

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ISTVAN FARY

## **Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 77 (1949), p. 128-138

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1949\\_\\_77\\_\\_128\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__128_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

# SUR LA COURBURE TOTALE D'UNE COURBE GAUCHE FAISANT UN NŒUD ;

PAR M. ISTVÁN FÁRY.

---

## I. — Introduction.

1. On doit à M. Fenchel <sup>(1)</sup> un théorème d'après lequel une courbe gauche fermée (de l'espace ordinaire) a une courbure totale  $\geq 2\pi$ . Récemment M. Borsuk a donné une nouvelle démonstration de ce théorème, valable pour les courbes de l'espace  $n$ -dimensionnel <sup>(2)</sup>. A la fin de sa Note, M. Borsuk a posé la question de savoir si la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud est toujours  $\geq 4\pi$  <sup>(3)</sup>. L'objet principal de cette Note est de donner une réponse affirmative à cette question (théorème 3) <sup>(4)</sup>. Notre démonstration est fondée sur le fait simple mais intéressant que la courbure totale d'une courbe est égale à la moyenne de celles de ses projections orthogonales (théorème 2).

Cette remarque permet d'étudier aussi quelques autres questions, comme par exemple celle de la borne inférieure de la courbure totale des courbes appartenant à la même classe topologique des nœuds, etc. Tous ces problèmes peuvent être ramenés aux questions concernant des courbes planes, mais comme ces dernières ont une nature plutôt combinatoire, nous ne les considérons pas ici <sup>(5)</sup>.

2. Nous indiquerons d'abord quelques définitions usuelles et nous introduirons des notations.

Envisageons des courbes fermées dans l'espace ordinaire <sup>(6)</sup>. Les coordonnées

---

<sup>(1)</sup> W. FENCHEL, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven* (*Math. Ann.*, t. 101, 1929, p. 238-252).

<sup>(2)</sup> K. BORSUK, *Sur la courbure totale des courbes fermées* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. XX, 1948, p. 251-265).

<sup>(3)</sup> BORSUK, *loc. cit.*, p. 265 (*Problème*); voir en plus la note <sup>(13)</sup> de ce travail (p. 265).

<sup>(4)</sup> Dans son *Problème*, M. Borsuk considère des courbes régulièrement fermées, c'est-à-dire des courbes gauches fermées ayant en chaque point une tangente déterminée, qui varie continûment avec le point de contact. Nous avons considéré une autre classe de courbes (voir *Introduction*, 2, propriété  $\alpha$ ), mais la différence n'est pas essentielle.

<sup>(5)</sup> Nous y reviendrons dans une autre Note, traitant les questions mentionnées plus haut, la courbure globale des systèmes de courbes lacetées, etc.

<sup>(6)</sup> Dans les espaces à quatre dimensions ou plus, toute courbe homéomorphe à un cercle est isotope à ce cercle, c'est pourquoi nous ne considérons que l'espace ordinaire. Remarquons ici que les théorèmes 1 et 2 sont valables dans l'espace  $n$ -dimensionnel.

rectangulaires d'un point variable d'une telle courbe  $C$  sont données en fonction de la longueur d'arc  $s$  (7)

$$(1) \quad C:r(s) = [x(s), y(s), z(s)] \quad (0 \leq s \leq l);$$

la courbe étant fermée, on a toujours  $r(0) = r(l)$ . Nous supposons que les courbes envisagées satisfont à la condition suivante :

*a.* La courbe  $C$  admet partout une tangente (variant continûment) exception faite d'un nombre fini de points au plus, correspondant aux valeurs du paramètre  $0 \leq d_1 < \dots < d_n < l$ ;  $r''(s)$  est continu dans chaque intervalle fermé  $d_i \leq s \leq d_{i+1}$ .

