BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES BOULIGAND

Surfaces douées d'une famille d'asymptotiques ordinaires

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 31-41

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__31_0>

SURFACES DOUÉES D'UNE FAMILLE D'ASYMPTOTIQUES ORDINAIRES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Le problème qui va nous occuper est de nature essentiellement locale. Il n'y aura donc pas d'inconvénient à l'aborder, en prenant une portion S de la surface étudiée, pour laquelle il existe une représentation paramétrique du type

$$(1) \qquad y = y(x, \lambda), \qquad z = z(x, \lambda);$$

tel sera toujours le cas si, dans la portion utile de la surface, toute direction de corde d'une ligne $\lambda =$ const. est celle d'un vecteur faisant avec Ox un angle moindre qu'un angle aigu α donné. Nous supposerons que les lignes $\lambda =$ const. sont des *asymptotiques ordinaires*, cela voulant signifier qu'entre les dérivées partielles des fonctions y et z, est satisfaite la relation

$$(2) \qquad y_\lambda z_{x^2} - z_\lambda y_{x^2} = 0.$$

On y voit figurer le vecteur $(0, y_{x^2}, z_{x^2})$: c'est l'accélération d'un mobile décrivant notre ligne $\lambda =$ const., quand sa projection sur $x'x$ décrit cet axe avec une vitesse constamment égale à l'unité. La relation (2) signifie que cette accélération et le vecteur $(0, y_\lambda, z_\lambda)$ sont portés par la même direction.

Nous supposerons z_λ non nul : en vertu de cette hypothèse, la seconde des relations (1) est localement résoluble en λ sous la forme

$$\lambda = \lambda(x, z).$$

Cela nous garantit, en portant cette expression de λ dans la première des relations (1), que nous avons bien par leur accouplement la représentation d'une véritable surface que chaque parallèle à l'axe des y rencontre en un point au plus.

Bien entendu, nous admettons l'existence, et même la continuité par rapport au couple x, λ, de toutes les dérivées figurant au second membre de (2). Nous étendons ces hypothèses aux dérivées $y_{\lambda x}$, $z_{\lambda x}$, sans rien supposer par contre relativement à l'existence de y_{λ^2}, y_{λ^2}.

2. Si nous prenions le cas plus particulier où l'existence de ces deux dernières dérivées est assurée, nous pourrions, conformément à la théorie classique, définir sur la surface un second système d'asymptotiques au moyen de l'équation différentielle

$$2(y_{\lambda x}z_\lambda - z_{\lambda x}y_\lambda)\,dx + (y_{\lambda^2}z_\lambda - z_{\lambda^2}y_\lambda)\,d\lambda = 0 \quad (^1).$$

Cette équation équivaut encore au système (Σ) suivant :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} du = \dfrac{y_\lambda z_{\lambda x} - z_\lambda y_{\lambda x}}{y_\lambda^2 + z_\lambda^2}\,dx, \\ z_\lambda \operatorname{tang} u = y_\lambda. \end{cases}$$

Ce système va jouer par la suite un rôle fondamental, car sa formation suppose seulement l'existence des dérivées que nous avons énumérées ci-dessus, en ayant soin d'exclure y_{λ^2}, z_{λ^2}.

3. Pour établir l'existence de solutions du système (Σ), nous supposerons que, sur la portion utile de la surface S, la quantité

$$y_\lambda z_{\lambda x} - z_\lambda y_{\lambda x}$$

conserve un signe constant et même, ne s'annule pas. Alors, sur une courbe Γ (s'il en existe) satisfaisant au système Σ, chacune des variables x, u sera fonction monotone de l'autre. L'hypothèse que nous venons d'introduire est aussi bien celle de la non-annulation de

$$z_\lambda(\operatorname{tang} u\, z_{\lambda x} - y_{\lambda x}).$$

Comme le premier facteur conserve, sans s'annuler, un signe constant, il en est de même du second. Cela montre que la seconde équation du système (Σ) est localement résoluble sous la forme

$$(3) \qquad x = x(u, \lambda).$$

---

(1) Sans préjudice de diverses singularités des courbes intégrales de cette équation : notamment ces courbes pourront présenter des points de Peano, dont l'ensemble peut recouvrir S.

