

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN ACZEL

Sur les opérations définies pour nombres réels

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 59-64

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__59_0

© Bulletin de la S. M. F., 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES OPÉRATIONS DÉFINIES POUR NOMBRES RÉELS;

PAR M. JEAN ACZÉL.

Une fonction de deux variables sera appelée « opération définie dans l'intervalle (a, b) » et nous la désignons par $z = x \circ y$, si pour chaque x et y de l'intervalle (a, b) la valeur $z = x \circ y$ est comprise dans cet intervalle (a, b) . Nous démontrerons le théorème suivant ⁽¹⁾ :

THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une fonction $f(z)$ croissante au sens restreint, continue, définie dans l'intervalle (a, b) et permettant de mettre $x \circ y$ sous la forme $[f^{-1}(x) désignant la fonction inverse de $f(z)$]$*

$$(1) \quad x \circ y = f^{-1}[f(x) + f(y)],$$

il faut et il suffit que l'opération $x \circ y$ satisfasse aux trois conditions suivantes :

I. *Monotonité (au sens restreint) : $x \circ y < x' \circ y$ pour $x < x'$ (et de même pour $y < y'$);*

II. *Continuité : $\lim(x \circ y) = \lim x \circ \lim y$;*

III. *Associativité : $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z$.*

Comme l'expression dans le deuxième membre de l'égalité (1) est symétrique par rapport à x et y , nous pouvons tirer de notre théorème le corollaire suivant : *chaque opération monotone, continue et associative est aussi commutative.* En vertu de III, l'opération peut être étendue pour un nombre arbitraire de variables et nous tirons de la formule (1) que, dans ce cas,

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = f^{-1}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

L'intervalle (a, b) peut être ouvert ou semi-ouvert (il peut même s'étendre jusqu'à l'infini, dans ce cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Nous verrons cependant qu'un intervalle fermé est en contradiction avec nos suppositions.

Démonstration. — Évidemment les conditions sont nécessaires, car les opérations de forme (1) satisfont à I-III. Nous démontrerons qu'elles suffisent en

⁽¹⁾ Pour des cas spéciaux de ce théorème, voir TH. MOTZKIN, *Sur le produit des espaces métriques* (C. R. du Congrès d'Oslo, 1936, p. 137); J. ACZÉL, *On mean values and operations defined for two variables* (D. Kong. Norske Vid. Selsk. Forh., 20, 1947, p. 37-40); J. ACZÉL, *On mean values* (Bull. Am. Math. Soc., 54, 1948, p. 392-400). Le cas où les nombres de l'intervalle (a, b) forment un groupe sous l'opération \circ a été traité par E. CARTAN, *Groupes finis et continus et l'analysis situs* (Mém. Sci. Math., 42).

construisant la fonction $f(x)$, ou plutôt son inverse $f^{-1}(x) = \varphi(x)$. Il faudra démontrer que cette fonction est continue, croissante au sens restreint et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \circ \varphi(v),$$

qu'on obtient à partir de (1) en posant $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$.

1. Définissons les fonctions $F_n(x) = x \circ x \circ \dots \circ x$ (n facteurs, $n = 1, 2, 3, \dots$). La fonction $F_n(x)$ est continue, croissante, et ses valeurs sont comprises dans l'intervalle (a, b) . De plus, les deux règles suivantes sont valables (en écrivant $gh(x)$ pour $g[h(x)]$) :

$$F_m(x) \circ F_n(x) = F_{m+n}(x) = F_n(x) \circ F_m(x), \\ F_m F_n(x) = F_{mn}(x) = F_n F_m(x).$$

Posons $F_{\frac{p}{q}}(x) = F_q^{-1} F_p(x)$ si cette définition a un sens [c'est-à-dire si la valeur $F_p(x)$ est comprise dans le domaine des valeurs de $F_q(x)$]. Les règles précédentes sont valables pour chaque μ et ν rationnel de cette sorte. Car si nous posons $\mu = \frac{p}{q}$, $\nu = \frac{r}{s}$ on a

$$F_{qs} F_{\mu} F_{\nu}(x) = F_{qs} F_{\frac{p}{q}} F_{\frac{r}{s}}(x) = F_s F_q F_q^{-1} F_p F_s^{-1} F_r(x) \\ = F_p F_r(x) = F_{pr}(x) = F_{qs} F_{\frac{pr}{qs}}(x) = F_{qs} F_{\frac{pr}{qs}}(x),$$

et si l'on tient compte de la condition I,

$$(3) \quad F_{\mu} F_{\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) = F_{\nu} F_{\mu}(x) \quad (1).$$

