VICTOR THÉBAULT

Un chapitre de la géométrie récente du tétraèdre. Symédianes et second point de Lemoine

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 95-107
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__95_0>

UN CHAPITRE DE LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE DU TÉTRAÈDRE SYMÉDIANES ET SECOND-POINT DE LEMOINE;

PAR M. VICTOR THÉBAULT,

Tennie (Sarthe).

Dans un triangle ABC, les symédianes AK, BK, CK qui concourent au point de Lemoine K, constituent, à la fois, les lieux des points dont les distances aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés et ceux des points de rencontre des antiparallèles égales relativement aux côtés des angles B et C, C et A, A et B.

Dans un tétraèdre ABCD, les points dont les distances aux plans de trois faces sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux triangles de ces faces décrivent les droites AL, BL, CL, DL qui joignent les sommets au *second* point de Lemoine L (*premières* symédianes), tandis que les points de rencontre de trois sections antiparallèles égales obtenues en coupant les trièdres (A), (B), (C), (D) par des plans parallèles aux plans tangents à la sphère circonscrite aux sommets A, B, C, D décrivent les droites A'L, B'L, C'L, D'L qui unissent les sommets du tétraèdre tangentiel $T' \equiv A'B'C'D'$ au point L (*secondes* symédianes). En général, les symédianes AL et A'L sont portées par des droites *distinctes*, de même que les symédianes BL et B'L, CL et C'L, DL et D'L.

Notations. — Considérons un tétraèdre $T \equiv ABCD$ inscrit à une sphère (O, R), de centre O et de rayon R, dans lequel les lettres a, a', b, b', c, c' désignent les longueurs des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et les dièdres suivant ces arêtes, les lettres A, B, C, D et V les aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC et le volume, et les lettres R_i et h_i $(i = a, b, c, d)$, les rayons des cercles circonscrits aux triangles des faces et les hauteurs issues des sommets A, B, C, D.

A. — PREMIÈRES SYMÉDIANES.

1. THÉORÈME. — *Si l'on marque sur chacune des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un tétraèdre* T *les points* A_1, B_1, C_1, D_1 *dont les distances aux trois arêtes qui limitent ces faces soient inversement proportionnelles aux arêtes opposées, les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *concourent en un point* L *dont les distances aux plans des faces sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC, *et réciproquement* (*second* point de Lemoine).

En effet, les coordonnées normales du point D_1, dans le triangle ABC, étant proportionnelles à $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$, les coordonnées barycentriques de ce point sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$. De même les coordonnées barycentriques du point A_1, par rapport au triangle BCD, sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}, \frac{c'}{c}, \frac{b'}{b}$. On en conclut déjà que les droites AD_1 et DA_1 divisant l'arête BC dans le rapport $\frac{c}{c'} : \frac{b}{b'}$ sont situées dans un même plan, ce qui suffit à prouver que les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont concourantes.

Désignons maintenant par x, y, z, t des coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre T. Nous avons trouvé pour les points D_1 et A_1 respectivement,

$$x : y : z = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} : \frac{c}{c'} = ab'c' : bc'a' : ca'b',$$

$$y : z : t = \frac{c'}{c} : \frac{b'}{b} : \frac{a}{a'} = bc'a' : ca'b' : abc.$$

Il en résulte que les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 concourent en un point L pour lequel

$$x : y : z : t = ab'c' : bc'a' : ca'b' : abc, \tag{1}$$

de sorte que ses coordonnées barycentriques sont entre elles comme les produits des trois arêtes des faces correspondantes, ou comme les quantités

$$\frac{R_a}{h_a}, \quad \frac{R_b}{h_b}, \quad \frac{R_c}{h_c}, \quad \frac{R_d}{h_d}.$$

Réciproquement, si l'on désigne les coordonnées normales du point D_1 dans le triangle ABC par x_1, y_1, z_1, on a

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{x}{A \sin a} : \frac{y}{B \sin b} : \frac{z}{C \sin c},$$

c'est-à-dire

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'},$$

en tenant compte de ce que

$$\sin a = \frac{3aV}{2AD}, \qquad \sin b = \frac{3bV}{2BD}, \qquad \sin c = \frac{3cV}{2CD},$$

et ainsi de suite pour les points A_1, B_1, C_1.

N. B. — Les distances du point L aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC sont égales à

$$R_a \operatorname{tg}\theta, \quad R_b \operatorname{tg}\theta, \quad R_c \operatorname{tg}\theta, \quad R_d \operatorname{tg}\theta,$$

θ étant l'angle défini par la relation [1]

$$ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = 12V \cot\theta. \tag{2}$$

[1] V. THIÉBAULT, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1922, p. 175.