Le long de la courbe solution Γ, dont a été admise l'existence, il a été noté que x est une fonction monotone de u, en vertu de la première équation de (Σ). Supposons qu'on remplace le premier membre de (3) par cette fonction. D'où une nouvelle équation

$$x(u) = x(u, \lambda). \tag{4}$$

Je dis qu'elle détermine univoquement u en fonction de λ. En effet, puisqu'elle provient de la seconde équation du système Σ, l'équation (4) peut encore s'écrire

$$y_\lambda[x(u), \lambda] - \operatorname{tang} u \, z_\lambda[x(u), \lambda] = 0.$$

Calculons la dérivée du premier membre par rapport à u. Nous obtenons

$$(y_{\lambda x} - \operatorname{tang} u \, z_{\lambda x}) x'(u) - (1 + \operatorname{tang}^2 u) z_\lambda.$$

L'étude de la non-annulation et du signe de cette quantité équivaut à la même étude pour

$$z_\lambda (y_{\lambda x} z_\lambda - y_\lambda z_{\lambda x}) \frac{dx}{du} - (y_\lambda^2 + z_\lambda^2) z_\lambda,$$

c'est-à-dire, vu la première équation de (Σ), pour

$$-z_\lambda (y_\lambda^2 + z_\lambda^2) \frac{du}{dx} \frac{dx}{du} - z_\lambda (y_\lambda^2 + z_\lambda^2),$$

ou enfin pour

$$-2 z_\lambda (y_\lambda^2 + z_\lambda^2),$$

quantité qui ne s'annule pas et conserve le signe, supposé constant, de z_λ. Au point de vue local où nous nous sommes placés, on pourra donc déterminer univoquement, le long de la courbe Γ, les valeurs de u en fonction de λ : cela, après avoir restreint convenablement l'intervalle i de variation de λ.

Géométriquement, on voit donc qu'une courbe Γ, si elle existe, coupera chaque asymptotique ordinaire $\lambda = \text{const.}$ en un seul point. Et par suite, λ se présente comme le paramètre en fonction duquel il est le plus naturel d'exprimer les coordonnées d'un point de Γ.

4. Pour répondre au problème d'existence des courbes Γ de l'espace (x, y, z), assujetties à vérifier le système (Σ), nous

devons, d'après la forme même de ce système, raisonner dans l'espace (λ, x, u) et y déterminer les courbes L qui satisfont au système (Σ). Nous regarderons ce système comme limite d'une suite de systèmes $\Sigma^{(r)}$ qui auront exactement la même forme que (Σ) : on y substitue seulement à

$$y(x, \lambda), \qquad z(x, \lambda),$$

des fonctions continues, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'au second ordre inclus

$$y^{(r)}(x, \lambda), \qquad z^{(r)}(x, \lambda),$$

termes généraux de deux suites qui convergent uniformément, la première vers $y(x, \lambda)$, la seconde vers $z(x, \lambda)$.

On peut d'ailleurs choisir ces fonctions de manière qu'il y ait également convergence uniforme vers zéro des différences

$$y^{(r)}_{\lambda} - y_{\lambda}, \qquad z^{(r)}_{\lambda} - z_{\lambda}, \qquad y^{(r)}_{x} - y_{x}, \qquad z^{(r)}_{x} - z_{x},$$
$$y^{(r)}_{x^2} - y_{x^2}, \qquad z^{(r)}_{x^2} - z_{x^2},$$
$$y^{(r)}_{\lambda x} - y_{\lambda x}, \qquad z^{(r)}_{\lambda x} - z_{\lambda x}.$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de prendre par exemple pour les $y^{(r)}(x, \lambda)$ les ***médiantes*** de $y(x, \lambda)$ dans les conditions suivantes : soit $\varepsilon^{(r)}$ le terme général, qui sera un nombre positif, d'une suite évanescente et décroissante. En chaque point du plan des x, λ, on trace un cercle $\gamma^{(r)}$ centré en ce point et de rayon $\varepsilon^{(r)}$. Puis, intégrant dans l'aire de ce cercle, on déduit $y^{(r)}$ de l'opération de moyenne que voici :

$$y^{(r)}(x, y) = \frac{1}{\pi \varepsilon^{(r)2}} \iint_{\gamma^{(r)}} y(X, \Lambda)\, dX\, d\Lambda.$$

