

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. ANGLADE

**Sur les surfaces dont la suite de Laplace adjointe se termine suivant les cas de Laplace et de Goursat**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 75 (1947), p. 43-48

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1947\\_\\_75\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__43_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR LES SURFACES DONT LA SUITE DE LAPLACE ADJOINTE SE TERMINE  
SUIVANT LES CAS DE LAPLACE ET DE GOURSAT;**

PAR M. E. ANGLADE.

---

Dans l'espace projectif ordinaire  $E_3$ , désignons par  $M$  le point de coordonnées curvilignes  $u, v$  pris sur une surface  $S$  rapportée à ses asymptotiques. On sait <sup>(1)</sup> qu'on peut associer à cette surface une suite de Laplace

$$(\mathcal{L}) \quad \dots, U_3, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3, \dots$$

que je suppose écrite dans le sens des  $u$  et dont les divers points sont contenus dans un espace linéaire à cinq dimensions  $E_5$ .  $U$  désigne le point ayant pour coordonnées homogènes les six coordonnées radiales de la tangente en  $M$  à l'asymptotique sur laquelle le paramètre  $u$  varie seul. De même, le point  $V$  est l'image de la tangente en  $M$  à la seconde asymptotique.

Pour une surface quelconque, la suite  $\mathcal{L}$  est illimitée dans les deux sens. M. Godeaux a examiné le cas où elle présente en  $U$  le cas de Laplace. La surface  $S$  est alors réglée <sup>(2)</sup> et, *en général*,  $(\mathcal{L})$  se termine en  $V_2$  suivant le cas de Goursat. J'ai moi-même étudié les surfaces réglées en m'attachant surtout aux propriétés de leurs tangentes flecnodales <sup>(3)</sup>.

Plus récemment <sup>(4)</sup>, j'ai donné diverses propriétés des surfaces dont la suite  $(\mathcal{L})$  présente en  $U$  le cas de Laplace. C'est ce qui se produit lorsque les lignes  $v = \text{const.}$  appartiennent à des complexes linéaires.

Dans ce nouveau Mémoire, je suppose la suite  $(\mathcal{L})$  terminée en  $U_n$  selon le cas de Laplace. *En général*, elle présente en  $V_{n+2}$  le cas de Goursat. Les particularités qui peuvent se produire <sup>(5)</sup> et que M. Godeaux indique dans l'ouvrage déjà cité <sup>(1)</sup> feront l'objet d'une publication ultérieure.

Voici, brièvement énoncés, les principaux résultats obtenus. Il suffira de poser  $n = 1$  pour qu'ils s'appliquent aux surfaces dont les asymptotiques  $v = \text{const.}$  appartiennent à des complexes linéaires :

Sur la surface  $(U_{n-1})$  décrite par le point  $U_{n-1}$  de  $E_5$ , on peut distinguer les

---

<sup>(1)</sup> L. GODEAUX, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Hermann, 1934.

<sup>(2)</sup> L. GODEAUX, *Remarques sur les surfaces réglées* (*Revista Hispano-Americana*, 1931).

<sup>(3)</sup> *Sur les surfaces flecnodales d'une surface réglée* (*Bull. Acad. Royale de Belgique*, n° 4, 1936; *Sur certaines suites de Laplace associées à une surface réglée* (*Bull. Acad. Royale de Belgique*, n° 1, 1937).

<sup>(4)</sup> *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. LXX, 1946.

<sup>(5)</sup> La suite  $(\mathcal{L})$  peut se terminer en  $V_{n+2}$  suivant le cas mixte ou en l'un des points  $V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, V_{n-2}$  suivant le cas de Laplace.

familles de courbes  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  L'hyperplan osculateur à une ligne du premier système engendre un faisceau linéaire lorsque son point de contact parcourt une ligne  $v = \text{const.}$  Il passe par une variété à trois dimensions fixe, image d'une congruence linéaire de directrices  $g, g'$  contenue dans l'espace  $E_3$ . Par ce procédé, à chaque asymptotique  $v = \text{const.}$  de  $S$  on associe deux droites  $g, g'$  conjuguées par rapport au complexe de seconde image  $V_{n+2}$ .

