BULLETIN DE LA S. M. F.

D. VAN DANTZIG

Divisibilité topologique d'un ensemble compact par un arc simple

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 49-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__49_0>

DIVISIBILITÉ TOPOLOGIQUE D'UN ENSEMBLE COMPACT PAR UN ARC SIMPLE;

PAR M. D. VAN DANTZIG.

1. Soit E un ensemble (espace) topologique compact et séparable qui est divisé d'une manière doublement continue en un ensemble (qui aussi est compact et séparable) Ω d'arcs simples. Donc à chaque point $x \in E$ correspond un et seulement un élément $\omega = \varphi x \in \Omega$, tel que l'ensemble $f\omega$ de tous les $x \in E$ avec $\varphi x = \omega$ est un arc simple (image topologique d'un segment de ligne droite) et que la relation $x_\nu \to x (x_\nu \in E, x \in E)$ $\left(\text{c'est-à-dire } \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x\right)$ entraîne la relation $\varphi x_\nu \to \varphi x$, et que la relation $\omega_\nu \to \omega (\omega_\nu \in \Omega, \omega \in \Omega)$ pour chaque $x \in f\omega$ entraîne : 1° $\lim\sup x_\nu \subset f\omega$ pour $x_\nu \in f\omega_\nu$ et 2° pour chaque ν l'existence d'un $x_\nu \in f\omega_\nu$, tel que $x_\nu \to x$. Afin d'abréger l'écriture nous omettrons des relations comme $x \in E$ et $\omega \in E$, en admettant que les lettres latines dénotent des éléments et des sous-ensembles de E, et les lettres grecques des éléments et des sous-ensembles de Ω.

Nous nous proposons de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que E soit *le produit topologique de Ω et d'un arc simple*. Il est aisé de trouver une condition nécessaire, à savoir la condition :

A. *Il est possible d'orienter simultanément et d'une manière continue tous les arcs $f\omega$.*

Cela veut dire, la relation $x \leq y$ exprimant par définition que $\varphi x = \varphi y$ et que la direction sur $\omega' = \varphi x$ de x vers y détermine l'orientation *positive* de ω, que $x_\nu \leq y_\nu$, $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$ implique $x \leq y$.

Le but de cette note est de démontrer le

THÉORÈME. — *Pour que* E *soit le produit topologique d'Ω et d'un arc simple, la condition* A *est nécessaire et suffisante.*

2. **Remarque historique.** — Le théorème mentionné ci-dessus, qui peut être considéré comme un premier exemple d'une condition pour divisibilité topologique, fut trouvé en 1926 ou au début de 1927, d'abord sous la forme suivante à peu près équivalente : soit E un ensemble compact (ou localement compact) et séparable, et soit a un de ses points. Supposons que chaque point $x \neq a$ d'un voisinage compact de E appartienne à un arc simple, ayant a pour extrémité et tel que deux de ces arcs n'aient d'autre point commun que a; supposons que ces arcs dépendent d'une manière continue des points par lesquels ils passent et qu'il n'existe pas d'arcs arbitrairement petits. Alors la condition A est nécessaire et suffisante, pour qu'il existe un système de voisinage de a tels que la frontière de

chaque voisinage du système ait un point et un seul en commun avec chaque arc, et que chaque $x \neq a$ d'un voisinage de a appartienne à la frontière d'un et seulement un voisinage du système.

Ce théorème devait servir à donner un fondement topologique à la géométrie différentielle. Dans le même ordre d'idées je fus amené aux questions d'homogénéité topologique que j'ai traitées dans mon article, fait avec B. L. van der Waerden, *Ueber metrisch homogene Räume* (*Abh. Hamburg*, 6, 1928), dans mon article *Ueber topologisch homogene Kontinua*, qui date aussi de 1927 mais ne fut publié qu'en 1930 dans les *Fund. Math.*, **14**, et dans ma thèse *Studiën over topologische Algebra* (Amsterdam 1931), dont les trois premiers chapitres furent publiés plus tard dans les *Math. Ann.*, **107**, 1932, et dans la *Compositio Math.*, **2**, 1935 et **3**, 1936, et qui menait à son tour à l'article sur les *Nombres universels ou* ν!*-adiques* des *Annales de l'École Normale*, **53**, 1937.

