciter,

$$X(t, \mathcal{E}) = x(t, \mathcal{E}) - m \quad \text{et} \quad \mu(T, \mathcal{E}) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t, \mathcal{E})\, dt. \tag{4}$$

Khintchine a montré que l'on avait, et cela uniformément par rapport à U,

$$\lim_{T \to \infty} M \left\{ [\mu(T+U, \mathcal{E}) - \mu(T, \mathcal{E})]^2 \right\} = 0. \tag{5}$$

Il y a donc convergence mutuelle en moyenne quadratique (*voir* Paul Lévy [6] p. 58); cela entraîne l'existence d'une limite en moyenne quadratique; d'où le résultat suivant (Khintchine).

Théorème I. — *Il existe une variable aléatoire $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ telle que $\mu(T, \mathcal{E})$ converge vers $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ en moyenne quadratique lorsque* T *tend vers l'infini.*

Nous poserons par la suite

$$M \left\{ \mathcal{L}^2 \right\} = \Sigma^2.$$

Slutsky a montré que l'on avait

$$\lim_{T \to \infty} M \left\{ \mu^2(T, \mathcal{E}) \right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau)\, d\tau = \mathcal{F}(+0), \tag{6}$$

où $\mathcal{F}(+0)$ représente la discontinuité de $\mathcal{F}(\omega)$ à l'origine.

A cause de la convergence en moyenne quadratique de $\mu(T, \mathcal{E})$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, on a

$$M \left\{ \mathcal{L}^2 \right\} = \lim_{T \to \infty} M \left\{ \mu^2(T, \mathcal{E}) \right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau)\, d\tau = \mathcal{F}(+0) = \Sigma^2. \tag{7}$$

D'où ce résultat (Slutsky) (1).

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 0$ avec une probabilité égale à l'unité est*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau)\, d\tau = \mathcal{F}(+0) = 0. \tag{8}$$

Cette condition traduit le fait que $\mathcal{F}(\omega)$ ne possède pas de masse ponctuelle à l'origine. Si la condition (8) est remplie, nous dirons que la fonction aléatoire considérée a un spectre continu à l'origine; s'il en est ainsi, $\frac{1}{T} \int_0^T X(t, \mathcal{E})\, dt$ converge vers 0 en moyenne quadratique lorsque T tend vers l'infini.

---

(1) Ce résultat a été également établi par R. Fortet [7].

Si la condition (8) n'est pas remplie, considérons

$$(9) \qquad X'(t, \mathcal{E}) = X(t, \mathcal{E}) - \mathcal{L}(\mathcal{E}).$$

On montre aisément que la fonction de corrélation $R'(\tau)$ et la fonction spectrale $\mathcal{F}'(\omega)$ associées à $X'(t, \mathcal{E})$ sont données par

$$R'(\tau) = R(\tau) - \Sigma^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}'(\omega) = \mathcal{F}(\omega) - \mathcal{F}(+0) \quad \text{pour} \quad \omega \geqq 0.$$

La condition (8) est donc satisfaite pour $X'(t, \mathcal{E})$. D'où

THÉORÈME III. — *Toute fonction aléatoire, stationnaire d'ordre deux, stochastiquement continue, peut être décomposée suivant*

$$(10) \qquad x(t, \mathcal{E}) = m + \mathcal{L}(\mathcal{E}) + X'(t, \mathcal{E}),$$

où

a. m est un nombre certain;

b. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ *est une variable aléatoire et, par suite, ne dépend pas de t;*

c. $X'(t, \mathcal{E})$ *est une fonction aléatoire stationnaire d'ordre* 2, *stochastiquement continue, dont le spectre est continu à l'origine et qui satisfait à* $M\{X'(t, \mathcal{E})\} = 0$.

Le théorème III nous permet, dans l'étude de $\frac{1}{T}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\,dt$ pour les grandes valeurs de T, de nous limiter à la partie $X'(t, \mathcal{E})$. Nous dirons pour simplifier que nous ne considérons que la partie dont le spectre est continu à l'origine.

II. — LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES.

Nous pouvons donc supposer maintenant que $x(t, \mathcal{E})$ a toutes les propriétés de $X'(t, \mathcal{E})$. On a alors

$$(11) \qquad \lim_{\substack{\text{(en moyenne} \\ \text{quadratique)}}} \frac{1}{T}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\,dt = 0.$$

Nous allons chercher à formuler des conditions suffisantes pour qu'il y ait convergence forte. Ces conditions pourront s'exprimer soit au moyen de R soit au moyen de $\mathcal{F}$.

1° *Emploi de la fonction de corrélation.* — En utilisant un résultat de M. Kampé de Fériet [8], il nous avait été possible d'obtenir l'énoncé suivant [9].

Si la fonction de corrélation est intégrable au sens de Césaro d'ordre 1, $\frac{1}{T}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\, dt$ *converge fortement vers zéro pour* $T \to +\infty$.

On peut donner un énoncé beaucoup plus général :

Théorème IV. — *Si, pour les grandes valeurs de T, l'expression*

$$\frac{1}{T^\alpha}\int_0^T \left[1 - \frac{s}{T}\right] R(s)\, ds \qquad \text{où } \alpha < 1$$

reste bornée en module, $\frac{1}{T}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\, dt$ *converge fortement vers zéro lorsque* $T \to \infty$.

Démonstration, — Partons de la relation bien connue

$$(13)\quad M\{\mu^2(T, \mathcal{E})\} = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t, t')\, dt\, dt' = \frac{2}{T}\int_0^T \left[1 - \frac{s}{T}\right] R(s)\, ds.$$

A et $\eta = 1 - \alpha$ étant des constantes positives non nulles, on a

$$(14)\qquad M\{\mu^2(T, \mathcal{E})\} \leqq \frac{2A}{T\eta}.$$

Soit alors p le plus petit entier positif satisfaisant à $p\eta > 1$. Considérons la suite des valeurs $T = n^p$ (n entier positif). La série $\Sigma M\{\mu^2(n^p, \mathcal{E})\}$ converge, ce qui entraîne la convergence presque sûre de $\mu[n^p, \mathcal{E}]$ vers zéro [10].

Que se passe-t-il si T ne tend pas vers $+\infty$ par valeurs du type n^p, mais par valeurs quelconques? Si T est quelconque, il existe une valeur entière $n(T)$ telle que

$$(15)\qquad [n(T)]^p \leqq T < [n(T) + 1]^p.$$

Il nous suffit de démontrer que $\frac{1}{[n(T)]^p}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\, dt \to 0$.

On a

$$(16)\qquad \frac{1}{[n(T)]^p}\int_0^T x(t, \mathcal{E})\,dt = \frac{1}{[n(T)]^p}\int_0^{[n(T)]^p} x(t, \mathcal{E})\,dt + \frac{1}{[n(T)]^p}\int_{[n(T)]^p}^{T} x(t, \mathcal{E})\,dt.$$

Lorsque $T \to \infty$, le premier terme du second membre tend ver zéro avec la probabilité 1. Le second terme est majoré par

$$(17)\qquad Y_n = \frac{1}{n^p}\int_{n^p}^{(n+1)^p} |\,x(t, \mathcal{E})\,|\,dt.$$

On a

$$M\{Y_n^2\} \leq \frac{1}{n^{2p}}\int_{n^p}^{(n+1)^p}\int_{n^p}^{(n+1)^p} M\{|\,x(t, \mathcal{E})\,|\,|\,x(t', \mathcal{E})\,|\}\,dt\,dt'$$

$$\leq M\{x^2\}\frac{[(n+1)^p - n^p]^2}{n^{2p}},$$

donc

$$M\{Y_n^2\} \leq M\{x^2\}\frac{B}{n^2(T)}.$$

La série $\Sigma M\{Y_n^2\}$ converge lorsque $n \to \infty$; Y_n converge donc fortement vers zéro lorsque n tend vers l'infini, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La condition (12) est sûrement remplie si l'on a

$$(19)\qquad \frac{1}{T^\alpha}\int_0^T |\,R(s)\,|\,ds \leq A, \qquad (\alpha < 1)$$

et, *a fortiori*, si $R(s)$ est absolument intégrable pour $s = +\infty$.

C'est là une circonstance qui se rencontre souvent dans les applications physiques. Les fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité introduisent, par exemple, des fonctions de corrélation à décroissance exponentielle [11]. Il semble que l'hydrodynamique statistique introduise aussi des fonctions aléatoires à fonction de corrélation absolument intégrables {[12] et ([8], p. 179)}.