Nous nous servons de quelques-unes des notions courantes de la topologie des courbes gauches. Les courbes *homéomorphes*  $C, C'$  sont appelées *isotopes* s'il existe une famille de courbes  $C_\tau$  dépendant continûment de  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ),  $C_\tau$  étant homéomorphe à  $C$ ,  $C_0 = C$  et  $C_1 = C'$ . Nous disons que  $C$  est un *nœud* s'il est homéomorphe à un cercle (8), mais il n'est pas isotope avec lui. Nous utiliserons le fait facile à démontrer que, si la courbe  $C$  est un nœud, tous les polygones inscrits à  $C$  et ayant des côtés assez petits sont aussi des nœuds.

Considérons trois points de la courbe  $C$  correspondant aux paramètres  $a, b, c$  et soit  $\rho_{abc}$  le rayon du cercle passant par ces points. La courbure au point  $s$  est définie par la limite (supposée existante) (9)

$$(2) \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{\rho_{abc}} = \kappa(s) \quad (d = |a - s| + |b - s| + |c - s|).$$

Nous désignons toujours par  $\Phi(a, b)$  l'angle des vecteurs  $a, b$ , choisi de manière que

$$(3) \quad 0 \leq \Phi(a, b) \leq \pi.$$

Une autre définition usuelle de la courbure est la suivante :

$$(4) \quad \kappa(s) = \lim_{|b-a| \rightarrow 0} \frac{\Phi[r'(a), r'(b)]}{|b-a|} = |r''(s)|.$$

On sait que les limites (2) et (4) sont égales, si  $r''(s)$  est continue. Remarquons enfin qu'on a toujours  $\kappa(s) \geq 0$  (même pour les courbes planes).

Nous utiliserons le fait que les limites (2) et (4) sont atteintes uniformément en  $s$  dans chaque intervalle  $s_1 \leq s \leq s_2$  où  $r''(s)$  est continu (10).

Passons à la *courbure totale*. Si  $r(s)$  admet des dérivées des deux premiers ordres et si la courbe est régulièrement fermée, c'est-à-dire si l'on a

$$r'(0) = r'(l) \quad [r(0) = r(l)],$$

(7) Ce sera toujours possible, car il ne s'agira que des courbes rectifiables.

(8) C'est-à-dire une courbe fermée et sans points multiples.

(9) Quant à la définition de la courbure, voir par exemple, DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale* (8<sup>e</sup> édition), 1938, t. I, p. 280-289; BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (dritte Auflage), Bd. I, 1930, p. 17-18 et 61-64.

(10) Voir par exemple, ПАУЛ, *Les méthodes directes en géométrie différentielle*, Paris 1941, p. 124-125, théorèmes XXII et XXIII.

la courbure totale  $\chi(C)$  est définie par

$$(5) \quad \chi(C) = \int_0^l \kappa(s) ds.$$

De plus, d'après (4), on a

$$(6) \quad \chi(C) = \int |d\varphi|,$$

en désignant par  $d\varphi$  la variation infinitésimale de l'angle de la tangente. D'autre part  $|r'(s)| = 1$ ;  $r'(s)$  est donc sur la sphère unité, et  $\chi(C)$  est la longueur d'arc de cette première image sphérique (11).

Cette définition s'étend d'une manière naturelle aux courbes les plus générales que nous envisageons ici, celles ayant la propriété  $\alpha$ . Il suffit de considérer (6) comme une intégrale de Stieltjes, c'est-à-dire comme la limite

$$(7) \quad \lim_{\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Phi[r'(t_i), r'(t_{i-1})] = \int |d\varphi| \quad (t_i \neq d_j).$$

Observons encore que la courbure totale ainsi définie n'est que la longueur d'une courbe tracée sur la sphère unité et se composant d'une part des images correspondant aux segments de continuité de  $r'(s)$  et, d'autre part, des arcs de grands cercles joignant ces arcs consécutifs.

La courbure totale d'un polygone fermé

$$(8) \quad P = A_1, \dots, A_n (= A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1),$$

se calcule aisément d'après (7)

$$(9) \quad \chi(P) = \sum_{i=1}^n \Phi(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$$

[pour les polygones fermés nous posons  $A_i = A_j$  pour  $i \equiv j \pmod{n}$ ].