Pour y fonction continue (sans plus) de x, λ, on trouverait par définition de l'opération $\frac{\partial}{\partial x}$ que $\frac{\partial y^{(r)}}{\partial x}$ existe et a pour expression

$$\frac{\partial y^{(r)}}{\partial x} = \frac{1}{\pi \varepsilon^{(r)2}} \int_0^{2\pi} y(x + \varepsilon^{(r)} \cos\varphi,\ \lambda + \varepsilon^{(r)} \sin\varphi)\, \varepsilon^{(r)} \cos\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{\pi \varepsilon^{(r)2}} \int_{\text{circonf.}} y(X, \Lambda)\, d\Lambda.$$

Moyennant l'existence (ici supposée) de $\frac{\partial y}{\partial x}$, cela se transforme en

$$\frac{\partial y^{(r)}}{\partial x} = \frac{1}{\pi \varepsilon^{(r)^2}} \iint_{\gamma^{(r)}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx\, dy,$$

grâce à la formule de Green. Or la continuité des dérivées premières de $y(x, \lambda)$ assurera, d'après la forme du résultat qui précède, l'existence et la continuité de toutes les dérivées secondes de $y^{(r)}(x, \lambda)$, en même temps que seront satisfaites toutes les relations de voisinage (convergence uniforme) visant les dérivées ci-dessus énumérées.

5. Grâce aux précautions qui précèdent, nous disposons d'une suite de systèmes $\Sigma^{(r)}$, dont chacun correspond à la recherche de la seconde famille d'asymptotiques d'une surface $S^{(r)}$ dans les conditions ordinaires. Et pour l'ensemble de ces systèmes, nous pourrons assigner des bornes inférieures non nulles aux valeurs absolues des quantités

$$z_\lambda^{(r)} \quad \text{et} \quad y_\lambda^{(r)} z_{\lambda x}^{(r)} - z_\lambda^{(r)} y_{\lambda x}^{(r)},$$

lesquelles soient valables dans un voisinage du plan λ, x suffisamment resserré autour du point λ_0, x_0. En prenant ce voisinage fermé nous pourrons aussi (vu la continuité des dérivées premières) y fixer une borne supérieure commune avec

$$y_\lambda^{(r)^2} + z_\lambda^{(r)^2}.$$

Cela posé, les fonctions $x^{(r)}(u)$ requises sur les $S^{(r)}$ pour représenter, dans le voisinage indiqué, des asymptotiques du second système, seront toutes des fonctions monotones, avec le même sens de variation. Toutes ces fonctions sont également continues. Elles admettent au moins une fonction d'accumulation continue et monotone, variant dans le même sens que toutes les précédentes, soit $\bar{x}(u)$. Je dis qu'il lui correspond une solution bien déterminée du système (Σ). Pour l'obtenir, nous prendrons la représentation paramétrique

$$(P^r) \qquad x = x^{(r)}(\lambda), \qquad u = u^{(r)}(\lambda)$$

d'une courbe $L^{(r)}$ tracée sur la surface

$$z_\lambda^{(r)} \operatorname{tang} u - y_\lambda^{(r)} = 0$$

de notre espace (λ, x, u). Puis donnons à l'entier n, non plus toutes les valeurs successives, mais seulement une suite raréfiée de valeurs pour lesquelles les fonctions $x^{(r)}(u)$ impliquées par le paramétrage $P^{(r)}$ convergent uniformément vers $\bar{x}(u)$. Soit maintenant $\mathcal{H}$ l'ensemble d'accumulation des arcs $L^{(r)}$ dont chacun est l'intersection d'un cylindre $x = x^{(r)}(u)$ avec une surface

$$(T^r) \qquad z_\lambda^{(r)}(x, \lambda) \operatorname{tang} u - y_\lambda^{(r)}(x, \lambda) = 0.$$

Cet ensemble englobera l'intersection du cylindre $x = \bar{x}(u)$ avec la surface

$$(T) \qquad z_\lambda(x, \lambda) \operatorname{tang} u - y_\lambda(x, \lambda) = 0.$$