Or, la démonstration originale du théorème énoncé ci-dessus contenait quelques inexactitudes, et la critique assez sévère [1] d'un mathématicien de grande autorité me découragea et je doutai de l'exactitude de ce théorème. Récemment [2] seulement, après avoir repris la question après 16 années, j'ai trouvé que les lacunes étaient insignifiantes, et que les quatre lemmes sur lesquels la démonstration originale reposait étaient complètement corrects. M. Freudenthal, à qui j'avais communiqué le théorème principal, de même que les quatre lemmes, trouva, en faisant usage de méthodes plus modernes, une démonstration beaucoup plus simple et très élégante, qui sera publiée dans ce Bulletin. Néanmoins, quoiqu'on doive juger cet article d'après son époque, et considérer que la plupart des belles publications de MM. Hopf, Hurewicz, Freudenthal, Borsuk, Eilenberg et tant d'autres qui utilisent les images univoques et continues des ensembles ne datent que de plusieurs années plus tard, il me semble que la démonstration originale (où seulement la démonstration du lemme 4 fut simplifiée), offre encore quelque intérêt et mérite bien d'être publiée même aujourd'hui.

3. *Remarque.* — a_ω et b_ω étant le point initial et le point final d'un arc arbitraire ω, on a $a_{\omega_\nu} \to a_\omega$ et $b_{\omega_\nu} \to b_\omega$ lorsque $\omega_\nu \to \omega$ (cette propriété peut d'ailleurs remplacer la continuité supérieure). Les ensembles A et B de tous les a_ω et b_ω sont évidemment homéomorphes avec Ω.

Supposons donnée une métrisation arbitraire de l'ensemble E.

Définition. — Un ensemble *ε-cellulaire* est un ensemble ouvert C de diamètre $\leqq \varepsilon$, tel que l'intersection de $\overline{C}$ avec chaque arc est connexe (ou vide). Lorsque cette intersection est un arc simple [2a] ou vide, l'ensemble sera appelé une *ε-cellule*. L'intersection de deux ensembles cellulaires elle-même est cellulaire (l'intersection de deux cellules n'est pas nécessairement une cellule). C étant cellulaire, les ensembles C^- (et C^+) de tous les points situés sur leurs arcs, avant (et après) chaque élément de $\overline{C}.\varphi C$ sont aussi cellulaires. On a $\varphi C^- + \varphi C^+ \subset \varphi C$,

---

(1) En 1927.
(2) 1943.
(2a) (Ouvert).

$\varphi C^{+-} = \varphi C^-$ et $\varphi C^{-+} = \varphi C^-$. Lorsque C est cellulaire et $\overline{\Phi} \subset \varphi C$ (Φ ouvert), $C.f\Phi$ est une cellule.

LEMME I. — *Il existe des cellules arbitrairement petites contenant un point arbitraire x.*

Démonstration. — Soient V un voisinage arbitraire de x, V′ un voisinage de x tel que $\overline{V'} \subset V$ et dont la frontière coupe $\omega = \varphi x$ exactement en deux points (ou *un* point lorsque $x = a_\omega$ ou $x = b_\omega$), V″ un voisinage de x tel que $\overline{V''} \subset V'$. Alors, Φ étant un voisinage suffisamment petit de ω, il n'existe pour chaque $\omega' \in \Phi$ qu'une seule composante de $V'.f\omega'$ ayant une intersection non vide avec V″. L'intersection C de l'ensemble de ces composantes avec $f\Phi'$, où $\Phi' \subset \overline{\Phi'} \subset \Phi$ [3] est un voisinage suffisamment petit de ω, satisfait aux conditions imposées. On peut d'ailleurs supposer que C coïncide avec l'intérieur de sa fermeture. Dans ce cas pour chaque ω' non seulement $f\omega'.\overline{C}$, mais aussi $f\omega'.C$ lui-même est connexe (ou vide).

4. **Définition.** — Un ε-*prisme* est un ensemble fini de ε-cellules $C_1, \ldots, C_r$, n'ayant deux à deux aucun point commun, et tel que chaque arc coupant un quelconque des C_i les coupe tous, et tous dans le même ordre (par exemple $f\omega.C_i < f\omega.C_j$ pour $i < j$), et est contenu dans la somme des *fermetures* des C_i. Un tel arc sera dit *recouvert* par le prisme.

LEMME 2. — *Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini d'ε-prismes, dont la somme recouvre* E. (Nous dirons brièvement : un *recouvrement ε-prismatique* de E).