Remarquons enfin que d'après la définition (7) de la courbure totale d'une courbe  $C$ , on a l'inégalité

$$(10) \quad \chi(C) \geq 2\pi,$$

pour les courbes planes fermées; l'égalité n'a lieu dans (10) que pour les courbes convexes.

## II. — La courbure totale d'une courbe, considérée comme limite de celles des polygones inscrits.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $P_r$  une suite de polygones inscrits dans  $C [C: r(s)]$ . Supposons que les points de discontinuité de  $r'(s)$  figurent parmi les sommets

(11) Cette remarque nous mène à une définition plus générale de la courbure totale : si la courbe  $r'(s)$  est rectifiable et fermée, nous pouvons définir la courbure totale de  $r(s)$  comme la longueur d'arc de  $r'(s)$  [voir BORSUK (2), p. 251-253]. D'après un théorème de Lebesgue la courbure  $\kappa(s) [= |r''(s)|]$  de  $r(s)$  existe dans ce cas presque partout, et la courbure totale est donnée par la formule (5).

de tous les  $P_r$ , et que le côté de longueur maximum de  $P_r$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{r}$ . Alors la courbure totale de  $P_r$  tend vers celle de  $C$ .

*Démonstration.* — Envisageons un arc  $C'$  de  $C$ , correspondant à l'intervalle  $d \leq s \leq d'$ , où  $r''(s)$  est continu. Soient  $a, b, c$  ( $d \leq a < b < c \leq d'$ ) trois valeurs de  $s$ , et posons

$$\theta = \Phi[r(b) - r(a), r(c) - r(b)],$$

$$\theta^* = \Phi\left[r'\left(\frac{a+b}{2}\right), r'\left(\frac{b+c}{2}\right)\right].$$

Nous allons montrer que

$$(11) \quad \frac{\theta}{\theta^*} \rightarrow 1,$$

quand  $|c - a| \rightarrow 0$ , et cela uniformément sur  $C'$ .

1° La continuité de  $r'(s)$  entraîne que l'angle  $\theta$  tend vers zéro avec  $|c - a|$ ; on a donc pour  $c - a$  assez petit

$$\sin \theta \leq \theta \leq (1 + \eta) \sin \theta.$$

2° Nous avons signalé que la limite (4) a également lieu en  $s$  [sur l'arc  $C'$ , où  $r''(s)$  est continu], ainsi on a

$$(1 - \eta) \times (b) \frac{c - a}{2} \leq \theta^* \leq (1 + \eta) \times (c) \frac{c - a}{2},$$

pour  $|c - a|$  assez petit.

3° Soit  $\frac{1}{x^*} = \rho_{abc}$  le rayon du cercle passant par les points  $r(a), r(b), r(c)$  de  $C'$ ; d'après (2) on a

$$(1 - \eta) \times (b) \leq x^* \leq (1 + \eta) \times (b),$$

si  $|c - a|$  est suffisamment petit.

4° On a enfin, pour  $|u - v|$  assez petit,

$$1 - \eta \leq \left| \frac{r(u) - r(v)}{u - v} \right| \leq 1 + \eta,$$

comme  $s$  est la longueur d'arc, de sorte qu'on a  $|r'(s)| = 1$ .

Supposons maintenant  $\eta$  donné, et choisissons  $c - a$  assez petit pour que les inégalités 1°-4° (la dernière pour  $u = a, v = b$  et  $u = b, v = c$ ) soient valables sur l'arc  $C'$ .