Or, chacun des arcs $L^{(r)}$, sur la surface $T^{(r)}$ correspondante, coupe toute ligne $\lambda = \text{const.}$ en un seul point. Ces arcs se présentant chacun comme l'intersection d'une $T^{(r)}$ de notre suite partielle avec un cylindre $x = x^{(r)}(u)$, l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$ des $L^{(r)}$ est inclus dans l'intersection de l'ensemble d'accumulation des $T^{(r)}$ et de celui des $x = x^{(r)}(u)$. Donc $\mathcal{H}$ se réduit à la courbe L, et comme cette dernière n'a qu'un point dans chaque plan $\lambda = \text{const.}$, on se trouve dans les conditions du critère établi en 1933 dans mon *Essai sur l'unité des Méthodes directes* (Liége, *Mém. Soc. Roy. des Sc.*) [2] pour conclure à la convergence uniforme des $[x^{(r)}(\lambda), u^{(r)}(\lambda)]$ de notre suite partielle vers $[\bar{x}(\lambda), \bar{u}(\lambda)]$: pour que la convergence uniforme ait lieu, il faut, en effet, et il suffit que l'ensemble d'accumulation ait un point, et un seul, de λ assigné. La démonstration s'achève alors en montrant qu'on a bien une solution du système (Σ) : dans ce but, on remplace la première équation par une équation intégrale

$$(E) \qquad x = x_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{y_\lambda^2 + z_\lambda^2}{y_\lambda z_{\lambda x} - z_\lambda y_{\lambda x}}\, du$$

et on la confronte avec la suite des $[E^{(r)}]$ provenant pareillement de nos surfaces d'approximation. On se retrouve dans les conditions d'application classique des raisonnements de convergence uniforme, qui n'offrent pas de difficulté. Puis on revient des courbes L aux courbes Γ. L'existence est résolue, la question

---

(2) *Voir* aussi LAINÉ, *Précis d'Analyse*, t. I, note 1, n° 18, p. 246-247.

d'unicité restant entière, et même étant susceptible, dans la généralité, d'une réponse négative.

6. A certains détails près, la méthode précédente avait été exposée déjà dans le cas des surfaces réglées ([3]). C'est ce cas qui donne prise, de la manière la plus naturelle, à des recherches du genre actuel, surtout quand on remarque sur un conoïde

$$z = yf(x)$$

la présence d'asymptotiques

$$\text{(A)} \qquad y^2 f'(x) = y_0^2 f'(x_0),$$

dont l'équation peut se former dès que $f'(x)$ existe, est continue et conserve un signe constant, cela sans souci d'existence de $f''(x)$. Dans ce cas, on a sous forme explicite la solution du système (Σ). Les asymptotiques généralisées définies par l'équation (A) sont alors, au sens de la convergence uniforme, des limites de vraies asymptotiques sur des conoïdes

$$z = yf_n(x),$$

les $f_n(x)$ étant des polynomes tels que

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} [f_n(x) - f(x)] &= 0 \\ \lim_{n \to \infty} [f'_n(x) - f'(x)] &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(uniformément).}$$

Le cas du conoïde suffit à faire voir que les asymptotiques généralisées obtenues dans la théorie précédente seront en général des courbes dont tout arc, si petit soit l'intervalle de variation du paramètre λ dont il provient, est non rectifiable.

7. On peut se demander s'il est possible de caractériser les asymptotiques généralisées de la théorie qui précède autrement qu'en les considérant comme des limites de vraies asymptotiques sur de bonnes surfaces qui tendent vers la surface initiale dans des

---

([3]) G. Bouligand, *Sur les limites généralisées et leur utilisation en géométrie* (*Revue scientifique*, janvier 1941, p. 55-56).

conditions convenables. N'y a-t-il pas un moyen plus direct, ne faisant intervenir que la surface initiale?

J'ai déjà préparé la réponse à ce problème en établissant dans le cas du conoïde et même dans le cas plus général d'une réglée à plan directeur ([1]) une propriété importante des lignes désignées ci-devant par Γ. Il est facile de l'étendre complètement à la question la plus large qui vient de nous préoccuper. Cette extension nous sera fournie par la relation (R) à la fin du présent paragraphe, dans les conditions indiquées par le contexte.

Soit une courbe Γ de la surface initiale provenant de deux fonctions

$$x = x(u), \qquad u = u(\lambda),$$

fournissant une solution du système (Σ).