Corollaire. — *Dans un tétraèdre* T, *les symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *passent par les centres des cercles inscrits aux triangles* t_i *découpés dans les trièdres* (A), (B), (C), (D) *par des plans parallèles aux plans tangents à la sphère circonscrite en* A, B, C, D.

Si α, β, γ sont les sommets du triangle t_d sur les arêtes DA, DB, DC,

$$a'.D\alpha = b'.D\beta = c.C'\gamma = k_d; \tag{3}$$

d'où, en vertu des propriétés de l'inversion,

$$\frac{\beta\gamma}{aa'} = \frac{\gamma\alpha}{bb'} = \frac{\alpha\beta}{cc'} = \frac{k_d}{a'b'c'}. \tag{4}$$

Or, les droites AD_1, BD_1, CD_1 rencontrent les arêtes BC, CA, AB en des points A″, B″, C″ qui partagent ces arêtes dans les rapports

$$\frac{c}{c'} : \frac{b}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} : \frac{c}{c'}, \qquad \frac{b}{b'} : \frac{a}{a'}.$$

Donc les droites DA″, DB″, DC″ coupent les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ du triangle t_d aux points A‴, B‴, C‴ qui les divisent dans les rapports

$$\frac{A'''\beta}{A'''\gamma} = \frac{cc'}{bb'}, \qquad \frac{B'''\gamma}{B'''\alpha} = \frac{aa'}{cc'}, \qquad \frac{c'''\alpha}{c'''\beta} = \frac{bb'}{cc'},$$

et les droites $\alpha A'''$, $\beta B'''$, $\gamma C'''$ concourent au centre I_d du cercle inscrit (I_d) au triangle t_d sur la symédiane DD_1. Même conclusion pour les symédianes AA_1, BB_1, CC_1 et les triangles t_a, t_b, t_c.

2. Points associés du point L. — 1° Si l'on change le signe d'une des coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1, D_1, par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC, pour obtenir les associés (A_{1b}, A_{1c}, A_{1d}), (B_{1c}, B_{1d}, B_{1a}), (C_{1d}, C_{1a}, C_{1b}), (D_{1a}, D_{1b}, D_{1c}) de ces points, les droites (AA_1, BB_{1a}, CC_{1a}, DD_{1a}), ..., (DD_1, AA_{1d}, BB_{1d}, CC_{1d}), concourent aux points L_a, L_b, L_c, L_d associés du point L par rapport au tétraèdre T.

Théorème. — *Les points* L *et* L_a, L *et* L_b, L *et* L_c, L *et* L_d *divisent harmoniquement les symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Cela résulte de l'expression des coordonnées normales des points L_a, L_b, L_c, L_d qui sont proportionnelles à

$$(-R_a, R_b, R_c, R_d), \quad (R_a, -R_b, R_c, R_d), \quad (R_a, R_b, -R_c, R_d), \quad (R_a, R_b, R_c, -R_d).$$

2° Si l'on change les signes de deux coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1, D_1, on obtient, d'abord, trois autres associés de ces points dans les triangles BCD, CDA, DAB, ABC, puis trois points L_1, L_2, L_3 associés du point L, dont les coordonnées normales, par rapport au tétraèdre T sont proportionnelles à

$$(R_a, R_b, -R_c, -R_d), \quad (R_a, -R_b, R_c, -R_d), \quad (-R_a, R_b, R_c, -R_d)$$

quand les points L_1, L_2, L_3 sont situés dans les *combles* suivant les arêtes BC, CA, AB.

3° Si l'on désigne par (A'', B''_1, C''_1), (B'', A''_1, C''_1), (C'', A''_1, B''_1), (A'', B'', C'') les pieds des céviennes des points A_1, B_1, C_1, D_1 dans les triangles BCD, CDA, DAB, ABC, les points L_1, L_2, L_3 sont situés sur les droites $C''C''_1$, $B''B''_1$, $A''A''_1$. Il résulte aussi des divisions harmoniques constatées sur la figure, que les points L et L_1, L et L_2, L et L_3 partagent harmoniquement les segments $C''C''_1$, $B''B''_1$, $A''A''_1$ et que les points L_1, L_2, L_3 sont situés dans les *combles* AB ou CD, AC ou DB, BC ou AD du tétraèdre T.

4° Le point de Lemoine L et les sept points associés se répartissent en deux groupes

$$(L, L_1, L_2, L_3), \quad (L_a, L_b, L_c, L_d).$$

On peut aussi les grouper de manière que deux d'entre eux soient alignés sur un des sommets du tétraèdre T. Suivant le sommet choisi, il y a quatre répartitions différentes :

(A)	L et L_a,	L_1 et L_b,	L_2 et L_c,	L_3 et L_d,
(B)	L et L_b,	L_1 et L_a,	L_2 et L_d,	L_3 et L_c,
(C)	L et L_c,	L_1 et L_d,	L_2 et L_a,	L_3 et L_b,
(D)	L et L_d,	L_1 et L_c,	L_2 et L_b,	L_3 et L_a.

