BULLETIN DE LA S. M. F.

ELIE CARTAN

L’œuvre scientifique de M. Ernest Vessiot

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE DE M. ERNEST VESSIOT;

PAR M. ÉLIE CARTAN.

C'est la théorie des groupes continus, finis ou infinis, de Sophus Lie qui a suggéré la plupart des travaux de M. Vessiot et qui donne à son œuvre sa remarquable unité.

I.

Les problèmes d'intégration.

1. **La réductibilité des équations différentielles linéaires.** — La réductibilité des équations différentielles pose aux analytes les problèmes les plus vastes et les plus profonds. Dans le cas des équations linéaires, Émile Picard avait déjà étendu à leur solution la théorie fameuse qu'Evariste Galois avait appliquée aux équations algébriques par l'introduction du *groupe de Galois* ou *groupe de rationalité*. Approfondissant et complétant l'idée féconde de Picard, M. Vessiot a montré qu'on en pouvait déduire une théorie complète de la réductibilité des équations différentielles linéaires, en particulier les conditions pour qu'une telle équation s'intègre algébriquement ou par quadratures. Mais alors que tous les coefficients des équations étudiées par Émile Picard étaient des fonctions rationnelles de la variable indépendante, il n'en est plus de même pour les équations étudiées par M. Vessiot. Celui-ci commence par définir un *domaine de rationalité* Δ contenant toutes les constantes réelles ou complexes, toutes les fonctions rationnelles de la variable indépendante, tous les coefficients de l'équation donnée; de plus, ce domaine Δ satisfait à la condition de contenir en même temps que deux fonctions, leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient, et aussi leurs dérivées. M. Vessiot démontre alors l'existence d'un groupe G de substitutions linéaires à coefficients constants opérant sur un système de n solutions indépendantes de l'équation donnée (supposé d'ordre n), et jouissant de la propriété suivante :

Pour qu'une fonction rationnelle (c'est-à-dire à coefficients appartenant à Δ) de n solutions indépendantes de l'équation donnée soit égale à une fonction *de la variable indépendante qui appartient à* Δ, il faut et il suffit qu'elle soit invariante *par le groupe* G. Ce groupe G est le groupe de Galois ou le groupe de rationalité de l'équation.

C'est la structure de ce groupe qui détermine les opérations à effectuer pour intégrer l'équation, chacune d'elles ayant pour objet de réduire le groupe de rationalité à l'un de ses sous-groupes par l'adjonction au domaine de rationalité des intégrales d'équations auxiliaires, convenablement choisies. On en peut déduire que l'équation est intégrable par quadratures si le groupe de rationalité est intégrable, c'est-à-dire si, étant d'ordre r, il admet un sous-groupe invariant d'ordre $r-1$, celui-ci un sous-groupe invariant d'ordre $r-2$, et ainsi de suite. L'équation est intégrable algébriquement si le groupe de rationalité est discontinu. L'équation différentielle générale d'ordre $n > 1$ n'est pas intégrable par quadratures.

Les résultats exposés par M. Vessiot dans sa thèse (1892) sont devenus rapidement classiques et ont suscité de nombreux travaux français et étrangers.

Récemment M. Vessiot a étendu sa théorie à une classe importante d'équations différentielles linéaires dans le cas où le domaine de rationalité *ne contient pas toute les constantes*, malgré les difficultés qu'entraîne cette hypothèse pour la démonstration de l'existence du groupe de rationalité.

2. **Les systèmes de Lie et leur intégration.** — Les équations linéaires ne sont pas les seules à posséder des systèmes fondamentaux d'intégrales, c'est-à-dire à jouir de la propriété que leur intégrale générale s'exprime au moyen d'un certain nombre d'intégrales particulières et des constantes d'intégration par des formules indépendantes du choix de ces intégrales particulières. Il en est ainsi des équations auxiliaires introduites dans la théorie de M. Vessiot pour la réduction du groupe de rationalité.