Lorsque  $v$  varie, les droites  $g, g'$  décrivent les nappes focales  $(g), (g')$  d'une congruence  $W_g$ . Les congruences linéaires osculatrices à ces surfaces le long de  $g$  et de  $g'$  appartiennent au complexe  $U_n$ . D'autre part, chaque point  $N$  de  $(g)$  a pour plan polaire, par rapport au complexe  $V_{n+2}$  correspondant, le plan tangent à  $(g')$  au point  $N'$  associé à  $N$  par la congruence  $W_g$ .

La congruence linéaire caractéristique du complexe  $U_n$  admet pour directrices deux droites  $f, f'$  tangentes aux surfaces  $(g), (g')$ . Lorsque le paramètre  $v$  varie, ces deux droites décrivent les nappes focales  $(f), (f')$  d'une congruence  $W_f$ . Par rapport au complexe  $U_n$ , le plan polaire de tout point de  $(f)$  est tangent à  $(f')$ . Les deux droites  $g$  et  $g'$  sont elles-mêmes tangentes aux surfaces  $(f)$  et  $(f')$ .

1. **Propriétés de la suite  $(\mathcal{L})$ .** — On sait que la suite  $(\mathcal{L})$  est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique  $Q$  (1) qui représente l'espace réglé  $E_3$  dans l'espace  $F_5$ . Les points  $U_p$  et  $V_p$  admettent respectivement pour hyperplans polaires

$$V_{p-2}V_{p-1}V_pV_{p+1}V_{p+2} \quad \text{et} \quad U_{p-2}U_{p-1}U_pU_{p+1}U_{p+2}.$$

Nous supposons désormais que la suite  $(\mathcal{L})$  se termine en  $U_n$  selon le cas de Laplace. Les relations d'autopolarité subsistent (2), mais aux points  $U_{n+1}, U_{n+2}, \dots$  il faut alors substituer les points  $\frac{dU_n}{dv}, \frac{d^2U_n}{dv^2}, \dots$ . Par exemple, l'hyperplan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3} \frac{d^4U_n}{dv^4}$  a pour pôle le point  $V_{n+2}$ .

Nous envisageons ici le cas le plus général : l'hyperplan osculateur à la courbe  $(U_n)$ , lieu du point  $U_n$ , varie avec  $v$ . Son pôle  $V_{n+2}$  ne dépend que de  $v$ . La suite  $(\mathcal{L})$  se termine donc en  $V_{n+2}$  selon le cas de Goursat.

On retiendra que la droite  $V_{n+2}V_{n+1}$  reste tangente à la courbe  $(V_{n+2})$  décrite par le point  $V_{n+2}$ .

2. **Les deux complexes fondamentaux.** — Les propriétés que nous établissons mettent en jeu les complexes linéaires en involution de secondes images respectives  $U_n$  et  $V_{n+2}$ .

Nous avons déjà dit que le point  $V_{n+2}$  est le pôle, par rapport à l'hyperquadrique  $Q$ , de l'hyperplan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3} \frac{d^4U_n}{dv^4}$  osculateur à la courbe  $(U_n)$ . On voit immédiatement que  $U_n$  est le pôle de l'hyperplan  $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$

(1) L. GODEAUX, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bull. Acad. Royale de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41).

(2) L. GODEAUX, *Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à des suites de Laplace terminées* (Bull. Acad. Royale de Belgique, 1931, pp. 730-739).

osculateur à la courbe  $(V_{n+2})$ . Les deux courbes  $(U_n)$  et  $(V_{n+2})$  sont donc corrélatives par rapport à Q. Il suffit que l'une d'elles soit connue pour que l'autre soit déterminée.

La congruence linéaire caractéristique du complexe  $V_{n+2}$  admet pour directrices les droites  $g$  et  $g'$  dont les images G, G' sont les intersections de Q et de la droite  $V_{n+2}V_{n+1}$ .

De même, la droite  $U_n \frac{dU_n}{dv}$  coupe l'hyperquadrique Q en deux points F, F', images des directrices  $f, f'$  de la congruence linéaire caractéristique du complexe  $U_n$ .