D'autre part, si nous posons $\mu = \frac{m}{q}$, $\nu = \frac{n}{q}$ (2),

$$F_{\mu}(x) \circ F_{\nu}(x) = F_m F_q^{-1}(x) \circ F_n F_q^{-1}(x) = F_{m+n} F_q^{-1}(x) = F_{\mu+\nu}(x). \\ (4) \quad F_{\mu}(x) \circ F_{\nu}(x) = F_{\mu+\nu}(x) = F_{\nu}(x) \circ F_{\mu}(x).$$

2. Considérons $F_2(x) = x \circ x$. Il y a trois cas possibles : $x \circ x > x$, $x \circ x = x$ ou $x \circ x < x$. Si $x \circ x = x$, alors il résulte de I et III que pour chaque y

$$x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y = x \circ y,$$

(1) On voit aisément que si $r = s$, on a

$$F_{\frac{pr}{q}}(x) = F_{\frac{p}{q}}(x).$$

(2) On utilise la formule $F_{\frac{p}{q}}(x) = F_p F_q^{-1}(x)$, qui est valable lorsque $F_q^{-1}(x)$ a un sens. On a en effet

$$F_{\frac{p}{q}}(x) = F_q^{-1} F_p(x) = F_q^{-1} F_p F_q F_q^{-1}(x) = F_q^{-1} F_p F_q F_q^{-1}(x) = F_p F_q^{-1}(x).$$

Pour le cas où $F_q^{-1}(x)$ n'a pas de sens (c'est-à-dire lorsque x n'est plus comprise dans le domaine des valeurs de $F_q(x)$) voir (3).

c'est-à-dire $x \circ y = y$ et de même $y \circ x = y$. De même si $x \circ x > x$ (ou $< x$) alors pour tout $y : x \circ y > y$ (ou $< y$). D'autre part on voit de la même façon que si l'on a pour un $y : x \circ y > y$, ou $= y$, ou $< y$, la même relation a lieu pour chaque y .

3. Il existe au plus un nombre e tel que $e \circ y = y$ (ou $y \circ e = y$). Supposons qu'il y en ait deux : $e < e'$. Dans ce cas $e \circ y = y = e' \circ y$, ce qui est en contradiction avec I. Évidemment $F_m(e) = F_n(e)$. Supposons maintenant ⁽¹⁾ qu'il existe un nombre A tel que $A \circ A > A$. Évidemment $F_m(A) > F_n(A)$ pour $m > n$. Si l'intervalle de définition est ouvert inférieurement, il faut distinguer deux possibilités :

a. $\lim_{x \rightarrow a} x \circ y \geq y (> a)$. Pour deux nombres $s < t$ arbitraires $\lim_{x \rightarrow a} s \circ x < \lim_{x \rightarrow a} t \circ x$.

Car en appliquant II et III, on a, en effet,

$$[\lim_{x \rightarrow a} (s \circ x)] \circ y = \lim_{x \rightarrow a} (s \circ x \circ y) = s \circ \lim_{x \rightarrow a} (x \circ y) < t \circ \lim_{x \rightarrow a} (x \circ y) = \lim_{x \rightarrow a} (t \circ x \circ y) = [\lim_{x \rightarrow a} (t \circ x)] \circ y$$

et avec l'aide de I, on obtient l'inégalité exigée. Ainsi la définition de l'opération peut être étendue à a en posant

$$a \circ y = \lim_{x \rightarrow a} (x \circ y) \quad \text{et} \quad y \circ a = \lim_{x \rightarrow a} (y \circ x),$$

car les conditions I, II, III continuent à être valables. Dans ce qui suit, nous traiterons ce cas comme si l'intervalle donné (a, b) était fermé inférieurement *a priori*.

b. $\lim_{x \rightarrow a} x \circ y < y$. Dans ce cas $\lim_{x \rightarrow a} x \circ s = a$, d'où $\lim_{x \rightarrow a} (x \circ y) = a$ pour tout y .