M. Vessiot s'est beaucoup occupé de certains systèmes différentiels du premier ordre rencontrés par Sophus Lie et auxquels il a donné le nom de *systèmes de Lie*. A un système de Lie est associé un groupe fini et continu Γ opérant sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ du système de Lie. Si l'on connaît les équations finies du groupe Γ, supposé dépendre de r paramètres $a_1, a_2, \dots, a_r$, on obtient l'intégrale générale du système de Lie en appliquant à un point quelconque $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ la transformation continue du groupe Γ de paramètre $a_1(t)$, $a_2(t), \dots, a_r(t)$, où les $a_i(t)$ sont des fonctions arbitrairement données de la variable indépendante t. On voit immédiatement que si l'on applique à une intégrale particulière du système de Lie une transformation du groupe Γ de paramètres $c_1, c_2, \dots, c_r$, on aura encore une intégrale du même système de Lie obtenue en appliquant au point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ la transformation de Γ obtenue par la transformation de paramètres $a_i(t)$ suivie de la transformation de paramètres c_i.

M. Vessiot montre que deux systèmes de Lie dont les groupes associés sont isomorphes (de même structure), jouissent de la propriété que l'intégration de l'un entraîne celle de l'autre. Il en déduit qu'on peut toujours ramener l'intégration d'un système de Lie à celle de systèmes linéaires, complétées éventuellement par des quadratures. *On peut donc toujours appliquer la théorie de Galois à l'intégration de tout système de Lie.*

Au cours de ses recherches sur l'intégration des systèmes de Lie, M. Vessiot a été amené à traiter plusieurs problèmes de la théorie des groupes continus finis; c'est ainsi qu'il a consacré un mémoire à la détermination des équations finies d'un groupe continu fini dont on connaît les transformations infinitésimales; il y montre que pour les groupes transitifs, la recherche en question dépend uniquement d'éliminations, de quadratures et de l'intégration d'équations différentielles linéaires.

3. **Intégration des systèmes différentiels admettant des groupes de transformations continus.** — Les systèmes de Lie appartiennent à cette classe, tout système de Lie admettant le groupe qui lui est associé. Dans ce cas le groupe est fini et l'intégration ne met en œuvre que des quadratures et les transcendantes qui définissent les équations linéaires. Dans le cas général, S. Lie avait indiqué, *mais dans des cas particuliers,* une marche à suivre pour décomposer l'intégration recherchée en deux étapes successives : 1° intégration d'un système résolvant (R) qui n'admet aucun groupe de transformations; 2° intégration d'un système différentiel (A) dont toutes les solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les transformations d'un groupe donné (G). M. Vessiot reprit la décomposition du problème par une méthode nouvelle dont le succès tient à la possibilité d'obtenir pour les systèmes (A) des systèmes *automorphes*; on appelle ainsi un système dont les solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les transformations d'un groupe effectuées sur les seules variables dépendantes; ce groupe est dit *associé* au système, qui est encore, en un sens, à solutions fondamentales.

Au moyen d'une méthode nouvelle et complète permettant de former à partir des équations de définition d'un groupe quelconque (G) tous ses invariants différentiels et ses systèmes différentiels invariants, il obtient, sous une forme immédiate et précise, la réduction du système donné à un système résolvant (R) et à un système automorphe (A) admettant le groupe (G) pour groupe associé. C'est la structure de (G) qui régit son intégration. Lie avait montré que cette intégration, que le groupe (G) soit fini ou infini, se ramène à l'intégration successive de systèmes automorphes simples. M. Vessiot en avait d'abord conclu que l'intégration du système automorphe se ramenait à l'intégration de systèmes différentiels ordinaires et cela en admettant la seule existence des groupes infinis simples connus en 1902, époque où il rédigea son mémoire. Mais les travaux ultérieurs de M. Élie Cartan sur les groupes infinis simples montrèrent en 1907 l'existence de nouveaux groupes infinis simples *intransitifs*, ce qui entraînait la possibilité pour l'intégration des systèmes automorphes d'utiliser des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à une fonction inconnue unique de variables en nombre quelconque.