2° *Emploi de la fonction spectrale.* — On remplacera alors la relation (13) par

$$(20)\qquad M\{\mu^2(T, \mathcal{E})\} = \int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}\,d\mathcal{F}(\omega).$$

En raisonnant comme précédemment, on établit le résultat suivant :

Théorème V. — *S'il existe un nombre positif η tel que, pour les grandes valeurs de* T, *on ait*

$$(21) \qquad T^{\eta} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} d\mathcal{F}(\omega) < A \qquad [A \text{ const.} > 0],$$

on peut conclure à la convergence forte.

Remarque. — La condition (21) peut être remplacée par la condition suivante plus restrictive :

S'il est possible de trouver un nombre $\alpha < 1$, tel que, dans un domaine fini $0 \leqq \omega < \omega_0$, on ait

$$(22) \qquad d\mathcal{F}(\omega) \leqq \frac{d\omega}{\omega^{\alpha}},$$

on peut conclure à la convergence forte.

Conclusion. — Les propriétés ergodiques sont liées aux grandes valeurs de la fonction de corrélation ou aux propriétés de la fonction spectrale près de l'origine. La condition pour que la loi des grands nombres s'applique est que $\mathcal{F}(\omega)$ soit continu à l'origine. Si $\mathcal{F}(\omega)$ se présente près de l'origine comme ω^m, on aura le droit de conclure à la loi forte des grands nombres quel que soit $m > 0$. Pour m très petit, la courbe représentative de $\mathcal{F}(\omega)$, tout en restant continue pour $\omega = 0$, aura une croissance très grande et, cependant, la loi forte sera toujours valable. Pour des croissances plus rapides que $\omega^m [m > 0]$, les raisonnements précédents ne permettent pas de conclure.

III. *Extension à des fonctions non stationnaires.* — La considération d'applications physiques nous a conduits à étendre un certain nombre des résultats précédents à des fonctions non stationnaires ou, si l'on veut, à élargir la notion de *stationnarité*.

1° **Premier exemple.** — Nous avons établi que si une fonction aléatoire stationnaire à spectre continu à l'origine était telle qu'il soit possible de trouver un nombre α inférieur à 1, tel que, pour les grandes valeurs de T, on ait

$$\frac{1}{T^\alpha}\int_0^T |R(s)|\,ds < A, \tag{23}$$

on avait, avec la probabilité 1,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t,\mathcal{E})\,dt = 0. \tag{24}$$

Si $p(t)$ est une fonction continue de t, bornée en module, on peut, en raisonnant comme précédemment, montrer, sans difficulté, que, si la condition (23) est satisfaite, on a, avec une probabilité unité,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t,\mathcal{E})p(t)\,dt = 0. \tag{25}$$

On a ainsi une fonction $x(t, \mathcal{E})p(t)$ qui n'est plus stationnaire et qui pourtant, obéit à la loi forte. Ceci vaut, en particulier, si $p(t)$ est une fonction périodique continue. Ces considérations trouvent leur application dans les problèmes de fluctuations en électricité lorsqu'on étudie l'interaction dans un détecteur d'un signal sinusoïdal avec le bruit de fond [11]. Les fonctions aléatoires $x(t, \mathcal{E})p(t)$ que nous venons de considérer ne sont, à vrai dire, pas très différentes des fonctions stationnaires; le facteur $p(t)$ ne détruit, pour ainsi dire, le caractère stationnaire que de façon partielle; si M est la borne supérieure de $p(t)$, $x(t, \mathcal{E})$. $p(t)$ est compris, pour chaque valeur de t, entre les valeurs prises pour cette valeur de t par les deux fonctions stationnaires $Mx(t, \mathcal{E})$ et $-Mx(t, \mathcal{E})$.