Ainsi, à toute asymptotique  $v = \text{const.}$  de S on peut associer les droites  $g, g', f, f'$  qui ne dépendent que de  $v$  et qui décrivent les surfaces  $(g), (g'), (f), (f')$  lorsque  $v$  varie.

**3. Propriétés des droites  $g$  et  $g'$ .** — Nous avons déjà dit que la droite GG' passe par  $V_{n+2}$ . Les points G, G' se correspondent dans l'homologie harmonique de centre  $V_{n+2}$  et d'hyperplan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3}$ . Les droites  $g, g'$  sont donc conjuguées par rapport au complexe  $V_{n+2}$ .

Considérons le point  $U_{n-1}$  de  $E_3$ . Il décrit une surface  $(U_{n-1})$  que nous rapportons aux lignes  $u, v$ . La ligne  $u = \text{const.}$  qui passe par  $U_{n-1}$  admet en ce point l'hyperplan osculateur  $U_{n-1}U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3}$  dont  $V_{n+1}$  est le pôle par rapport à Q. Lorsque  $u$  varie seul, le point  $V_{n+1}$  reste sur la droite  $V_{n+1}V_{n+2}$  tangente en  $V_{n+2}$  à la courbe  $(V_{n+2})$ . Ceci prouve que les hyperplans osculateurs aux courbes  $u = \text{const.}$  de la surface  $(U_{n-1})$  menés le long d'une courbe  $v = \text{const.}$  appartiennent à un faisceau linéaire. Ils ont en commun la variété à trois dimensions image de la congruence linéaire de directrice  $g$  et  $g'$ .

La congruence linéaire osculatrice à la surface  $(g)$  le long de la génératrice  $g$  a pour image la section de Q par la variété linéaire  $G \frac{dG}{dv} \frac{d^2G}{dv^2} \frac{d^3G}{dv^3}$ . Puisque le point G appartient à la droite  $V_{n+1}V_{n+2}$ , l'hyperplan  $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$  de pôle  $U_n$  contient cette variété. La congruence linéaire osculatrice à l'une des surfaces  $(g)$  fait donc partie du complexe  $U_n$  qui correspond à la génératrice de contact.

**4. Congruence de nappes focales  $(g)$  et  $(g')$ .** — Dans l'espace  $E_3$ , les plans  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2}$  et  $V_{n+2}V_{n+1}V_n$  sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Ils déterminent sur Q deux coniques images de deux demi-quadriques complémentaires Y et Z de l'espace  $E_3$ . Chaque droite de Y coupe toutes les droites de Z.

Les droites  $g, g'$  et les droites infiniment voisines des surfaces  $(g), (g')$  appartiennent à Z. En effet, les images G, G' sont prises sur  $V_{n+2}V_{n+1}$  et les images infiniment voisines appartiennent au plan  $V_{n+2}V_{n+1}V_n$  tangent à la développable engendrée par la droite  $V_{n+2}V_{n+1}$ .

Ainsi, chaque droite de Y coupe  $g, g'$  et les génératrices infiniment voisines. Elle est donc tangente aux surfaces  $(g), (g')$  et fait partie de la congruence de nappes focales  $(g), (g')$ . On observera que toute droite de Y tangente à  $(g)$  le long de l'asymptotique  $g$  est aussi tangente à  $(g')$  le long de l'asymptotique  $g'$ . Cela revient à dire que  $(g)$  et  $(g')$  sont les nappes focales d'une congruence W que nous désignerons désormais par  $W_g$ .

Nous supposons les surfaces  $(g), (g')$  rapportées aux asymptotiques  $u', v$ .  $u'$  désigne le paramètre qui varie seul sur chaque génératrice. Nous attribuerons les mêmes coordonnées curvilignes aux foyers N, N' de tout rayon de la congruence  $W_g$ . En se donnant l'un de ces points, on détermine la valeur de  $v$ . Par suite, on précise les complexes  $U_n$  et  $V_{n+2}$  qu'il faut lui associer.