Toutes ces recherches, extrêmement importantes, étaient naturellement accompagnées de travaux relatifs à la structure des groupes infinis sur lesquels on n'avait alors que les résultats assez fragmentaires dus à S. Lie, F. Engel et Medolaghi. Chose curieuse, on n'était pas encore arrivé à une définition précise de l'isomorphisme de deux groupes infinis. C'est à M. Vessiot, en même temps qu'à M. Élie Cartan, qu'on doit la définition adoptée maintenant d'une manière universelle; elle repose sur la notion de *prolongement*.

On doit à M. Vessiot d'autres travaux sur la théorie de la similitude des groupes infinis et sur la recherche des sous-groupes d'un groupe infini, en particulier de ses sous-groupes invariants.

4. **Les systèmes de Lie généralisés.** — Ce sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires à une variable indépendante t, tels que les formules donnant les valeurs générales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des fonctions inconnues en fonction des valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, sont les équations d'une famille de transformations d'un groupe *infini* Γ, dit associé au système quand on y considère les x_i^0 comme les coordonnées d'un point, les x_i comme celles de son homologue et t comme un paramètre. La notion de systèmes *isomorphes* s'étend des systèmes de Lie à des systèmes plus généraux. On peut là encore ramener l'intégration à celles de systèmes types. Les *systèmes canoniques* de la Mécanique analytique constituent une classe particulière importante de systèmes de Lie généralisés.

5. **Le problème de la réductibilité des systèmes les plus généraux d'équations différentielles.** — La thèse de M. Vessiot élucidait la notion de réductibilité pour les systèmes d'équations différentielles linéaires en généralisant la théorie de Galois, et la méthode était susceptible de s'étendre à certains systèmes d'équations différentielles automorphes à chacun desquels est associé un groupe fini. En 1898 M. Jules Drach abordait un problème tout à fait nouveau en se proposant d'étendre la théorie de Galois à un système absolument arbitraire d'équations différentielles ordinaires, non automorphe en gédéral. Les vues de M. Drach étaient aussi originales que fécondes et d'une extrême importance, mais ses énoncés et ses démonstrations contenaient de graves lacunes et inexactitudes. M. Drach prenait comme inconnues du problème n intégrales premières indépendantes quelconques, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en supposant, ce qui est toujours possible, le système donné ramené à un système d'équations différentielles du premier ordre à n fonctions inconnues d'une variable indépendante. Les *solutions* ainsi comprises du problème se déduisent les unes des autres par les diverses transformations ponctuelles exécutées sur les intégrales premières $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on se donne un domaine de rationalité Δ déterminé, le passage d'une solution à une autre ne se faisait malheureusement pas en général par une transformation *rationnelle* (au sens que confère à ce terme la donnée du domaine de rationalité Δ), de sorte que l'existence du *groupe de rationalité* restait en suspens; il était nécessaire de reprendre la question. C'est ce que M. Vessiot réussit à faire en construisant avec une rigueur parfaite une théorie remarquable qui lui a valu en 1902 le Grand Prix des Sciences mathématiques. La Commission chargée d'étudier les mémoires présentés au concours concluait son appréciation du mémoire de M. Vessiot en affirmant qu'il constituait un ensemble cohérent et très complet, comblant entièrement les lacunes qui subsistaient dans l'importante question soulevée par M. Jules Drach.

Il serait cependant tout à fait injuste de méconnaître l'importance de l'œuvre de M. Drach, qui a fait des applications remarquables de sa théorie, ne serait-ce que la découverte des lignes de courbure de la surface des ondes, problème dont la solution avait jusqu'à lui échappé aux recherches des plus grands géomètres.