3. **Sections antiparallèles du tétraèdre T.** — Ce sont les triangles t_i découpés dans les trièdres (A), (B), (C), (D) par des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D à la sphère circonscrite (O, R) du tétraèdre T.

1° Si l'on désigne par α', β', γ' les longueurs des côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ du triangle t_d et que l'on pose (1, *corollaire*)

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2p \qquad \text{et} \qquad \frac{k_d}{a'b'c'} = 2\lambda,$$

il résulte des relations (4),

$$p = \lambda(aa' + bb' + cc'), \qquad p - \alpha' = \lambda(-aa' + bb' + cc'),$$
$$p - \beta' = \lambda(aa' + bb' + cc'), \qquad p - \gamma' = \lambda(aa' + bb' - cc').$$

Les formules classiques donnent

$$S_d = 24\lambda^2 VR, \qquad r_d = \frac{24\lambda VR}{aa' + bb' + cc'}, \tag{5}$$

pour l'aire du triangle t_d et le rayon de son cercle inscrit (I_d). De plus, la distance $I_d I'_a$ du point I_d au plan BCD est égale à

$$I_d I_{a'} = r_d \sin\alpha = r_d \sin A,$$

α étant l'angle dièdre suivant $\beta\gamma$, A l'angle de la sphère (O, R) avec le plan BCD, tandis que la distance LI'_a du point L au même plan est

$$LL'_a = R_a \operatorname{tg}\theta$$

On a donc, d'abord,

(6) $$\frac{\mathrm{DI}_d}{\mathrm{DL}} = \frac{\mathrm{I}_d\mathrm{I}'_a}{\mathrm{LL}'_a} = \frac{r_d \sin \mathrm{A}}{\mathrm{R}_a \operatorname{tg}\theta},$$

puis

(7) $$\frac{\mathrm{DI}_d}{\mathrm{DL}} = \frac{k_d}{a'b'c'}\,\frac{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}{aa' + bb' + cc'},$$

en introduisant les expressions (2) et (5) dans les égalités (6). Dans le cas où $\mathrm{I}_d \equiv \mathrm{L}$, on a

(8) $$\frac{k_d}{a'b'c'} = \frac{aa' + bb' + cc'}{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}.$$

2° Il résulte des égalités (4) que si l'on choisit les puissances k_i relatives aux sommets A, B, C, D, de manière que

(9) $$\frac{k_a}{a'bc} = \frac{k_b}{b'ca} = \frac{k_c}{c'ab} = \frac{k_d}{a'b'c'} = \frac{1}{k},$$

les sections antiparallèles t_i correspondant à une même valeur de k sont égales.

En vertu de (7) et des relations analogues, les parallèles aux rayons AO, BO, CO, DO de la sphère (O, R) menées par les centres des cercles (I_i) inscrits aux triangles t_i rencontrent la droite LD en un même point ω tel que

$$1 - m = \frac{\mathrm{DI}_d}{\mathrm{DL}} = \frac{\mathrm{O}\omega}{\mathrm{OL}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{L}\omega}{\mathrm{LO}} = m, \qquad \omega\mathrm{I}_d = m.\mathrm{OD} = m\mathrm{R}.$$

Les cercles égaux (I_i) sont situés sur une même sphère (ω) de centre ω dont le carré du rayon est égal à

(10) $$\sigma^2 = \overline{\omega\mathrm{I}_i}^2 + r_i^2 = \mathrm{R}^2[m^2 + (1-m)^2 \operatorname{tg}^2\theta],$$

en fonction d'un rapport donné m, de R et de $\operatorname{tg}\theta$ (sphère de Tücker).

Si $m = 0$, $\sigma = \mathrm{R}\operatorname{tg}\theta$, [*seconde* sphère de LEMOINE (ou des COSINUS)] [1].

4. Tétraèdre métaharmonique $\mathfrak{T} \equiv \mathrm{L}_a\,\mathrm{L}_b\,\mathrm{L}_c\,\mathrm{L}_d$ [2]. — 1° LEMME. — *Étant donné un tétraèdre* T *et un point dans le plan de la face* ABC, *dont les coordonnées barycentriques, par rapport au triangle* ABC, *sont* m, n, p, *on a*

(11) $$(m+n+p)^2.\overline{\mathrm{DD}_1}^2 = (m+n+p)(ma'^2 + nb'^2 + pc'^2) - (npa^2 + pmb^2 + mnc^2).$$

En effet, si la droite AD_1 rencontre l'arête BC en A″, le théorème de Stewart appliqué aux distances AA″, b, c du point A, puis aux distances DA″, b', c' du point D, aux points collinéaires A″, B, C, donne déjà

$$(n+p)^2\overline{\mathrm{AA}''}^2 = (n+p)(pb^2 + nc^2) - npa^2,$$

et

$$(n+p)^2\overline{\mathrm{DA}''}^2 = (n+p)(pc'^2 + nb'^2) - npa^2.$$

---

(1) P. DELENS, *Mathesis*, 1937, p. 447.