Démonstration. — Pour chaque $\omega \in \Omega$ il existe un système S fini d'ensembles ε-cellulaires dont la somme recouvre $f\omega$. On peut d'ailleurs choisir ces ensembles de manière que l'intersection de la frontière d'un quelconque d'entre eux avec $f\omega$ ne consiste qu'en un ou deux points, et que tous ces points soient différents. Joints à a_ω et b_ω ils divisent $f\omega$ en un nombre fini d'intervalles $i_1, \ldots, i_r$ qui peuvent être numérotés en sorte que $i_j < i_k$ pour $i < k$. Soit C_j l'intersection de *tous* les ensembles cellulaires C, C^+ et C^- tels que $C \in S$ et que C contienne un point de i_j, donc i_j; soit $\Gamma = \prod_{1 \leq j \leq r} \varphi C_j$; soit Γ' un voisinage de ω tel que $\overline{\Gamma'} \subset \Gamma$; soit $C'_j = C_j.f\Gamma'$. Alors les C'_j constituent un ε-prisme, recouvrant ω. On aura $\varphi C'_j = \Gamma'$ pour chaque j et $C'_i.f\omega' < C'_j.f\omega'$ pour chaque $\omega' \in \Gamma'$ et $i < j$.

Puisque chaque arc peut être recouvert par un ε-prisme, et puisque l'ensemble Ω des arcs est compact, un nombre fini de ε-prismes suffit à recouvrir E.

5. **Définitions.** — Un ensemble *caractéristique* est un ensemble fermé, ayant exactement un point commun avec chaque arc. Un ensemble F sera dit *presque caractéristique* lorsque son complément consiste en deux cellules F^- et F^+

---

[3] La transition de Φ à Φ' (et dans le lemme suivant de Γ à Γ') sert à passer des ensembles cellulaires aux cellules.

contenant respectivement les ensembles A et B des points initiaux et finaux, et telles que $\overline{F^-}.\overline{F^+}=0$. Un ensemble est dit ε-*caractéristique* lorsqu'il est presque caractéristique, et que son intersection avec chaque arc a un diamètre $\leqq \varepsilon$.

LEMME 3. — *Chaque ensemble presque caractéristique contient un ensemble caractéristique.* Ce lemme est une conséquence immédiate du

LEMME 3'. — *Chaque ensemble presque caractéristique contient pour chaque* $\varepsilon > 0$ *un ensemble* ε-*caractéristique.*

Car, F_0 étant presque caractéristique, et $\varepsilon_n > 0$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe à cause du lemme 3' pour chaque n un ensemble ε_n-caractéristique (donc presque caractéristique, donc fermé) F_n, tel que $F_{n+1} \subset F_n$. Donc l'intersection F de tous les F_n est fermée et a avec chaque arc une intersection non vide, de diamètre $\leqq \varepsilon_n$ pour chaque n; cette intersection est donc un point.

Démonstration du lemme 3'. — Soit F_0 l'ensemble presque caractéristique donné et soient $C_{\rho i}$ $(1 \leqq \rho \leqq m,\ 1 \leqq i \leqq r_\rho)$ les cellules d'un recouvrement $\frac{1}{2}\varepsilon$-prismatique de E, telles que $\Gamma_\rho = \varphi C_{\rho i}$ est indépendant de i, et que $C_{\rho i} < C_{\rho j}$ pour $i < j$. La construction de l'ensemble ε-caractéristique $F = F_m$ sera effectuée en m phases, telles que la $\rho^{\text{ième}}$ phase comprend seulement des opérations dans $f\overline{\Gamma}_\rho$.

Supposons l'ensemble presque caractéristique F_σ déjà construit pour $\sigma \leqq \rho - 1$, supposons $F_{\sigma+1} \subset F_\sigma$, et soit $\Upsilon_\rho = \sum\limits_{\sigma \leqq \rho} \Gamma_\sigma$ $\left(\text{donc } \Omega - \overline{\Upsilon}_\rho \subset \Gamma_\rho\right)$. Posons

$$P_{\rho i} = \overline{C_{\rho i}\,F^-_{\rho-1}}, \qquad D_{\rho i} = \overline{C_{\rho i}\,F^+_{\rho-1}}.$$

Ces ensembles sont fermés et satisfont aux relations

$$\varphi P_{\rho i} \subset \varphi P_{\rho, i+1}, \qquad \varphi D_{\rho i} \subset \varphi D_{\rho, i+1};$$
$$\varphi P_{\rho, i} \cdot \varphi D_{\rho, j} = 0 \qquad \text{pour} \quad i > j.$$