6. Le groupe de rationalité et le groupe spécifique. — Postérieurement à son mémoire de 1902, M. Vessiot apporta des idées nouvelles à sa théorie en introduisant à côté du *groupe de rationalité* ce qu'il appelle le groupe *spécifique*, ce qui rend presque intuitive la solution du problème posé par M. Drach. Il y a isomorphisme entre les deux groupes. Le groupe spécifique a ses équations de définitions rationnelles; il agit sur les variables du système différentiel donné; le groupe de rationalité donne la loi suivant laquelle le groupe spécifique échange entre elles les intégrales premières du système. Ces deux groupes définissent l'un et l'autre le mode de réductibilité du système (pour un domaine de rationalité donné). Ces deux groupes sont finis; l'intégration du système se ramène à celle d'équations linéaires, ou plus simplement à des quadratures si les deux groupes, isomorphes entre eux, sont intégrables.

Ne quittons pas ce sujet sans faire remarquer que M. Vessiot, par une évolution récente de ses idées, a pu donner tout récemment un fondement nouveau à la théorie même de Galois relative aux équations algébriques.

7. Les groupes de transformations fonctionnelles linéaires. — Aux équations intégrales de seconde espèce de Fredholm et de Volterra sont associés des groupes de transformations fonctionnelles linéaires. M. Vessiot a montré que les groupes relatifs aux équations intégrales de Fredholm peuvent admettre toutes les structures possibles de groupes finis, tandis que les groupes relatifs aux équations intégrales de Volterra sont tous abéliens; M. Vessiot démontre ce dernier résultat en prouvant que deux fonctions permutables à une troisième, au sens de Volterra, sont permutables entre elles, théorème que Volterra lui-même n'avait énoncé que comme probable. A ces groupes fonctionnels s'associent certaines classes d'équations intégro-différentielles qui leur correspondent comme les systèmes de Lie correspondent aux groupes de transformations ponctuelles.

8. La théorie de l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales. — C'est une théorie nouvelle de problèmes d'intégration qui s'apparente à la théorie des systèmes de Pfaff de M. Élie Cartan, les deux théories étant liées entre elles par une espèce de dualité; aux systèmes de Pfaff en involution de M. Cartan correspondent les faisceaux involutifs de M. Vessiot. De la structure des faisceaux en involution dépend l'existence des caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles et leur classification. Une application tout à fait remarquable qu'on doit à M. Vessiot est relative aux équations aux dérivées partielles du second ordre $F=(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ intégrables par la méthode de Darboux. Il a découvert ce fait fondamental que le problème de la recherche de ces équations est entièrement dominé par la théorie des groupes continus de transformations. Chaque cas d'intégrabilité est fourni par un tel groupe et M. Vessiot a donné pour ces cas une méthode régulière d'intégration.

9. **L'œuvre géométrique de M. Vessiot.** — On doit à M. Vessiot des travaux portant sur différents domaines de la Géométrie. En géométrie algébrique, il a donné deux solutions entièrement nouvelles du problème de la réduction des singularités algébriques; l'une d'elles a été utilisée par Émile Picard pour la réduction des singularités des surfaces algébriques. Dans le domaine de la géométrie euclidienne, on lui doit la théorie des invariants des courbes minima fondée sur la notion du *pseudo-arc*, et il a montré comment on pouvait établir complètement la théorie des surfaces par la seule considération de leurs lignes de longueur nulle. Il a consacré plusieurs mémoires à la géométrie conforme ou anallagmatique (propriétés élémentaires des figures formées par des sphères et des circonférences, invariants différentiels des courbes, des surfaces, des courbes tracées sur une surface donnée, etc.).

On doit à M. Vessiot un traité de *Géométrie supérieure* qui a eu plusieurs éditions successives et qui a trouvé un grand succès, grâce aux qualités de précision et de clarté qui marquent toutes ses œuvres.

II.