(2) Nous montrerons plus loin que le tétraèdre $\mathfrak{T}$ est inscrit à la sphère (O, R).

Le même théorème appliqué aux distances DD_1, DA'', a' du point D aux points collinéaires D_1, A'', A donne la relation (11).

2° Pour la commodité, posons

$$aa' + bb' + cc' = s, \qquad aa'bb'cc' = P,$$
$$ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = p_A + p_B + p_C + p_D = S.$$

Lorsque

$$m = \frac{a}{a'}, \qquad n = \frac{b}{b'}, \qquad p = \frac{c}{c'}$$

représentent les coordonnées barycentriques d'un point D_1 dans le triangle ABC (1), on a

$$m + n + p = \frac{S - 2p_D}{a'b'c'}, \qquad ma'^2 = aa', \qquad nb'^2 = bb', \qquad pc'^2 = cc',$$
$$npa^2 = \frac{p_D}{a'b'c'}aa', \qquad pmb^2 = \frac{p_D}{a'b'c'}bb', \qquad mnc'^2 = \frac{p_D}{a'b'c'}cc'.$$

Pour ces valeurs de m, n, p, on déduit de (11) l'expression simple

$$\overline{DD_1}^2 = s.\frac{S - 2p_D}{(S - p_D)^2}a'b'c' \tag{12}$$

du carré de la longueur de la symédiane DD_1 et des formules analogues pour $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$, $\overline{CC_1}^2$, au moyen de permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', ... En se reportant à la relation (1) et au théorème (2), on obtient facilement les rapports

$$\frac{DL}{LD_1} = \frac{S - p_D}{p_D} = \frac{DL_d}{D_1L_d}, \qquad \frac{DL}{DD_1} = \frac{S - p_D}{S};$$

d'où successivement,

$$\overline{DL}^2 = \frac{s}{S^2}(S - 2p_D)a'b'c', \tag{13}$$

$$\overline{DL_d}^2 = \frac{s}{S - 2p_D}a'b'c', \tag{14}$$

et ainsi de suite. On a aussi

$$DL.DL_d = \frac{s}{S}a'b'e', \ldots, \tag{15}$$

de sorte que *les produits des distances des sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T *au* second *point de* Lemoine L *et à chacun de ses associés* L_i *sont proportionnels aux produits des arêtes aboutissant à ces sommets* (*ou aux sinus des trièdres* A, B, C, D).

Théorème. — *Dans un tétraèdre* T, *les associés* L_i *du* second *point de* Lemoine L *se confondent avec les points où les symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *rencontrent la sphère circonscrite.*

Car, en raison de la relation (8),

$$DL.DL_d = \frac{s}{S}a'b'c' = k_d, \tag{16}$$

k_d étant puissance d'inversion qui transforme la section antiparallèle t_d passant par le point L en la sphère circonscrite (O, R).

COROLLAIRE. — *Dans un tétraèdre* T, *les coordonnées barycentriques du* second *point de* LEMOINE L *sont inversement proportionnelles aux coordonnées normales de ce point, par rapport au tétraèdre tangentiel* T'.

3° Le théorème de Stewart appliqué aux distances AD_1, a', AL_d du point A aux points collinéaires D_1, D, L_d, donne

$$\overline{AL_d}^2 = \left(\frac{-aa' + bb' + cc'}{S - 2p_D}\right) a'bc, \tag{17}$$

et l'on obtient des expressions similaires pour $\overline{BL_d}^2$, $\overline{CL_d}^2$, par des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c'.

Les relations (12) à (16) entraînent les suivantes :

$$\mathcal{A} = \sum \frac{\overline{DL}^2}{a'b'c'} = \frac{s}{S} = \frac{s}{6V\cot\theta}, \tag{18}$$

$$\mathcal{B} = \sum \frac{a'b'c'}{\overline{DL_d}^2} = \sum \frac{S - 2p_D}{s} = \frac{2S}{s}, \tag{19}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = 2, \tag{20}$$

$$\frac{\overline{DL_d}^2}{a'b'c'} = \frac{\overline{AL_d}^2}{a'bc} + \frac{\overline{BL_d}^2}{b'ca} + \frac{\overline{CL_d}^2}{c'ab} \quad [1]. \tag{21}$$

N. B. — Dans un triangle ABC où la symédiane AK rencontre le cercle circonscrit en un point K_a, on a la relation

$$\frac{AK_a}{bc} = \frac{BK_a}{ca} + \frac{CK_a}{ab},$$

analogue à (21).