Désignons par  $r^*$  le centre du cercle passant par  $r(a), r(b), r(c)$  et posons

$$\theta' = \Phi\left[r(b) - r^*, \frac{r(a) + r(b)}{2} - r^*\right]$$

$$\theta'' = \Phi\left[r(c) - r^*, \frac{r(b) + r(c)}{2} - r^*\right] \quad (\theta' + \theta'' = \theta; \theta', \theta'' > 0).$$

On a

$$\frac{\sin \theta'}{x^*} = \left| \frac{r(b) - r(a)}{2} \right|, \quad \frac{\sin \theta''}{x^*} = \left| \frac{r(c) - r(b)}{2} \right|.$$

D'après 1° et 2° nous avons

$$\frac{\theta}{\theta^*} = \frac{\theta' + \theta''}{\theta^*} \leq \frac{(1 + \eta)(\sin \theta' + \sin \theta'')}{(1 - \eta) \times (b) \frac{c - a}{2}} = A.$$

En appliquant les inégalités 3° nous obtenons

$$A \leq \frac{(1 + \eta)^2 \times (b) \left( \left| \frac{r(b) - r(a)}{2} \right| + \left| \frac{r(c) - r(b)}{2} \right| \right)}{(1 - \eta) \times (b) \left( \frac{b - a}{2} + \frac{c - b}{2} \right)},$$

puis, en utilisant 4° et le fait que  $\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}$  entraîne

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p + p'}{q + q'} \leq \frac{p'}{q'},$$

nous tirons l'inégalité

$$\frac{\theta}{\theta^*} \leq \frac{(1 + \eta)^3}{1 - \eta}.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{\theta}{\theta^*} \geq \frac{(1 - \eta)^3}{1 + \eta},$$

et de ces deux dernières inégalités nous obtenons (11).

Supposons d'abord que  $r''(s)$  est partout continu. Afin de comparer la courbure totale du polygone  $P_r$  avec celle de  $C$  nous désignons par  $A_{r_i}$  ses sommets et par

$$\theta_{r_i} = \Phi \left( \overrightarrow{A_{r_{i-1}} A_{r_i}}, \overrightarrow{A_{r_i} A_{r_{i+1}}} \right) \quad (i = 1, \dots, n_r),$$

ses angles *extérieurs* dont la somme est  $= \chi(P_r)$ . D'après (10) nous avons pour  $r$  assez grand

$$(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n_r} \theta_{r_i}^* \leq \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\theta_{r_i}}{\theta_{r_i}^*} \theta_{r_i}^* \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{n_r} \theta_{r_i}^*$$

en désignant par  $\theta_{r_i}^*$  l'angle des tangentes aux milieux des arcs consécutifs  $A_{r_{i-1}} A_{r_i}, A_{r_i} A_{r_{i+1}}$  ( $\varepsilon > 0$  étant donné d'avance). Mais d'après (7)

$$\sum_{i=1}^{n_r} \theta_{r_i}^*$$

est une somme d'approximation de  $\chi(C)$ , ce qui achève la démonstration dans ce cas particulier.

Quant au cas général il suffit de subdiviser  $C$  en des arcs  $C_k$  partiels par les points de discontinuité de  $r'(s)$ . Les extrémités des  $C_k$  figurent parmi les sommets de  $P_r$ , et les décomposent en des polygones partiels. On voit que la courbure totale de ces polygones tend vers celle des  $C_k$ , l'angle des côtés séparés par les extrémités des  $C_k$  vers les angles des tangentes à droite et à gauche en ces points.

Remarquons enfin que, si la courbure totale des polygones est définie par la

formule (9), la courbure totale d'une courbe générale C peut être définie par celles des polygones inscrits à C, comme la longueur d'une courbe est définie par celles des polygones inscrits. Le théorème 1 montre que cette définition se confond avec la définition *classique* pour une classe de courbes assez vaste <sup>(12)</sup>.

III. — La courbure totale d'une courbe considérée comme moyenne de celles des projections orthogonales.

LEMME 1. — Soient  $a_n, b_n$  les projections orthogonales des vecteurs  $a, b$  sur un plan dont un vecteur normal est  $n$ . Posons

$$\Phi^*(n; a, b) = \Phi(a_n, b_n).$$

On a

$$(12) \quad \theta = \Phi(a, b) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi^*(n; a, b) d\omega,$$

où  $d\omega$  désigne l'élément d'aire de la sphère unité S.

Démonstration. — Montrons d'abord que l'intégrale qui figure dans (12) ne dépend que de l'angle des vecteurs  $a, b$ .