2° **Nous allons maintenant élargir d'une façon plus importante la notion de fonction stationnaire.** — Cette généralisation nous a été suggérée par la considération de phénomènes physiques. On rencontre souvent des phénomènes de fluctuations qui commencent à un instant précis t_0, s'amplifient dans une période de début qui correspond à ce qu'on peut appeler l'établissement du régime fluctuant, puis, tendent asymptotiquement vers un état stationnaire limite. Comme exemples, on peut citer les fluctuations qui prennent naissance dans un amplificateur soumis, à partir de t_0, à l'effet de grêle d'un courant constant [11], ou encore l'élongation d'un pendule immobilisé jusqu'en $t = t_0$, libéré en $t = t_0$ et soumis alors à l'agitation brownienne. Des exemples de telles fluctuations, commençant à un instant précis et tendant vers un état stationnaire limite, nous sont fournis par toutes les parties de la physique, de la mécanique, de l'hydrodynamique.

Ces remarques nous ont conduits à la notion de *fonctions asymptotiquement stationnaires*. Cette généralisation se situe par rapport aux fonctions stationnaires de la même façon que les fonctions asymptotiquement presque périodiques introduites par M. Fréchet [13] se situent par rapport aux fonctions presque périodiques.

Nous dirons qu'une fonction aléatoire $x(t, \mathcal{E})$ définie pour $t > 0$ (ou, d'une façon plus générale, pour $t > t_0$) est asymptotiquement stationnaire si elle vérifie les hypothèses suivantes :

1° $\mathfrak{M}\{x(t, \mathcal{E}) = m(t)$ tend vers une limite lorsque $t \to +\infty$.

2° Posons

$$R(t_1, t_2) = \mathfrak{M}\{[x(t_2, \mathcal{E}) - m(t_2)][x(t_1, \mathcal{E}) - m(t_1)]\}. \tag{26}$$

$R(t_1, t_2)$ sera appelé la *fonction de corrélation* relative au couple t_1, t_2.

Nous supposerons que R est uniformément continu quels que soient t_1 et t_2 positifs; R est donc borné [la continuité uniforme de R entraîne la continuité en moyenne quadratique de $x(t, \mathcal{E})$ pour chaque valeur de t]. Nous supposerons enfin qu'il existe une fonction $\rho(\tau)$ satisfaisant à la propriété suivante : à tout ε positif, on peut associer un nombre Θ tel que, pour t_1 et t_2 quelconques supérieurs à Θ, on ait

$$|R(t_1, t_2) - \rho(t_1 - t_2)| < \varepsilon. \tag{27}$$

3° Enfin nous reprenons l'hypothèse 3° du début relative à la possibilité de permuter les sommes et les espérances mathématiques.

Nous dirons que m est *l'espérance mathématique limite* et que $\rho(\tau)$ est la *fonction de corrélation limite*. Nous désignerons pour simplifier de telles fonctions aléatoires par la notation F. A. S. (fonctions asymptotiquement stationnaires).

THÉORÈME VI. — *L'espérance mathématique limite et la fonction de corrélation limite associées à une F.A.S. sont définies de façon unique.*

La fonction de corrélation limite est paire et uniformément continue.

Supposons par exemple qu'il y ait deux fonctions ρ_1 et ρ_2 prenant pour $\tau = \tau_0$ des valeurs $\rho_1(\tau_0)$ et $\rho_2(\tau_0)$ différant de θ; prenons $\varepsilon = \frac{\theta}{4}$; soit Θ la valeur associée à $\frac{\theta}{4}$; on a, pour $t > \Theta$ et $t + \tau_0 > \Theta$,

$$|R(t, t+\tau_0) - \rho_1(\tau_0)| \leq \frac{\theta}{4} \quad \text{et} \quad |R(t, t+\tau_0) - \rho_2(\tau_0)| \leq \frac{\theta}{4}.$$

D'où

$$|\rho_1(\tau_0) - \rho_2(\tau_0)| \leq \frac{\theta}{2},$$

ce qui démontre, par l'absurde, l'impossibilité de $\rho_2(\tau_0) \neq \rho_1(\tau_0)$.

La parité de $\rho(\tau)$ et sa continuité uniforme s'établissent de façon analogue.

THÉORÈME VII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\rho(\tau)$ soit une fonction de corrélation limite associée à une F.A.S. est que $\rho(\tau)$ puisse s'exprimer par*

$$\rho(\tau) = \int_0^\infty \cos\omega\tau \, d\mathcal{F}(\omega), \tag{28}$$

où $\mathcal{F}(\omega)$ satisfait aux mêmes conditions que pour les fonctions stationnaires.