5. Suites de Laplace relatives aux surfaces  $(g)$  et  $(g')$ . — Nous avons déjà dit que la suite de Laplace  $(\mathcal{L})$ , relative à une surface réglée, se termine en U selon le cas de Laplace et en  $V_2$  selon le cas de Goursat. Pour éviter toute confusion, nous désignerons par

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}) & \quad G, H, H_1, H_2, \\ (\mathcal{G}') & \quad G', H', H'_1, H'_2, \end{aligned}$$

les suites attachées aux surfaces  $(g)$  et  $(g')$ . Elles sont supposées écrites dans le sens des  $u'$ . La droite  $H_1 H_2$  reste tangente à la courbe décrite par  $H_2$  et ne dépend que de  $v$ .  $H'_1 H'_2$  possède une propriété analogue.

Les points G, G' appartiennent à la droite  $V_{n+2} V_{n+1}$ . Il en résulte que l'hyperplan  $V_{n+2} V_{n+1} V_n V_{n-1} V_{n-2}$  contient les variétés linéaires

$$G \frac{dG}{dv} \frac{d^2 G}{dv^2} \frac{d^3 G}{dv^3} \quad \text{et} \quad G' \frac{dG'}{dv} \frac{d^2 G'}{dv^2} \frac{d^3 G'}{dv^3}.$$

Les droites  $H_1 H_2, H'_1 H'_2$ , conjuguées de ces variétés par rapport à Q, passent par le pôle  $U_n$  de l'hyperplan.

6. Suite de Laplace associée à la congruence  $W_g$ . — Représentons par  $j$  une droite de la congruence  $W_g$  qui touche les nappes focales en des points N, N' de coordonnées curvilignes  $u', v$ . Les droites GH et G'H' de  $E_5$  représentent les faisceaux tangents à  $(g)$  et à  $(g')$  en ces deux points. Puisque  $j$  fait partie des deux faisceaux, on voit que son image J est l'intersection de GH et de G'H'.

Un théorème de Darboux (1) montre que le point J décrit un réseau. Il appartient donc à une suite de Laplace

$$(\mathcal{J}) \quad J_{-1} J J_1 J_2,$$

écrite dans le sens des  $u'$  et inscrite dans les suites  $(\mathcal{G})$  et  $(\mathcal{G}')$ .

La suite  $(\mathcal{J})$  se termine en  $J_{-1}$  selon le cas de Laplace et en  $J_2$  selon le cas de Goursat. En effet,  $J_{-1}$  est commun aux deux droites  $G \frac{dG}{dv}$  et  $G' \frac{dG'}{dv}$  qui ne

(1) G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 2, 1915, p. 358.

dépendent que de  $v$ ; il ne dépend lui-même que de ce paramètre. On fera une démonstration analogue pour le point  $J_2$  qui appartient aux deux droites  $H_1 H_2$ ,  $H' H'_2$ . D'ailleurs, ce point et  $U_n$  sont confondus (n° 5).

**7. Propriétés des plans tangents aux surfaces  $(g)$  et  $(g')$ .** — Les hyperplans  $\frac{d^2 G}{dv^2} \frac{dG}{dv} GH H_1$ ,  $\frac{d^2 G'}{dv^2} \frac{dG'}{dv} G' H' H'_1$  contiennent la variété  $J_1 J_2 J_{-1} \frac{d\lambda_{-1}}{dv}$ . Puisque les points  $J_2$  et  $U_n$  sont confondus, l'hyperplan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2 U_n}{dv^2} \frac{d^3 U_n}{dv^3} \frac{d^4 U_n}{dv^4}$  passe par la même variété. Cela prouve que les pôles  $H, H', V_{n+2}$  de ces trois hyperplans sont alignés.

L'homologie harmonique déterminée par le centre  $V_{n+2}$  et son hyperplan polaire par rapport à  $Q$  transforme  $G$  en  $G'$  et  $H$  en  $H'$ ; elle transforme donc la droite  $GH$  en  $G'H'$ . Par suite :

*En deux points  $N, N'$  associés par la congruence  $W_g$ , les tangentes aux surfaces  $(g), (g')$  sont deux à deux conjuguées par rapport au complexe  $V_{n+2}$  correspondant. Par rapport à ce même complexe, le plan polaire du point  $N$  de la surface  $(g)$  est tangent à la surface  $(g')$  au point  $N'$ .*

**8. Propriétés des directrices  $f, f'$  de la congruence linéaire caractéristique du complexe  $U_n$ .** — Les directrices  $f, f'$  de la congruence linéaire caractéristique du complexe  $U_n$  ont leurs images  $F, F'$  sur la droite  $U_n \frac{dU_n}{dv}$ ; elles sont conjuguées par rapport à ce complexe.