Pour  $b = \lambda a$  ( $\lambda > 0$ ) les deux membres de (12) sont nuls.

Pour  $b = -\lambda a$  ( $\lambda > 0$ ) on a  $\Phi^*(n; a, b) = \pi$  (sauf pour  $n = \pm \mu a$ , ce qui ne change pas l'intégrale). Nous avons

$$(13) \quad \pi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi^*(n; a, -\lambda a) d\omega \quad (\lambda > 0).$$

Dans le cas général, où les vecteurs  $a, b$  sont linéairement indépendants, soit  $n_0$  la normale à leur plan. Soient  $a', b'$  d'autres vecteurs assujettis à la condition unique

$$\Phi(a', b') = \Phi(a, b).$$

Amenons  $\frac{a}{a}$  en  $\frac{a'}{a'}$  et  $\frac{b}{b}$  en  $\frac{b'}{b'}$  par une rotation autour de l'origine (point d'affixe des vecteurs considérés). En transformant par cette rotation l'intégrale (12), on voit que (12) ne dépend que de l'angle des vecteurs  $a, b$ , c'est-à-dire

$$(13) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi^*(n; a, b) d\omega = f(\theta), \quad \theta = \Phi(a, b).$$

Montrons que la fonction  $f(\theta)$  est une solution de l'équation fonctionnelle

$$(14) \quad f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) + f(\theta_2) \quad (0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \pi; \theta_i > 0).$$

Considérons trois vecteurs coplanaires  $a, b, c$  choisis de façon que

$$\theta_1 = \Phi(a, b), \quad \theta_2 = \Phi(b, c), \quad \theta_1 + \theta_2 = \Phi(a, c).$$

On a alors

$$\Phi^*(n; a, c) = \Phi^*(n; a, b) + \Phi^*(n; b, c),$$

(12) Voir BLASCHKE (9), p. 17-18.

et une intégration sur la sphère unité nous donne (14). De plus, nous avons  $0 \leq f(\theta) \leq \pi$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ); d'après (13)  $f(\pi) = \pi$  donc  $f(\theta) = \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

C. Q. F. D. (13)

**THÉORÈME 2.** — Soient  $C_n$  la projection orthogonale de la courbe  $C$  sur le plan de vecteur normal  $n$ ,  $\chi(C)$ ,  $\chi(C_n)$  les courbures totales de  $C$ ,  $C_n$ . Si  $\chi(C_n) \leq \kappa$  (indépendant de  $n$ ), on a

$$(15) \quad \chi(C) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \chi(C_n) d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à toutes les directions, c'est-à-dire toute la sphère unité  $S$ .

*Démonstration.* — Ce théorème est une conséquence du théorème 1 et du lemme 1. Pour le démontrer choisissons une suite de polygones  $P_r$  inscrits à  $C$ , pour laquelle on a

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi(P_r) = \chi(C).$$

Ceci entraîne que

$$(17) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi(P_{rn}) = \chi(C_n),$$

en désignant par  $P_{rn}$  la projection de  $P_r$  sur un plan ayant la normale  $n$ .

D'après (17) nous avons

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \chi(C_n) d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_S \lim_{r \rightarrow \infty} \chi(P_{rn}) d\omega,$$

et d'après un théorème de Lebesgue

$$\mathcal{J} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_S \chi(P_{rn}) d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi(P_r) = \chi(C),$$

ce qui achève la démonstration (14).

#### IV. — Sur la courbure totale d'une courbe gauche fermée.

En utilisant la formule (15) nous pouvons démontrer le

**THÉORÈME (de M. Fenchel).** — Soit  $C$  une courbe gauche fermée et désignons par  $\chi(C)$  sa courbure totale. On a alors l'inégalité

$$\chi(C) \geq 2\pi,$$

où le signe d'égalité n'est valable que pour les courbes planes convexes.

(13) Le théorème 1 peut être généralisé, mais nous ne traiterons pas ici ses généralisations. Nous reviendrons sur ces questions dans une autre Note.