Posons

$$\Pi_{\rho 1} = \Pi_{\rho 2} = \Omega, \qquad \Delta_{\rho, r_\rho - 1} = \Delta_{\rho, r_\rho} = \Omega.$$

Il existe alors pour chaque $j \leqq r_\rho$ des sous-ensembles ouverts $\Pi_{\rho j}$ et Δ_{ρ_j} de Ω, tels que pour $2 \leqq j \leqq r_\rho - 1$

$$\Pi_{\rho, j+1} \supset \varphi P_{\rho, j+1},$$
$$\Delta_{\rho, j-1} \supset \varphi D_{\rho j} + \Omega - \Pi_{\rho j};$$
$$\overline{\Pi_{\rho, j+1}}\ \overline{\Delta_{\rho, j-1}} = 0.$$

Ces ensembles satisfont aux relations

$$\overline{\Pi}_{\rho i} \subset \Pi_{\rho, i-1} \qquad \overline{\Delta}_{\rho i} \subset \Delta_{\rho, i+1},$$
$$\overline{\Pi}_{\rho, i+1}\ \overline{\Delta}_{\rho, i-1} = 0,$$
$$\Delta_{\rho i} + \Pi_{\rho i+1} = \Omega.$$

Posons enfin

$$F_\rho = F_{\rho-1}\left(\sum_i \overline{C_{\rho i} f \Pi_{\rho i}}\right)\left(\sum_j \overline{C_{\rho j} f \Delta_{\rho j}}\right),$$

donc

$$\overline{F_\rho^-} = \overline{F_{\rho-1}^-} + \sum_i \overline{C_{\rho i}} f(\Omega - \Delta_{\rho i}),$$

$$\overline{F_\rho^+} = \overline{F_{\rho-1}^+} + \sum_i \overline{C_{\rho i}} f(\Omega - \Pi_{\rho i}).$$

Un élément arbitraire $\omega \in \Omega$ est alors contenu pour un certain j dans $\overline{\Pi_{\rho 1}}$, $\overline{\Pi_{\rho 2}}, \ldots, \overline{\Pi_{\rho j}}, \Omega - \Pi_{\rho, j+1}, \ldots, \Omega - \Pi_{\rho, r_\rho}$. Donc aussi dans $\Omega - \Delta_{\rho 1}, \ldots, \Omega - \Delta_{\rho, j-2}$, $\overline{\Delta_{\rho, j}}, \ldots, \overline{\Delta_{\rho, r_\rho}}$, tandis qu'il peut appartenir ou non à $\overline{\Delta_{\rho, j-1}}$. On peut supposer $\omega \in \Omega - \overline{\Pi_{\rho, j+1}}$. L'intersection de $f\omega$ avec F_ρ pour $\omega \in \overline{\Gamma_\rho}$ est donc contenue, ou bien dans $\overline{C_{\rho j}}$ ou bien dans $\overline{C_{\rho, j-1}} + \overline{C_{\rho j}}$, donc son diamètre est $\leqq \varepsilon$. On vérifie d'ailleurs aisément que F_ρ aussi est presque caractéristique puisque

$$\overline{F_{\rho-1}^-}\, \overline{C_{\rho i}} f(\Omega - \Pi_{\rho i}) = 0, \qquad \overline{F_{\rho-1}^+}\, \overline{C_{\rho i}} f(\Omega - \Delta_{\rho i}) = 0,$$

$$\overline{C_{\rho i}}\, \overline{C_{\rho j}} = 0 \quad \text{pour } |i - j| \geqq 2 \qquad \text{et} \qquad (\Omega - \Delta_{\rho i})(\Omega - \Pi_{\rho i}) = 0 \quad \text{pour } j \leqq i + 1,$$

Il s'ensuit que $F = F_m$ est ε-caractéristique, ce qui prouve le théorème.

Remarque. — On peut toujours obtenir que F soit situé *à l'intérieur* de F_0. En effet, à cause de $\overline{F_0^-}\, \overline{F_0^+} = 0$, il existe deux ensembles ouverts V et W, tels que $\overline{F_0^-} \subset V$, $\overline{F_0^+} \subset W$ et $\overline{V}\, \overline{W} = 0$. En définissant V^- comme l'ensemble de *tous* les points situés devant un point de $E - V$ et W^+ comme l'ensemble de tous les points situés après un point de $E - W$ on peut affirmer que $E - V^- - W^+$ est un ensemble presque caractéristique, situé à l'intérieur de F_0, et qui par conséquent contient un ensemble caractéristique.