Car, dans le cas contraire, $t = \lim_{x \rightarrow a} x \circ y > a$, et

$$t > \lim_{x \rightarrow a} x \circ t = \lim_{x \rightarrow a} (x \circ \lim_{s \rightarrow a} s \circ y) = \lim_{x \rightarrow a} (x \circ s \circ y) = \lim_{x \rightarrow a} (x \circ s) \circ y = \lim_{z \rightarrow a} z \circ y = t.$$

ce qui est absurde. D'après notre supposition, il existe un $A < A \circ A$, et puisque $A > a = \lim_{x \rightarrow a} x \circ A$, il existe un nombre e ($a < e < A$) tel que $e \circ A = A$. Nous avons vu qu'il ne peut exister qu'un seul tel nombre et que $e \circ y = y$ pour tout y . De plus, en vertu de $e > a = \lim_{x \rightarrow a} x \circ A$ et $e < A = e \circ A$, il existe un α tel que $e = \alpha \circ A$ ($a < \alpha < e$). Pour un y arbitraire $\alpha \circ y < y$ et $F_m(\alpha) < F_n(\alpha)$ pour $m > n$.

4. Nous pouvons maintenant commencer à définir la fonction $\varphi(x)$. Nous posons $\varphi(1) = A$ avec la restriction que dans le cas d'un intervalle fermé inférieu-

(1) Nous verrons que cette supposition entraîne une discussion complète des cas où l'intervalle de définition est ouvert ou fermé inférieurement. Si nous avons supposé l'existence d'un $\alpha > \alpha \circ \alpha$ nous aurions pu traiter d'une manière analogue les intervalles ouverts ou fermés supérieurement.

remment et $a \circ a > a$ nous choisissons $A = a$. Ensuite nous posons

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(A) = F_q^{-1} F_p(A),$$

ce qui a sûrement un sens si $p \geq q$, car

$$F_q(A) \leq F_p(A) \leq F_{kq}(A) = F_q F_k(A) \quad (kq \geq p).$$

Nous voyons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(A)$ existe (finie ou $+\infty$), car la suite est croissante, mais la valeur $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(A)$ ne peut pas appartenir à l'intervalle (a, b) , qui n'est donc pas fermé supérieurement. En effet si t était compris dans (a, b) , on aurait

$$t < t \circ A = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(A) \circ A = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{n+1}(A) = t,$$

ce qui est absurde. S'il y a dans (a, b) des nombres plus petits que A (c'est-à-dire dans les cas $a \circ a = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} x \circ y \leq y$), alors il existe un nombre e tel que $e \circ e = e$ (dans le premier cas poser $e = a$, dans le deuxième voir 3 b). Nous définissons $\varphi(0) = e$ et ainsi $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(A) = F_q^{-1} F_p(A)$ est défini pour $p < q$, car $F_q(e) = F_p(e) < F_p(A) < F_q(A)$. Si $x \circ y$ est encore défini pour des nombres moindres que e , alors nécessairement $\lim x \circ y < y$ (cas 3 b) et en posant $\varphi(-1) = \alpha$ ($\alpha \circ A = e$) et $\varphi\left(-\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(\alpha) = F_q^{-1} F_p(\alpha)$, cette définition a toujours un sens. En outre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(-n) = a$. Nous avons

$$\varphi(-s) \circ \varphi(r) = F_s(\alpha) \circ F_r(A) = \begin{cases} e = \varphi(r-s) & \text{si } r = s, \\ F_{r-s}(A) = \varphi(r-s) & \text{si } r > s, \\ F_{s-r}(\alpha) = \varphi(r-s) & \text{si } r < s, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \varphi(s) \circ \varphi(r) = \varphi(s-r). \quad (1).$$

(1) Démontrons (4) pour $x = a$, c'est-à-dire

$$(4') \quad \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \quad (p > q, r > q)$$

dans le cas où $F_q^{-1}(x)$ n'est pas défini. Soit $s > q, u > q$, on a

$$\varphi\left(\frac{su}{q}\right) = F_q^{-1} F_{su}(a) = F_q^{-1} F_s F_u(a) = F_s F_q^{-1} F_u(a).$$