(14) Quant à l'hypothèse  $\chi(C_n) \leq \kappa$  du théorème 2, remarquons qu'il y a des courbes pour lesquelles  $\chi(C) < \infty$  et  $\chi(C') = \infty$  a lieu, où  $C'$  est une projection de  $C$ .



*Démonstration.* — Prouvons d'abord la

PROPOSITION. — Si  $\chi(C) = 2\pi$ , toutes les projections de  $C$  sont des courbes convexes (ont alors la courbure totale  $2\pi$ ).

Supposons que la proposition n'est pas vraie, et soit  $C_n$ , une projection de  $C$  (sur un plan dont un vecteur normal est  $n_0$ ), qui n'est pas convexe. Il y a alors un entourage de  $n_0$  tel que  $C_n$  n'est pas convexe pour chaque  $n$  appartenant à cet entourage (à savoir, la limite d'une suite de courbes convexes est une courbe convexe). On a alors l'inégalité

$$\chi(C_n) > 2\pi$$

dans cet entourage de  $n_0$ . D'après (10) et l'inégalité ci-dessus, la formule (15) fournit l'inégalité  $\chi(C) > 2\pi$ , contrairement à notre hypothèse. La proposition est donc démontrée.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de M. Fenchel. La première proposition du théorème est une conséquence immédiate de (10) et (15), nous n'avons qu'à considérer le cas  $\chi(C) = 2\pi$ . En utilisant la proposition nous allons prouver que  $C$  est une courbe plane convexe dans ce cas.

Soient  $P, Q, R$  trois points quelconques de la courbe  $C$ ,  $S$  un point du segment  $PR$ . Considérons la projection  $C'$  de la courbe  $C$  sur un plan dont un vecteur normal est  $\vec{SQ}$ . Désignons par  $P', Q', R', S' (= Q')$  les projections de  $P, Q, R, S$  respectivement. D'après la proposition,  $C'$  est une courbe convexe. Les points  $P', R', Q'$  sont collinéaires, c'est-à-dire  $C'$  contient le segment  $P'Q'$ . Alors l'arc  $P, Q, R$  de  $C$  est contenu dans un plan. Comme c'est valable pour chaque groupe de trois points de la courbe  $C$ , cette dernière est contenue aussi dans un plan. Or, d'après (10),  $C$  est une courbe convexe, la démonstration du théorème est donc achevée.

#### V. — Sur l'inégalité $\chi(C) \geq 4\pi$ pour des nœuds $C$ .

Dans la première partie de ce Chapitre nous avons considéré les projections d'un polygone fermé sans points multiples au point de vue *combinatoire*, et nous avons donné un critère (nécessaire) permettant de reconnaître, si le polygone est un nœud.

Dans ce qui suit, soit  $P$  un polygone fermé et sans points multiples. Une projection  $P'$  de  $P$  est dite régulière, si une projetante rencontre au plus deux côtés de  $P$ .

PROPOSITION. — Soient  $P$  un polygone faisant un nœud,  $P'$  une de ses projections régulières sur le plan  $\Pi$ . Il existe un point  $O$  du plan  $\Pi$ , tel que tous les rayons issus de  $O$  et appartenant à  $\Pi$  coupent  $P'$  en  $k \geq 2$  points différents (ou en un point multiple).

*Démonstration.* — Comme  $P'$  est une projection régulière, ses points doubles appartiennent à deux de ses côtés, ils sont différents des sommets, et sont situés sur la frontière de trois ou quatre régions. Le polygone  $P'$  découpe le plan en des régions :

*a.* Ces régions se répartissent en deux classes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  telles qu'une région  $U \in \mathcal{U}$  et une région  $V \in \mathcal{V}$  n'ont pas des côtés communs <sup>(15)</sup>.