6. Lemme 4. — *Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini d'ensembles caractéristiques divisant chaque arc en segments de diamètres $\leqq \varepsilon$.*

Démonstration. — Soient $C_{\rho i}$ ($1 \leqq \rho \leqq m$, $a \leqq i \leqq r_\rho$) les cellules d'un recouvrement $\frac{1}{2}\varepsilon$-prismatique de E. En construisant un ensemble caractéristique à l'intérieur de l'ensemble presque caractéristique $\overline{C_{\rho i}} + (E - f\Gamma_\rho)$ on peut diviser $C_{\rho i}$ en deux cellules, consistant respectivement en les points de $C_{\rho i}$ situés devant et derrière cet ensemble caractéristique. On peut ainsi obtenir que tous les r_ρ deviennent égaux : $r_\rho = r$.

Posons $F_0 = E$, $A_0 = A$ (c'est-à-dire l'ensemble des points initiaux) et supposons l'ensemble caractéristique A_{k-1} déjà construit *à l'intérieur* de l'ensemble presque caractéristique F_{k-1}. Soient A_{k-1}^- et A_{k-1}^+ l'ensemble des points situés devant et derrière A_{k-1}. Posons pour $1 \leqq k \leqq r$

$$F_k = \overline{A_{k-1}^+} \sum_1^m {}_\rho \sum_k^r {}_i\, C_{\rho i} \sum_1^m {}_\sigma \sum_0^r {}_j \left\{ \overline{C_{\sigma j}} \sum_{j-1}^r {}_h\, f \varphi(A_{k-1} \overline{C_{\sigma h}}) \right\}.$$

Alors l'ensemble F_k est presque caractéristique. La principale difficulté est de démontrer que $\overline{F_k^-}\,\overline{F_k^+} = o$. Or, en définissant $P_{\rho k}$ et $D_{\rho k}$ (4) comme l'intérieur de $\sum_0^k C_{\rho i}$ et de $\sum_k^r C_{\rho i}$, on a

$$F_k = \overline{A_{k-1}^+}\,\Sigma\rho\,\overline{D_{\rho k}}\,\Sigma\sigma\sum_0^r h\,\overline{P_{\sigma,h+1}f\varphi(A_{k-1}\overline{C_{\sigma h}})};$$

$$F_k^- = A_{k-1}^- + (E - \Sigma\rho\,\overline{D_{\rho k}});$$

$$F_k^+ = A_{k-1}^+\left\{E - \Sigma\sigma\sum_0^r h\,\overline{P_{\sigma,h+1}f\varphi(A_{k-1}\overline{C_{\sigma h}})}\right\}.$$

Donc pour un $x \in \overline{F_k^+}$ arbitraire il existe des $x_\nu \to x$, $x_\nu \in F_k^+$, donc $x_\nu \in A_{k-1}^+$, donc $x_\nu > b_\nu$, où $b_\nu = A_{k-1}f\varphi x_\nu$. A_{k-1} étant fermé on a $b_\nu \to b = A_{k-1}f\varphi x$. Or, par induction, $A_{k-1} \subset F_{k-1} \subset \sum\rho\sum_{k-1}^r i\,\overline{C_{\rho i}}$. On peut se borner au cas où pour un certain ρ et h $b_\nu \in \overline{C_{\rho,h-1}}$, $h \geqq k$. Donc $x_\nu \in f\varphi(A_{k-1}\overline{C_{\rho,h-1}})$. Donc à cause de $x_\nu \in E - \Sigma\rho\Sigma h\,f\varphi(A_{k-1}\overline{C_{\sigma,h-1}})\,\overline{P_h}$ il vient $x_\nu \in E - \overline{P_{\rho h}}$, donc $x_\nu \in D_{\rho,h+1}$ et $x \in \overline{D_{\rho,h+1}}$. Or, on a $\overline{D_{\rho,h+1}}\,\overline{C_{\rho,h+1}} = o$, donc, puisque $b \in \overline{C_{\rho,h-1}}$, $x \neq b$, donc $x \notin \overline{A_{k-1}^-}$. D'ailleurs $\overline{D_{\rho,h+1}}\,\overline{\overline{E - \Sigma\rho\,\overline{D_{\rho k}}}} \subset \overline{D_{\rho,k+1}}\,\overline{E - \overline{D_{\rho k}}} \subset \overline{D_{\rho,k+1}}\,\overline{P_{\rho,k-1}} = o$. Par conséquent $x \notin \overline{A_{k-1}^-}$ et $x \notin \overline{E - \Sigma\rho\,\overline{D_{\rho k}}}$, donc $x \notin \overline{F_k^-}$.