Les variétés linéaires à trois dimensions  $F \frac{dF}{dv} \frac{d^2 F}{dv^2} \frac{d^3 F}{dv^3}$ ,  $F' \frac{dF'}{dv} \frac{d^2 F'}{dv^2} \frac{d^3 F'}{dv^3}$ , contenues dans l'hyperplan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2 U_n}{dv^2} \frac{d^3 U_n}{dv^3} \frac{d^4 U_n}{dv^4}$  de pôle  $V_{n+2}$ , représentent les congruences linéaires osculatrices aux surfaces  $(f), (f')$ . Ces congruences appartiennent au complexe  $V_{n+2}$  relatif aux génératrices de contact.

Les points  $F, F'$  et les points infiniment voisins appartiennent au plan  $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2 U_n}{dv^2}$ . Par suite, les droites  $f, f'$  et les génératrices infiniment voisines des surfaces  $(f), (f')$  font partie de la demi-quadrique  $Y$  (n° 4) c'est-à-dire de la congruence  $W_g$ . Ainsi :

*Les surfaces  $(f)$  et  $(f')$  appartiennent à la congruence  $W_g$  de nappes focales  $(g)$  et  $(g')$ .*

Chaque génératrice de la demi-quadrique  $Z$  coupe toutes celles de  $Y$ . En particulier, elle coupe  $f, f'$  et les deux droites infiniment voisines sur  $(f)$  et  $(f')$ . Cela revient à dire que les droites de  $Z$  sont tangentes aux surfaces  $(f)$  et  $(f')$ .

Une démonstration entièrement analogue à celle du paragraphe 4 prouve ensuite que les surfaces  $(f)$  et  $(f')$  sont les nappes focales d'une congruence  $W_f$  décrite par la demi-quadrique  $Z$  et que nous désignons par  $W_f$ .

Nous savons déjà que  $Z$  contient les droites  $g, g'$  (n° 4). Les surfaces  $(g), (g')$  appartiennent donc à la congruence  $W_f$ .

9. **Propriétés des plans tangents aux surfaces  $(f)$  et  $(f')$ .** — Rapportons les surfaces réglées  $(f)$ ,  $(f')$  aux asymptotiques  $u''$ ,  $v$  (le paramètre  $u''$  varie seul sur chaque génératrice) et attribuons les mêmes coordonnées curvilignes aux foyers P et P' de tout rayon de la congruence  $W_f$ . Comme nous l'avons fait pour  $(g)$  et  $(g')$ , il est possible d'adjoindre aux surfaces  $(f)$ ,  $(f')$  les suites de Laplace

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{F}) & F, I, I_1, I_2, \\ (\mathcal{F}') & F', I', I'_1, I'_2, \end{array}$$

écrites dans le sens des  $u''$ .

On montrera, en suivant une marche entièrement analogue à celle des paragraphes 5, 6 et 7 que les droites  $I_1 I_2, I'_1 I'_2$  se coupent en  $V_{n+2}$  et que les suites  $(\mathcal{F}), (\mathcal{F}')$  sont circonscrites à une même suite liée à la congruence  $W_f$ . Il résulte de cela que la droite  $W$  passe par le point  $U_n$ . Les tangentes en P et P' aux asymptotiques curvilignes des surfaces réglées  $(f)$  et  $(f')$  sont donc conjuguées par rapport au complexe  $U_n$  correspondant. Nous avons déjà dit (n° 8) que les génératrices issues de P et P' étaient également conjuguées par rapport au même complexe. Ainsi, chaque point P de  $(f)$  a pour plan polaire, par rapport au complexe  $U_n$  correspondant, le plan tangent à la surface  $(f')$  au point P' que la congruence  $W_f$  associe à P.

(Manuscrit reçu le 3 juin 1946.)