Pour une telle courbe, il existe une limite de $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, soit $\frac{du}{dx}$, que détermine la première équation du système (Σ), mais en général, les rapports

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

auront chacun tout un ensemble de valeurs limites. Nous allons les *univociser*, c'est-à-dire choisir une suite (σ) de valeurs de Δx tendant vers zéro, de manière qu'on ait, sur cette suite σ

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \eta, \qquad \lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = \zeta,$$

en appelant η et ζ deux quantités dont chacune est bien déterminée. En vertu de

$$\Delta z = \Delta x(z_x + \varepsilon_1) + \Delta\lambda(z_\lambda + \varepsilon_3)$$

([1]) *Cf.* G. Bouligand, *Principe de concomitance et limites généralisées*, [*Revue scientifique*, janvier 1943, p. 25 (2e colonne)]. Au début de cette Note, est abordé le problème des trajectoires orthogonales des génératrices d'une réglée, lieu d'une droite dont un point décrit une courbe Γ rectifiable, par une méthode de permanence opératoire conduisant au calcul d'une intégrale de Stieltjes. Il y a lieu de signaler qu'en chaque point d'une des courbes ainsi obtenues, toute demi-tangente n'est pas nécessairement orthogonale à la génératrice G de ce point. Mais cette propriété réapparaît, soit qu'au point de Γ situé sur G, cette courbe Γ admette une tangente bien déterminée, soit encore que G soit parallèle à une génératrice du cône directeur de la réglée le long de laquelle il y ait, pour ce cône, un plan tangent bien déterminé.

et de $z_\lambda \neq 0$, on en déduit pour $\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$ l'existence d'une limite égale à $\frac{\zeta - z_x}{z_\lambda}$.

Considérons encore, le long de Γ, le vecteur de composantes

$$(y_x - z_x \operatorname{tang} u, -1, \operatorname{tang} u),$$

lequel est normal à la surface donnée. Puisque nous cheminons sur Γ, la dernière composante de ce vecteur admet une dérivée par rapport à x. Il n'en serait pas de même en général de sa première composante. Je dis toutefois que cette propriété vaut quand on se localise sur la suite (σ). En effet, formons le rapport

$$\rho = \frac{\Delta(y_x - z_x \operatorname{tang} u)}{\Delta x}$$

dont le numérateur est

$$y_x(x + \Delta x, \lambda + \Delta\lambda) - y_x(x, \lambda) - \operatorname{tang} u [z_x(x + \Delta x, \lambda + \Delta\lambda) - z_x(x, \lambda)]$$
$$- [z_x(x, \lambda) + \Delta z_x][\operatorname{tang}(u + \Delta u) - \operatorname{tang} u].$$

En vertu de la condition (2), on trouve que l'ensemble des valeurs limites de ρ est encore celui de

$$(y_{\lambda x} - \operatorname{tang} u\, z_{\lambda x}) \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} - z_x(1 + \operatorname{tang}^2 u) \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

ou aussi bien de

$$\frac{y_{\lambda x} z_\lambda - z_{\lambda x} y_\lambda}{z_\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} + z_x \frac{y_{\lambda x} z_\lambda - z_{\lambda x} y_\lambda}{z_\lambda^2},$$

ou enfin de

$$\frac{y_{\lambda x} z_\lambda - z_{\lambda x} y_\lambda}{z_\lambda^2} \left(z_x + z_\lambda \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} \right).$$

Or, puisque $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tend vers une limite égale à ζ [pour la suite (σ) des valeurs de Δx], on voit qu'alors, grâce à la limite établie pour $\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$, le facteur

$$z_x + z_\lambda \frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$$

tend aussi vers une limite égale à ζ. Ainsi, nous aurons pour ρ, quand on prend les valeurs de Δx sur (σ), une limite égale à

$$\frac{y_{\lambda x} z_\lambda - z_{\lambda x} y_\lambda}{z_\lambda^2} \zeta,$$

ce qui donne finalement l'égalité

$$\lim_{\Delta x \left\{ \begin{smallmatrix} \in (\sigma) \\ \succ 0 \end{smallmatrix} \right.} \frac{\Delta(y_x - z_x \operatorname{tang} u)}{\Delta x} + \frac{y_\lambda z_{\lambda x} - z_\lambda y_{\lambda x}}{z_\lambda^2} \lim_{\Delta x \left\{ \begin{smallmatrix} \in (\sigma) \\ \succ 0 \end{smallmatrix} \right.} \frac{\Delta z}{\Delta x} = 0,$$

ou encore

$$\lim_{\Delta x \left\{ \begin{smallmatrix} \in (\sigma) \\ \succ 0 \end{smallmatrix} \right.} \left[\frac{y_x - z_x \operatorname{tang} u}{\Delta x} + \frac{\Delta(\operatorname{tang} u)}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] = 0.$$