Soit  $U_0$  la région contenant le point à l'infini, et soit  $U_0 \in \mathcal{U}$ . Désignons par  $V_1, \dots, V_{i_1}$  les régions qui sont voisines de  $U_0$  et soit  $V_i \in \mathcal{V}$  ( $1 \leq i \leq i_1$ ). Soient  $U_1, \dots, U_{i_1}$  les régions qui sont adjacentes à une au moins des  $V_i$  ( $1 \leq i \leq i_1$ ), etc. Montrons que chaque domaine appartient à une seule des classes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  : dans le cas contraire, nous avons une ligne brisée et fermée  $L$  qui a un nombre impair de points communs avec  $P'$ ; déformons  $L$ ; le nombre de ces points d'intersection avec  $P'$  varie, mais reste impair; quand  $L$  est réduit à un point, ce nombre est cependant nul. Cette contradiction prouve notre proposition *a*.

*b.* Si  $P'$  est une projection régulière d'un nœud, il y a une région disjointe de la région contenant le point à l'infini (nous avons alors une  $U_1 \neq U_0$ ).

Supposons au contraire que toutes les régions différentes de  $U_0$  ont un côté en commun avec elle, c'est-à-dire lui sont *adjacentes*. Montrons que dans ce cas on peut déformer  $P$  en un polygone  $P_1$ , ayant une projection  $P'_1$  sur le plan  $\Pi$ , qui découpe  $\Pi$  en un nombre moindre de régions, toutes adjacentes à la région contenant le point à l'infini.

De la région  $V_1$  de  $P'$  nous allons dans la région  $V_{k_1}$  dont un sommet (point double de  $P'$ ) appartient à  $V_1$ ; la région  $V_{k_{r+1}}$  sera définie de la même manière après  $V_{k_r}$  (la construction n'est pas naturellement univoque). Si  $V_{k_m} = V_{k_n}$  on peut construire une ligne brisée et fermée, dont l'intérieur d'après *a* contient une région que d'autres régions séparent de celle qui contient le point à l'infini. Ce cas étant exclu, on arrive à une région  $V_{k_s}$  pour laquelle  $V_{k_{s+1}}$  n'existe pas, c'est-à-dire telle que sa frontière est un *lacet*, n'ayant qu'un point double de  $P'$ . Par une déformation convenable on peut faire disparaître ce *lacet* de la projection de  $P'$ .

On peut ainsi déformer  $P$  en un polygone  $\bar{P}$ , pour lequel la projection  $\bar{P}'$  n'a qu'une seule région finie,  $\bar{P}$  est donc isotope d'un cercle. *b* est donc complètement démontré.

Choisissons le point  $O$  dans l'intérieur de  $U_1$  ( $\neq U_0$ ). On voit immédiatement que  $O$  jouit de la propriété : tous les rayons issus de  $O$  coupent  $P'$  en  $k \geq 2$  points différents (ou en un point multiple). La démonstration de la proposition est alors achevée.

**THÉORÈME 3.** — *Chaque nœud  $C$  a une courbure totale  $\geq 4\pi$ .*

*Démonstration.* — Soit  $P'$  une projection régulière. Je dis que

$$(18) \quad \chi(P') \geq 4\pi.$$

Soit  $P' = A_1, \dots, A_n$ . Choisissons le point  $O$  jouissant de la propriété de la propo-

<sup>(15)</sup> C. BANKWITZ, *Ueber die Torsionszahlen der alternierenden Knoten* (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 145-146).

sition, et de façon que les points  $OA_s A_t$  ( $s \neq t$ ;  $1 \leq s, t \leq n$ ) ne soient pas alignés. Posons

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \Phi(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k-1}}), \\ \theta_k &= \Phi(\overrightarrow{A_{k-1}A_k}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}) \quad [A_i = A_j, \text{ si } i \equiv j \pmod{n}], \\ \alpha_k &= \Phi(\overrightarrow{A_kO}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}). \end{aligned}$$