L'induction fournit donc des ensembles caractéristiques $A_0 = A$, $A_1, \ldots, A_r$, $A_{r+1} = B$. Or, ω étant un arc arbitraire, et h_σ étant choisi (pour un σ assujetti à la seule condition $\omega \in \overline{\Gamma_\sigma}$) tel que ou bien $b = A_{k-1}f\omega \in C_{\sigma,h_\sigma-1}$, ou bien $b \in \overline{C_{\sigma,h_\sigma-1}}\,\overline{C_{\sigma h_\sigma}}$, on a $F_k f\omega \subset \overline{D_{\sigma,h_\sigma-1}}$ puisque $x \geqq b$ quel que soit $x \in F_k f\omega$. D'ailleurs $F_k f\omega \subset f\omega\,\Sigma\sigma\,\overline{P_{\sigma,h_\sigma}f\varphi(A_{k-1}\overline{C_{\sigma,h_\sigma-1}})} \subset \Sigma\sigma\,\overline{P_{\sigma,h_\sigma}}$. Donc

$$F_k f\omega \subset \Sigma\sigma\,\overline{P_{\sigma,h_\sigma}}\,\overline{D_{\sigma,h_\sigma-1}} = \Sigma\sigma(\overline{C_{\sigma,h_\sigma-1}} + \overline{C_{\sigma,h_\sigma}}).$$

Le diamètre de $F_k f\omega$ est donc $\leqq 2\cdot\frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$. Le diamètre du segment intercepté sur $f\omega$ entre A_k et A_{k+1} est par conséquent $\leqq 2\cdot\frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Pour $k = r$ il est même $\leqq \frac{1}{4}\varepsilon$.

7. Démonstration du théorème principal. — Soit ε_n une suite de nombres positifs tels que $\varepsilon_n \to o$. Supposons déjà construits les ensembles $A_{k_1,\ldots,k_f}$, n'ayant deux à deux aucun point commun, pour $o \leqq k_i \leqq r_i$, $i \leqq f \leqq n$. Posons

$$A_{k_1,\ldots,k_f 0} = A_{k_1,\ldots,k_f},$$

de sorte qu'on peut supposer $f = n$. Posons $A_{0,\ldots,0} = A$, $A_{r_1+1,0,\ldots,0} = B$, et soit $A_{j_1,\ldots,j_n} < A_{k_1,\ldots,k_n}$ pour $j_1 = k_1, \ldots, j_i = k_i$, $j_{i+1} < k_{i+1}$. En appliquant le lemme 4

(4) Ces ensembles diffèrent des $P_{\rho i}$ et $D_{\rho i}$ du n° 5.

à la partie de E comprise entre deux de ces ensembles consécutifs, on peut y intercaler un nombre fini ($r_{n+1} \geqq 1$) (qu'on peut supposer, en l'augmentant en cas de nécessité, indépendant des n premiers indices) d'ensembles caractéristiques $A_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}}$ ($1 \leqq j_{n+1} \leqq r_{n+1}$), tels que le segment délimité par deux de ces ensembles ait un diamètre $\leqq \varepsilon_n$ quand ces deux ensembles sont consécutifs. En faisant correspondre l'ensemble $A_{k_1,\ldots,k_n}$ au nombre rationnel

$$x_{k_1\ldots k_n} = \frac{k_1}{r_1+1} + \frac{k_2}{(r_1+1)(r_2+1)} + \ldots + \frac{k_n}{(r_1+1)\ldots(r_n+1)},$$

et en étendant d'une manière bien connue cette correspondance aux nombres réels quelconques, on obtient une correspondance biunivoque et bicontinue entre les nombres réels et un système d'ensembles caractéristiques sans points communs dont la somme est E; on réalise ainsi l'homéomorphie annoncée entre E et le produit topologique de Ω et d'un arc simple.

(Manuscrit reçu le 5 août 1946.)