La propagation par ondes. Mécanique céleste. Mécanique analytique. Relativité générale.

La théorie des groupes n'est pas absente de cette seconde partie de la Notice consacrée à l'œuvre de M. Vessiot. Tandis que la première partie est dans l'ensemble consacrée à des problèmes d'Analyse, cette seconde partie est dans l'ensemble consacrée à la Mécanique.

10. **La propagation par ondes.** — M. Vessiot a consacré plusieurs Mémoires à la propagation par ondes. Il admet que cette propagation obéit au principe des ondes enveloppes d'Huygens. Le mode de propagation est alors entièrement déterminé si l'on connaît la surface d'onde qui a pour origine chaque point du milieu. La propagation se réalise de proche en proche par une *transformation de contact* continue. Tout point du milieu décrit dans la propagation une ligne qui n'est autre que le rayon de la propagation; le principe de Fermat est valable et il est une conséquence automatique du principe d'Huygens. L'équation générale des surfaces d'onde écrite en coordonnées tangentielles peut être interprétée comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre (E) dans laquelle le temps est la fonction inconnue. Chaque solution de cette équation donne le mouvement d'une onde; les caractéristiques de cette solution sont les rayons de la propagation. Ces conclusions s'appliquent aux ondes de *discontinuité* qui se produisent dans un milieu élastique ou dans un champ électromagnétique; elles obéissent aussi au principe d'Huygens et au principe de Fermat.

11. **La Mécanique analytique et les ondes.** — Le mouvement d'un système matériel dépendant d'un nombre fini de paramètres et dont la force vive ne dépend pas du temps, sous l'action de forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps, est régi par le principe de moindre action. Or, M. Vessiot avait démontré que tout problème de minimum d'une intégrale définie simple correspond à une propagation par ondes. Il en résulte que tout mouvement d'un système matériel, dans les conditions qui viennent d'être précisées, est assimilable à un mouvement ondulatoire; il y a identité entre les trajectoires de l'un et les rayons de l'autre. Ce résultat remarquable, énoncé par M. Vessiot en 1906, devait plus tard avoir un grand intérêt par la création de la Mécanique ondulatoire de M. Louis de Broglie. Ce qui correspond au *temps* du mouvement ondulatoire est l'*action* du mouvement dynamique.

12. **Les équations canoniques et les séries de la Mécanique céleste.** — Nous avons déjà fait remarquer (n° 4) qu'un système d'équations canoniques réalise un système de Lie généralisé. M. Vessiot utilise cette propriété pour la formation des séries classiques de la théorie des perturbations en Mécanique céleste. En premier lieu il montre que la fonction perturbatrice étant développée suivant les puissances entières d'un paramètre μ lié à la masse perturbatrice, on peut, par de simples différentiations de fonctions connues par des quadratures, calculer les éléments des orbites développés suivant les puissances de μ; cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter des changements de variables successifs; elle met en évidence immédiatement les propriétés classiques telles que l'invariabilité des grands axes. En second lieu une méthode analogue conduit à une solution formelle du problème des n corps par des séries trigonométriques.

Ces travaux de M. Vessiot en Mécanique céleste sont de nature à se prêter à d'importants développements.

13. **La Cinématique des milieux continus.** — On doit à Sophus Lie l'utilisation d'une transformation infinitésimale à trois variables pour représenter le mouvement d'un fluide dans l'espace à trois dimensions, M. Vessiot en fait un usage systématique pour simplifier la Cinématique des milieux continus. Il a étendu au cas d'un point qui se déplace dans un fluide en mouvement le théorème de la composition des vitesses; le théorème de la composition des accélérations subsiste, en adjoignant à l'accélération de Coriolis une deuxième accélération complémentaire qui fait intervenir la déformation subie par la portion infinitésimale du fluide qui entoure le point en mouvement. Tous ces théorèmes interviennent dans la question délicate que M. Vessiot a également étudiée de la propagation d'un mouvement fluide dans un autre (théorèmes de Hugoniot et de M. Hadamard). Enfin M. Vessiot, en utilisant avec S. Lie la représentation du mouvement continu d'un fluide par une transformation infinitésimale portant sur les coordonnées d'espace et de temps, a mis en évidence l'origine cinématique des théorèmes fondamentaux de l'Hydrodynamique.