La fonction $\rho(\tau)$ est en effet une fonction définie positive et, par suite, on peut lui appliquer le théorème de Bochner [4]. On peut montrer que, pour tout système de nombres complexes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ dont on désignera les conjugués par $\varphi_1^\star, \varphi_2^\star, \ldots, \varphi_m^\star$, on a, quels que soient $h_1, h_2 \ldots, h_m$,

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \rho(h_\mu - h_\nu)\varphi_\nu\varphi_\mu^\star \geq 0. \tag{29}$$

Cela résulte du fait que l'on a toujours

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} R(\theta+h_\mu,\ \theta+h_\nu)\,\varphi_\mu\,\varphi_\nu^{*} \geqq 0, \tag{30}$$

et aussi des définitions.

L'application du théorème de Bochner montre que la condition (28) est nécessaire. On voit immédiatement qu'elle est suffisante en remarquant que les fonctions stationnaires sont contenues dans les F.A.S.

Ainsi, à toute F.A.S. nous sommes en mesure d'associer une fonction de corrélation limite et une fonction spectrale bien déterminées. Naturellement la réciproque n'est pas vraie. Il y a une infinité de F.A.S. qui ont même spectre.

Posons

$$X(t, \mathcal{E}) = x(t, \mathcal{E}) - m(t) \qquad \text{et} \qquad \mu(T, \mathcal{E}) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t, \mathcal{E})\,dt.$$

On peut reprendre rapidement les raisonnements qui, dans le cas des fonctions stationnaires, conduisent aux résultats de Kintchine et de Slutsky; on a

$$\begin{aligned} (31)\qquad & M\{[\mu(T+U, \mathcal{E}) - \mu(T, \mathcal{E})]^2\} \\ &= \frac{1}{(T+U)^2}\int_0^{T+U}\int_0^{T+U} R(u, v)\,du\,dv \\ &+ \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(u, v)\,du\,dv \\ &- \frac{2}{T}\,\frac{1}{T+U}\int_0^T\int_0^{T+U} R(u, v)\,du\,dv. \end{aligned}$$

On posera alors

$$R(u, v) = \rho(u-v) + \varepsilon(u, v). \tag{32}$$

Le terme $\rho(u-v)$ apporte aux intégrales doubles des contributions que l'on traite comme pour le cas des fonctions stationnaires; $\varepsilon(u, v)$ apporte des contributions qui tendent vers zéro uniformément par rapport à U lorsque $T \to +\infty$; on a de nouveau

$$\lim_{T \to \infty} M \{ [\mu(T+U, \mathcal{E}) - \mu(T, \mathcal{E})]^2 \} = 0, \tag{33}$$

en cela uniformément par rapport à U. D'où le résultat

Théorème VIII. — *Il existe une variable aléatoire $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ telle que $\mu(T, \mathcal{E})$ converge vers $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ en moyenne quadratique lorsque* T *tend vers* $+\infty$.

On a, d'autre part,

$$M \{ \mu^2(T, \mathcal{E}) \} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(u, v)\, du\, dv;$$

d'où

$$\lim_{T \to \infty} M \{ \mu^2(T, \mathcal{E}) \} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(u, v)\, du\, dv. \tag{34}$$

En tenant compte de (32), on établit aisément

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(u, v)\, du\, dv = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(u-v)\, du\, dv,$$

d'où

$$\lim_{T \to \infty} M \{ \mu^2(T, \mathcal{E}) \} = \mathcal{F}(+0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\tau)\, d\tau = \Sigma^2; \tag{35}$$

d'où

Théorème IX. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 0$ avec une probabilité égale à 1 est $\Sigma^2 = 0$.*

On obtient alors aisément le théorème de décomposition.