4° Des égalités (13) et (14), il résulte encore les relations

$$LD.LL_d = LD(DL_d - DL) = LD.DL_d - \overline{DL}^2 = -\frac{2sP}{S^2},$$

qui déterminent la puissance

$$\overline{LO}^2 - R^2 = -\frac{2sP}{S^2} \tag{22}$$

du point L par rapport à la sphère circonscrite (O, R) et, par suite, l'expression

$$\overline{OL}^2 = R^2 - \frac{2sP}{S^2} \tag{23}$$

du carré de la distance du centre de la sphère (O, R) au point L en fonction du rayon de cette sphère et des longueurs des arêtes du tétraèdre T.

5° THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *si les puissances des sommets* A, B, C, D, *par rapport à une sphère* (ω), *sont proportionnelles aux produits* $a'bc$.

---

[1] Cette relation constitue une relation de celle de *Ptolémée* au tétraède.

$b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$ des arêtes aboutissant à ces sommets, cette sphère (ω) *appartient au faisceau* (F) *formé par la sphère circonscrite* (O, R) *et le plan de coordonnées barycentriques $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$*. (Faisceau de Schoute).

En effet, soient (π) le plan radical des sphères (O, R) et (ω, ρ); α, β, γ, δ les projections orthogonales des sommets A, B, C, D du tétraèdre sur le plan (π); M, N, P, Q, S, X les intersections du même plan et des arêtes BD, DC, CB, BA, AC, AD. On a, en grandeur et en signe,

$$\overline{A\omega}^2 - \rho^2 = ka'bc = 2\,O\omega . A\alpha, \qquad \overline{B\omega}^2 - \rho^2 = kb'ca \;= 2\,O\omega B.\beta,$$

$$\overline{C\omega}^2 - \rho^2 = kc'ab = 2\,O\omega . C\gamma, \qquad \overline{D\omega}^2 - \rho^2 = ka'b'c' = 2\,O\omega . D\delta,$$

k étant un coefficient arbitraire.

Le plan (Bβ, Dδ) coupe le plan (π) suivant une droite qui passe par le point M et

$$MB : MD. = B\beta : D\delta = b'ca : a'b'c'.$$

Le point M et, par analogie, les points N, P, Q, S, X et le plan (π) qui les contient restent donc fixes lorsque k varie. Par suite le lieu du centre de la sphère (ω), lorsque k varie, est la droite Δ menée du centre de la sphère circonscrite perpendiculairement au plan (π) de coordonnées barycentriques $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$, par rapport au tétraèdre T.

Corollaire I. — *Le plan* (π) *se confond avec le plan harmonique du point* L *par rapport au tétraèdre* T.

Car les puissances des points A, B, C, D, par rapport à la sphère (ω, ρ) sont inversement proportionnelles à $ab'c'$, $bc'a'$, $ca'b'$, abc ou encore à AR_a, BR_b, CR_c, DR_d, et le pôle du plan radical (π) des sphères (O, R) et (ω, ρ), pour le tétraèdre T, a pour coordonnées barycentriques $\frac{R_a}{h_a}$, $\frac{R_b}{h_b}$, $\frac{R_c}{h_c}$, $\frac{R_d}{h_d}$.

Corollaire II. — *A deux valeurs k_1 et k_2 du coefficient k correspondent deux sphères dont les centres ω_1 et ω_2 sont situés sur le diamètre de* Brocard OL *et l'on a*

$$O\omega_1 : O\omega_2 = k_1 : k_2.$$

N. B. — *Autre propriété du point* L. — Si l'on change le signe d'une des puissances pour avoir successivement ($-ka'bc$, $kb'ca$, $kc'ab$, $ka'b'c'$), ($ka'bc$, $-kb'ca$, $kc'ab$, $ka'b'c'$), ($ka'bc$, $kb'ca$, $-kc'ab$, $ka'b'c'$), ($ka'bc$, $kb'ca$, $kc'ab$, $-ka'b'c'$), à ces puissances correspondent des sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4).

Les plans rad

(ω_3) *et* (ω_4), . . . , (ω

concourent au centre radical des quatre sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4) *dont les coordonnées barycentriques*

$$x : y : z : t = \frac{1}{a'bc} : \frac{1}{b'ca} : \frac{1}{c'ab} : \frac{1}{a'b'c'} = ab'c' : bc'a' : ca'b' : abc$$

sont identiques à celles du point de LEMOINE L.

6° THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *le plan polaire du second point de* LEMOINE L, *par rapport à la sphère circonscrite, se confond avec le plan* (π) *du faisceau* (F).

En vertu des relations (16), les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre T, par rapport aux sphères décrites sur LL_a, LL_b, LL_c, LL_d comme diamètres sont égales à

$$\alpha^2 = \frac{s}{S}a'bc, \qquad \beta^2 = \frac{s}{S}b'ca, \qquad \gamma^2 = \frac{s}{S}c'ab, \qquad \delta^2 = \frac{s}{S}a'b'c'.$$

Les sphères (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) décrites des points A, B, C, D comme centres avec α, β, γ, δ pour rayons sont orthogonales à une sphère (ω, ρ) du faisceau (F) dont le centre ω est sur le diamètre de Brocard OL du tétraèdre T.

D'après les relations (13), on a

$$\overline{AL}^2 - \overline{BL}^2 = \frac{s}{S}(a'bc - b'ca), \quad \ldots;$$

et, dans le cas présent,

$$\overline{A\omega}^2 - \overline{B\omega}^2 = \frac{s}{S}(a'bc - b'ca), \quad \ldots.$$

Le centre ω de la sphère (ω, ρ) orthogonale aux sphères (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) est donc tel que

$$O\omega : OL = \frac{s}{S} : \frac{s}{S} = 1,$$

et les points ω et L sont confondus.

Cette sphère (ω, ρ) dont le carré du rayon

$$\rho^2 = \overline{DL}^2 - \delta^2 = -\frac{2sP}{S^2} = \overline{LO}^2 - R^2 = \lambda,$$

est orthogonale à la sphère circonscrite au tétraèdre T et le théorème est démontré.

COROLLAIRE. — *Le plan polaire du point* L, *par rapport à la sphère* (L, ρ) *se confond avec le plan* (π) *du faisceau* (F).

THÉORÈME RÉCAPITULATIF. — *Dans un tétraèdre* T, *le* second *point de* LEMOINE L *a le même plan polaire par rapport au tétraèdre et à la sphère circonscrite* [1].

---

[1] V. THÉBAULT, *The American Mathematical Monthly*, 1946, p. 537.

7° Théorème. — *Les sections antiparallèles du tétraèdre* T *sont semblables à celles du tétraèdre* $\mathfrak{T}$.

Si l'on désigne par a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 les longueurs des arêtes du tétraèdre T qui se confondent avec les transformées des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC par l'inversion $\left(L, \overline{LO}^2 - R^2 = \lambda\right)$, en vertu des propriétés de cette transformation, on a, d'abord,

$$(24)\qquad \begin{cases} a_1 = a\dfrac{\lambda}{LB.LC}, & a'_1 = a'\dfrac{\lambda}{LD.LA}, \\ b_1 = b\dfrac{\lambda}{LC.LA}, & b'_1 = b'\dfrac{\lambda}{LD.LB}, \\ c_1 = c\dfrac{\lambda}{LA.LB}, & c'_1 = c'\dfrac{\lambda}{LD.LC}, \end{cases}$$

puis

$$(25)\qquad \frac{aa'}{a_1a'_1} = \frac{bb'}{b_1b'_1} = \frac{cc'}{c_1c'_1} = \frac{LA.LB.LC.LD}{\lambda^2},$$

et le théorème est démontré.

Théorème. — *Les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *ont même* second *point de* Lemoine L.

En raison de propriétés déjà démontrées (1) et (2), les sommets L_a, L_b, L_c, L_d du tétraèdre $\mathfrak{T}$ qui coïncident avec les barycentres de masses proportionnelles à $(-ab'c', bc'a', ca'b', abc)$, $(ab'c', -bc'a', ca'b', abc)$, $(ab'c', bc'a', -ca'b', abc)$, $(ab'c', bc'a', ca'b', -abc)$, appliquées aux sommets A, B, C, D du tétraèdre T, sont affectés de masses proportionnelles à

$$S - 2p_A, \quad S - 2p_B, \quad S - 2p_C, \quad S - 2p_D,$$

dont le barycentre se confond avec le point L. Or, d'après les relations (24), et si l'on pose

$$\frac{\lambda^3}{(LA.LB.LC.LD)^2} = K, \qquad \frac{PsK}{S^2} = \mu,$$

il vient

$$a_1b'_1c'_1 = \mu(S - 2p_A), \qquad b_1c'_1a'_1 = \mu(S - 2p_P),$$
$$c_1a'_1b'_1 = \mu(S - 2p_C), \qquad a_1b_1c_1 = \mu(S - 2p_D).$$

Le barycentre L'_1 de masses proportionnelles à $a_1b'_1c'_1$, $b_1c'_1a'_1$, $c_1a'_1b'_1$, $a_1b_1c_1$, appliquées aux points L_a, L_b, L_c, L_d qui, en raison des relations (1), se confond avec le point de Lemoine du tétraèdre $\mathfrak{T}$, coïncide donc avec le point L.