14. **La Relativité générale.** — M. Vessiot a fait une étude très personnelle de la Relativité générale; il a montré la possibilité d'en interpréter les principes sans

abandonner les notions usuelles d'espace et de temps. On sait qu'Einstein a introduit un espace riemannien à quatre dimensions avec un ds^2 forme quadratique des différentielles de quatre variables x_i décomposable en quatre carrés, trois positifs et un négatif, de quatre formes linéaires indépendantes en dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Tout point matériel isolé et soumis à la seule action de la gravitation décrit une géodésique; les rayons lumineux sont les géodésiques de rayon nul; la propagation de la lumière se fait par ondes ellipsoïdales suivant le principe d'Huygens. Si l'on regarde les lois de la propagation de la lumière comme connues, les lois de la gravitation seront connues par la donnée supplémentaire de la racine carrée $\sqrt{-g}$ du discriminant de la forme quadratique ds^2. Si l'on suppose l'existence d'un champ électromagnétique, les lois de propagation de la lumière, du champ de gravitation et du champ électromagnétique sont les mêmes; la théorie électromagnétique de la lumière est conservée. Ajoutons que M. Vessiot a fait de très intéressantes recherches sur la géométrie des espaces riemanniens en appliquant sa théorie des faisceaux de transformations infinitésimales, qui lui permet d'envisager facilement la notion de parallélisme de Levi-Civita.

15. **Balistique.** — On doit à M. Vessiot un très important résultat sur une question de Balistique où il a montré une rare pénétration. Il s'agissait de déterminer une formule correcte pour la résistance de l'air au mouvement d'un projectile de révolution, ogival, ayant son centre de gravité sur l'axe, de calibre a et de masse m. La formule adoptée au début de la guerre de 1914 pour les corrections journalières du tir des canons avait montré un désaccord avec l'expérience pour les températures très basses et très élevées. M. Vessiot remarqua que la cause était due à ce qu'on ne tenait pas compte dans la formule de la densité de l'air, ce qui était contraire au principe d'homogénéité dans les dimensions. Il proposa une formule $F = \frac{mv^2}{a}\Phi\left(\frac{a^3\rho}{m}\right)$, où ρ est la masse spécifique du milieu résistant. Si la pression p de l'air intervenait, on aurait $F = mcv^2\Phi\left(\frac{cv^2}{p}\right)$, avec $c = ia^2\frac{\rho}{m}$, où i dépend de la forme du projectile. Suivant les hypothèses faites sur la loi et compressibilité de l'air, on peut obtenir différentes formules dont l'une, proposée par M. Darrieus, a été étudiée théoriquement par Paul Langevin. M. Vessiot a appliqué avec succès des méthodes analogues pour déterminer les coefficients de correction du tir des canons (portée et dérive).

Comme on le voit par cette trop courte analyse, l'œuvre de M. Vessiot est considérable. Les qualités qui la distinguent particulièrement sont la clarté et une élégance rare alliées à un souci constant de la généralité des méthodes. M. Vessiot est un des mathématiciens vivants qui ont pénétré le plus profondément la notion de groupe, ses conséquences et sa complexité et qui ont su tirer partie de la manière la plus pénétrante de toute l'œuvre de son maître Sophus Lie, et cela même dans les domaines où S. Lie n'avait pu qu'ébaucher ses recherches. Cela lui a permis de jeter des lumières nouvelles sur les parties des Mathématiques qui semblaient n'avoir qu'un rapport lointain avec la notion de groupe.

ÉLIE CARTAN.