Théorème X. — *Toute F.A.S. peut être décomposée suivant*

$$x(t, \mathcal{E}) = m(t) + \mathcal{L}(\mathcal{E}) + X'(t, \mathcal{E}), \tag{36}$$

où

a. *$m(t)$ est une fonction certaine qui tend vers une limite pour $t = +\infty$;*

b. *$\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est une variable aléatoire et, par suite, ne dépend pas de t;*

c. *$X'(t, \mathcal{E})$ est une F.A.S. dont le spectre est continu à l'origine et qui satisfait à $M\{X'(t, \mathcal{E})\} = 0$.*

La fonction de corrélation limite ou la fonction spectrale limite relatives à $X'(t, \mathcal{E})$ se déduisent des mêmes éléments limites relatifs à $X(t, \mathcal{E})$ comme pour les fonctions stationnaires. Le théorème X nous permet de nous ramener toujours à l'étude de la partie $X'(t, \mathcal{E})$. Soit $R'(t_1, t_2)$ l'espérance mathématique $M\{X'(t_1, \mathcal{E})\, X'(t_2, \mathcal{E})\}$.

Posons, comme cela a déjà été fait,

$$R'(t_1, t_2) = \rho'(t_1 - t_2) + \varepsilon'(t_1, t_2). \tag{37}$$

D'après les définitions, $\varepsilon'(t_1, t_2)$ est simplement astreint à tendre vers 0 lorsque t_1 et t_2 tendent tous les deux vers $+\infty$, indépendamment l'un de l'autre et, d'après ce qui précède, on a vu que cela entraîne :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t, \mathcal{E})\, dt = 0 \text{ en moyenne quadratique.}$$

En faisant des hypothèses sur le terme complémentaire $\varepsilon'(t_1, t_2)$ *on peut conclure à une convergence forte*. Par exemple :

Théorème XI. — *Si, pour les grandes valeurs de* T, $\rho'(\tau)$ *satisfait à la condition d'application du théorème* IV *et si l'on peut trouver un nombre* η *positif tel que, pour* T *assez grand, on ait*

$$\left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon'(u, v)\, du\, dv \right| \leq \frac{A}{T^\eta},$$

on peut conclure à la convergence forte [1].

Pour terminer, donnons un exemple de fonction asymptotiquement stationnaire :

$$\left\{ \begin{aligned} & m(t) = a R q \left[1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right] \\ \text{et} \quad & R(t_1, t_2) = \frac{a R q}{2C} \left[e^{-\frac{|t_1 - t_2|}{CR}} - e^{-\frac{t_1 + t_2}{CR}} \right]. \end{aligned} \right. \tag{38}$$

Ces expressions étant valables pour t, t_1, t_2 positifs.

---

[1] Dans un article paru peu de temps avant la correction des épreuves de ce travail, M. Loève donne un résultat plus général d'ou le théorème XI pourrait se déduire facilement. [*Revue Scientifique*, juin-décembre 1945, p. 297.]

La F.A.S. ainsi définie représente, pour $t > 0$, le potentiel aux bornes d'un condensateur de capacité C, shunté par une résistance R, lorsqu'on envoie, à partir de $t = 0$, sur l'un des plateaux, des charges positives q à des instants répartis dans le temps suivant une loi de Poisson de densité uniforme α.

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1946.)

BIBLIOGRAPHIE.

1. KHINTCHINE, *Korrelationstheorie der stationären stochastichen Prozesse* (*Math. Annalen*, Bd 109, 1934, p. 605-615).
2. LOÈVE, *C. R. Acad. Sc.*, 220, 1945, p. 295.
3. SAKS, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa, 1933 p. 262, Institut mathématique de l'Université de Moscou.
4. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, 1932.
5. SLUTSKY, *Colloque consacré à la Théorie des Probabilités* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, 738, Hermann, 1938).
6. Paul LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, 1937.
7. R. FORTET, *Sur une suite également répartie* (*Studia Math.*, 9).
8. KAMPÉ DE FÉRIET, *Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. LIX, Série 1, p. 145).
9. A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD, *C. R. Acad. Sc.*, 220, 1945, p. 134.
10. M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur la théorie de Probabilités*, Livre 1er, p. 238, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
11. A. BLANC-LAPIERRE, *Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires : application à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité*. *Thèse de Doctorat* (École Normale Supérieure). *Publications des Laboratoires* (*Mathématiques*, I). Masson, Éditeur, Paris, novembre 1945.
12. R. BRARD, *C. R. Acad. Sc.*, 218, 1944, p. 144.
13. M. FRÉCHET, *Les fonctions asymptotiquement presque périodiques et leur application au problème ergotique* (*Revue scientifique*, nos 7, 8 et 9, juillet-août et septembre 1941, p. 351 à 374; 407 à 417).