Théorème. — *Les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *ont même angle* θ *de* Brocard.

En vertu des propriétés de l'inversion, le rapport des volumes V_1 et V des tétraèdres $\mathfrak{T}$ et T,

$$\frac{V_1}{V} = -\frac{\lambda^4}{(LA.LB.LC.LD)^2}.$$

D'après la formule (2), on a donc, de proche en proche,

$$\cot\theta_1 = \frac{a_1 b'_1 c'_1 + b_1 c'_1 a'_1 + c_1 a'_1 b'_1 + a_1 b_1 c_1}{12 V_1} = \frac{2\mu S}{12 V_1} = -\frac{\lambda KS}{12 V_1} = \frac{S}{12 V} = \cot\theta,$$

$\theta_1 = \theta$ désignant l'angle de Brocard du tétraèdre $\mathfrak{T}$.

Corollaire I. — *Les symédianes des tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont collinéaires* (tétraèdres *cosymédians*) *et les symédianes du tétraèdre* $\mathfrak{T}$ *sont divisées harmoniquement par le point* L *et par les sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T.

Corollaire II. — *Une sphère de* Tücker *du tétraèdre* T *est une sphère de* Tücker *du tétraèdre* $\mathfrak{T}$.

En particulier, *les* secondes *sphères de* Lemoine (L) *des tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont confondues*.

Corollaire III. — *Les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont circonscrits à un ellipsoïde, d'axe* OL, *qui touche les plans des faces aux pieds des symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *et* $L_a A'_1$, $L_b B'_1$, $L_c C'_1$, $L_d D'_1$ *de ces tétraèdres*.

Corollaire IV. — *Les douze arêtes des tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont tangentes à un ellipsoïde de révolution qui passe par les coniques inscrites aux triangles de leurs faces aux pieds des céviennes des points* A_1, B_1, C_1, D_1 *et* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, *et par rapport auquel les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont polaires réciproques*.

5. **Tétraèdre** $\mathfrak{T}_1 \equiv L L_1 L_2 L_3$. — Théorème. *Le tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$ *est conjugué par rapport à la sphère circonscrite aux tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$.

Les collinéarités de trois des sommets des tétraèdres T, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ (1, 4°), ainsi que les divisions harmoniques associées font que ces tétraèdres forment un système desmique, et les pôles des plans LL_1L_2, L_1LL_3, LL_2L_3, par rapport au tétraèdre T, se confondent avec les points L_3, L_2, L_1. Le plan LL_1L_3 rencontre les droites L_2A, L_2B, L_2C aux conjugués harmoniques du point L_2, par rapport aux segments AL_d, BL_d, CL_d, et ces points sont situés dans le plan polaire du point L_2, par rapport à la sphère circonscrite (O, R) au tétraèdre T.

Le plan LL_1L_3 et, par analogie, les plans LL_1L_2, LL_2L_3 sont donc les plans polaires des points L_2, L_3, L_1 pour la sphère (O, R), de même que le plan $L_1L_2L_3$ est le plan polaire du point L, par rapport à la même sphère (4, 6°).

Corollaire I. — *Le tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$ *est* orthocentrique *et son orthocentre coïncide avec le centre* O *de la sphère* (O, R).

Corollaire II. — *Les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *ont le même tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$.

B. — Secondes symédianes.

Des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D à la sphère circonscrite (O, R) découpent dans les trièdres de sommets A, B, C, D des triangles t_a, t_b, t_c, t_d semblables entre eux, par la condition que chaque côté de l'un d'eux est proportionnel au produit aa', bb', cc' de l'arête antiparallèle dans la même face du tétraèdre T par l'arête opposée.

Ces plans sont les transformés de la sphère (O, R) par des inversions (A, k_a), (B, k_b), (C, k_c), (D, k_d), les puissances k_a, k_b, k_c, k_d étant arbitraires.

Si l'on choisit ces puissances relatives aux sommets A, B, C, D de manière qu'elles vérifient les égalités (9), les triangles t_a, t_b, t_c, t_d correspondant à une même valeur de k sont égaux.