Cette relation exprime qu'en appelant A, B, C un vecteur porté par la normale, en restreignant la différentiation à chaque suite (σ) d'univocisation, on a une relation de la forme

(R) $$d\text{A}\, dx + d\text{B}\, dy + d\text{C}\, dz = 0$$

le long de la courbe Γ ([5]). Cela signifie encore :

En prenant la représentation sphérique de la surface et un élément linéaire dM *de la courbe* Γ *dont l'extrémité proviendra d'une suite* (σ) *d'univocisation, une direction, bien déterminée, de demi-tangente à* Γ *qui correspond à cet élément* dM *est orthogonale à celle* (univocisée par concomitance) *de l'élément correspondant de la courbe image dans la représentation sphérique :* ce qui constitue une extension de la notion de ligne asymptotique.

8. La propriété, assez nouvelle dans sa structure, qu'exprime la relation (R) dans les conditions du contexte, est-elle caractéristique? La question semble minutieuse dans le cas général. Bornons-nous à examiner celui du conoïde $z = yf(x)$, d'où $p = yf'(x)$, $q = f(x)$. Nos courbes (A) sont alors les courbes $py =$ const. La propriété traduite par la relation (R) revient au fait qu'en cheminant sur les courbes (A) et en prenant les rapports $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, en univocisant l'un d'eux, on univocise l'autre, les limites obtenues étant opposées. Or, nous avons, pour toute suite évanescente de valeurs Δx, en s'astreignant sans plus à rester sur le conoïde, l'existence d'une

---

([5]) La restriction implicite d'après laquelle on a pris ζ fini est d'ailleurs sans influence si l'on suppose que ci-dessus, le plan $y\text{O}z$ peut être remplacé par un nouveau plan suffisamment peu incliné sur lui.

limite unique pour $\frac{\Delta q}{\Delta x}$, limite ayant pour valeur $\frac{p}{y}$. Supposons y et $f'(x)$ non nuls. Si une ligne du conoïde est telle que l'univocisation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entraîne celle de $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ avec des limites opposées, il s'ensuit la même propriété quand on remplace $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ par $\frac{y\,\Delta p}{p\,\Delta x}$. On a dès lors deux fonctions $\operatorname{Log} p$ et $\operatorname{Log} y$ de x telles qu'en univocisant le rapport incrémental de l'une, on univocisera celui de l'autre, les limites étant opposées. Tous les nombres dérivés de leur somme provenant des limites fixées d'univocisation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sont nuls. Mais l'intervention de valeurs limites infinies pour nos rapports, pris individuellement, ne permet pas d'en déduire, sans une analyse plus approfondie, la constance de py (6). *A fortiori*, la question analogue reste à résoudre dans le cas général.

(**Manuscrit reçu le 7 décembre 1945.**)

---

(6) On peut tenter, dans cette recherche, d'employer un lemme de LEBESGUE, fondamental en sa théorie de l'intégrale (cf. *Leçons sur l'intégration*, 2ᵉ éd., p. 77) et pouvant s'énoncer ainsi : quand, pour chaque valeur x telle que $a \leq x < b$, zéro est une des valeurs limites du rapport $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, où l'on prend Δx positif, la fonction φ reste constante sur (a, b). Or ici, on peut imposer aux Δx de la suite (σ) des valeurs positives. Supposons que sur (a, b), $f'(x)$ garde un signe constant, sa valeur absolue dépassant un nombre positif assigné. Extrayons de (a, b) les points où le diagramme de $f'(x)$ admet soit une tangente, soit une seule demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées : leur ensemble δ est un ensemble de mesure nulle. Soit γ le complémentaire de δ par rapport à (a, b). En chaque point de γ, on peut choisir la suite (σ) de manière qu'il existe pour $\frac{\Delta(\log y)}{\Delta x}$ une limite finie bien déterminée, et par suite, une limite opposée pour $\frac{\Delta(\log p)}{\Delta x}$. Donc, en posant $\varphi(x) = \log y + \log p$, on a en chaque point de γ une limite nulle pour $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ provenant de notre suite σ formée avec des Δx positifs. Mais nous ne savons pas si cette propriété qui permettrait l'application du lemme de Lebesgue subsiste pour δ, et cela nous met hors d'état de conclure.