Par conséquent

$$\varphi(s) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right) = F_s(a) \circ F_q^{-1} F_s(a) = F_{q+1} F_q^{-1} F_s(a) = \varphi\left(\frac{(q+1)s}{q}\right) = \varphi\left(\frac{s(q+1)}{q}\right) = F_s F_q^{-1} F_{q+1}(a),$$

et de même

$$\varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(s) = F_s F_q^{-1} F_{q+1}(a).$$

5. Nous venons de définir $\varphi(x)$ pour toutes valeurs rationnelles, ou rationnelles positives, ou rationnelles > 1 . [On a $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$, ou $a = \varphi(0)$, ou $a = \varphi(1)$; $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$]. On voit aisément que pour ces valeurs $\varphi(x)$ est une fonction croissante, car $F_n(A)$ croît et $F_n(\alpha)$ diminue avec n . En vertu de (4) et (5), la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (2) pour u et v rationnels. Si nous démontrons que $\varphi(x)$ est une fonction continue, il en résulte que sa définition peut être étendue aussi aux valeurs irrationnelles, de telle façon que cette fonction satisfasse à (2) partout dans l'intervalle.

6. L'ensemble des nombres rationnels, pour lesquels $\varphi(x)$ va en croissant, étant partout dense dans l'intervalle où nous voulons définir $\varphi(x)$, elle a une valeur limite à droite et à gauche de chaque point de cet intervalle. Ces deux

En utilisant ces relations on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{p}\right) \circ \varphi(r) &= F_p F_q^{-1} F_{q+1}(a) \circ F_r F_q^{-1} F_{q+1}(a) \\ &= F_{p+r} F_q^{-1} F_{q+1}(a) = \varphi\left(\frac{p+r}{q}\right) \circ \varphi(p+r) = \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) \circ \varphi(r), \end{aligned}$$

et de même

$$\varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(r) = \varphi(p) \circ \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right).$$

En simplifiant, ce qui est légitime en vertu de la monotonité, les dernières relations donnent

$$(a) \quad \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) = \varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right),$$

$$(b) \quad \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right).$$

Posons dans (a) $p = s$, $r = nq$:

$$\varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) \circ \varphi(s) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(s) \circ \varphi(n) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n) \circ \varphi(s),$$

donc en simplifiant

$$(f) \quad \varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n).$$

Posons dans (b) $p = nq$, $r = \frac{s}{q}$:

$$\varphi(s) \circ \varphi\left(n + \frac{s}{q}\right) = \varphi(n) \circ \varphi(s) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right) = \varphi(s) \circ \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right);$$

donc en simplifiant

$$(g) \quad \varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) = \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right).$$

(f) et (g) impliquent

$$(e) \quad \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n) = \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right).$$

En vertu de (e), la relation (a) s'écrit

$$\varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p).$$

En simplifiant par $\varphi(p)$ on obtient (4').

valeurs doivent être égales. Car si $s = \varphi(x - 0) < \varphi(x + 0) = t$, alors de $s \circ s < s \circ t < t \circ t$, il résulterait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$(s \circ s) + \varepsilon < s \circ t < (t \circ t) - \varepsilon.$$

En vertu de la condition II, il existe un $\delta < 0$ tel que pour $|s - s'| < \delta$ et $|t - t'| < \delta$, $s \circ t - \varepsilon < s' \circ t' < s \circ t + \varepsilon$. Choisissons les valeurs s' et t' telles que $s' = \varphi(u)$, $t' = \varphi(v)$, où u et v sont des valeurs rationnelles et $\frac{u+v}{2} > x$. Dans ce cas

$$F_2 \left[\varphi \left(\frac{u+v}{2} \right) \right] = \varphi(u+v) = \varphi(u) \circ \varphi(v) = s' \circ t' < s \circ t + \varepsilon < t \circ t = F_2[\varphi(x+0)]$$

en contradiction avec le fait que $\varphi(x)$ est une fonction monotone. Ainsi nous avons démontré la continuité de $\varphi(x)$ et notre théorème est démontré.

(Manuscrit remis le 23 novembre 1947.)