Théorème. — *Dans un tétraèdre* T, *les sommets* A″, B″, C″, D″ *d'un tétraèdre* T″ ≡ A″B″C″D″ *dont les plans des faces découpent dans les trièdres de sommets* A, B, C, D *des sections antiparallèles égales* t_a, t_b, t_c, t_d *sont situés sur les droites* A′L, B′L, C′L, D′L *qui joignent les sommets* A′, B′, C′, D′ *du tétraèdre tangentiel* T′ *au* second *point de* Lemoine L *du tétraèdre fondamental, et réciproquement.*

En effet, en vertu des relations (8), les distances du centre d'homothétie K des tétraèdres T′ et T″ aux plans des faces homologues de ces tétraèdres sont proportionnelles à $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$. Le point K reste donc fixe lorsque k varie et les sommets A″, B″, C″, D″ du tétraèdre T″ décrivent les droites A′K, B′K, C′K, D′K.

Or le tétraèdre T″ se réduit à un point qui se confond avec le point de Lemoine L du tétraèdre T lorsque, (8),

$$k=\frac{a'bc}{k_a}=\frac{aa'+bb'+cc'}{ab'c'+bc'a'+ca'b'+abc}=\frac{s}{\mathrm{S}}.$$

Le centre d'homothétie K des tétraèdres T′ et T″ se confond donc avec le point de Lemoine L.

Réciproquement, soient t_a, t_b, t_c et t_{al}, t_{bl}, t_{cl} les sections antiparallèles du tétraèdre T menées par un point D″ de la droite D′L et par le point L. Les distances du sommet A aux plans t_a et t_{al} sont entre elles comme D′D″ est à D′L. Le rapport des puissances k_a et k_{al} qui transforment ces plans en la sphère circonscrite au tétraèdre T est donc égal à celui de D′D″ à D′L et il en est de même pour les rapports des puissances k_b et k_{bl}, k_c et k_{cl} correspondant aux plans t_b et t_{bl}, t_c et t_{cl}.

En vertu de la relation (8), on a donc

$$\frac{\mathrm{D'D''}}{\mathrm{D'L}}=\frac{k_a}{k_{al}}=\frac{k_b}{k_{bl}}=\frac{k_c}{k_{cl}}=\frac{k_a}{a'bc}=\frac{k_b}{b'ca}=\frac{k_c}{c'a'b},$$

et les sections antiparallèles (t_a, t_b, t_c) puis, par analogie, les sections (t_b, t_c, t_d), (t_c, t_d, t_a), (t_d, t_a, t_b) sont égales.

N. B. — Les antiparallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC menées par le point D_3 où la symédiane D′L rencontre le plan de ce triangle et limitées à ces côtés, sont proportionnelles à aa', bb', cc'. Les coordonnées normales de ce point, dans le triangle ABC, sont donc proportionnelles à

$$a(-aa'+bb'+cc'),\quad b(aa'-bb'+cc'),\quad c(aa'+bb'-cc'),$$

et ainsi de suite pour les points A_3, B_3, C_3 où les symédianes A′L, B′L, C′L rencontrent les plans des faces correspondantes du tétraèdre T.

C. — Tétraèdre isodynamique. T.

Lorsque le tétraèdre fondamental T est isodynamique,

$$aa' = bb' = cc'.$$

Dans cette hypothèse, certaines des formules obtenues dans le tétraèdre quelconque se simplifient. Ainsi, les coordonnées normales des pieds (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_3, B_3, C_3, D_3) des symédianes (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1), $(A'A_3, B'B_3, C'C_3, D'D_3)$, par rapport aux triangles des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T, sont proportionnelles à

$$(c', b', a), \quad (a', b, c'), \quad (c, b', a'), \quad (a, b, c),$$

et les points A_1 et A_3, B_1 et B_3, C_1 et C_3, D_1 et D_3 se confondent avec les points de Lemoine des triangles des faces correspondantes du tétraèdre T.

Les symédianes AL et A′L sont donc portées par deux droites confondues, de même que les symédianes BL et B′L, CL et C′L, DL et D′L.

N. B. — Certaines des propriétés précitées des symédianes et du *second* point de Lemoine ont été signalées dans ce cas particulier où le tétraèdre T est *isodynamique* par J. Neuberg (1) et M. N. A. Court (2) et pour le tétraèdre quelconque par P. Delens (3), M. M. R. Bouvaist (4), R. Blanchard (5) et par nous-même (6).

Nous avons pensé qu'il pouvait être utile de les rassembler en les complétant par des méthodes élémentaires.

(1) *Mémoire sur le tétraèdre* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1884).
(2) *Modern Pure solid geometry*, New-York, 1935.
(3) *Mathesis*, 1937, p. 144.
(4) *Mathesis*, t. LVI, p. 352 (par le calcul).
(5) *Mathesis*, t. LVI, p. 158.
(6) *The Mathematical Gazette*, 1947, t. 221; *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. LXI, p. 12.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1948.)