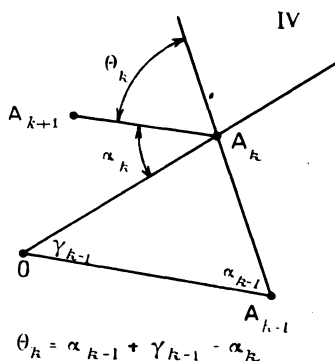
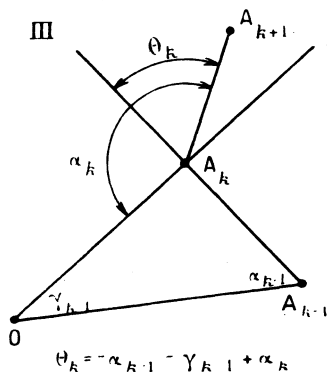
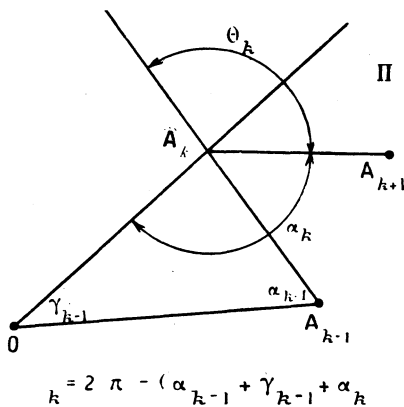
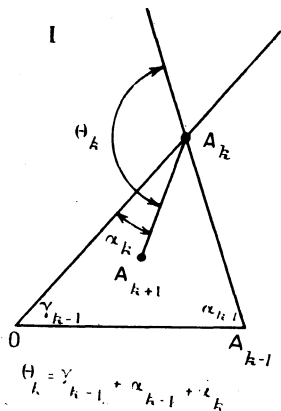
D'après la définition de  $O$ , on a l'inégalité

$$(19) \quad \sum_{k=1}^n \gamma_k \geq 4\pi.$$

Nous allons prouver que

$$(20) \quad \theta_k \geq \alpha_{k-1} - \gamma_{k-1} - \alpha_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Les droites  $OA_k$  et  $A_{k-1}A_k$  découpent le plan en quatre domaines angulaires (ces droites étant différentes d'après le choix de  $O$ ). Désignons par I le domaine



contenant le triangle  $OA_{k-1}A_k$  (qui détermine le sens positif du plan), et soient II, III, IV les autres domaines pris dans le sens positif. Pour la valeur de  $\theta_k$  nous obtenons (voir les figures I, II, III et IV)

$k = \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} + \alpha_k$	si $A_{k+1}$ est dans I,	$\theta_k = -\alpha_{k-1} - \gamma_{k-1} + \alpha_k$	si $A_{k+1}$ est dans III,
$k = 2\pi - (\alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} + \alpha_k)$	» II,	$\theta_k = \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} - \alpha_k$	» IV.

L'inégalité (20) est alors immédiate. En prenant la somme, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n \theta_k \geq \sum_{k=1}^n \gamma_k$$

et, d'après (19), l'inégalité (18).

Soit maintenant C un nœud donné. Si  $\varepsilon$  est  $> 0$ , on peut déterminer un polygone P inscrit à C et faisant un nœud, tel que

$$\chi(C) + \varepsilon \geq \chi(P).$$

Pour toutes projections régulières  $P_n$  de P nous avons  $\chi(P_n) \geq 4\pi$ ; les directions singulières sont situées dans des plans et des hyperboloïdes en nombre fini et ont alors une mesure nulle sur la surface de la sphère unité. Une intégration sur la surface de la sphère des deux membres de (18) donne

$$\chi(C) + \varepsilon \geq 4\pi,$$

et comme  $\varepsilon$  est arbitraire ( $> 0$ ), nous obtenons le théorème 3.

Remarquons enfin qu'on peut construire des nœuds (appartenant à la plus simple classe topologique) avec la courbure totale  $\leq 4\pi + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ , arbitraire), c'est-à-dire que l'inégalité du théorème 3 est la meilleure.

(Manuscrit reçu le 15 février 1949.)

*Ajouté à la correction des épreuves (le 31 mai 1949).* — Je viens de recevoir une lettre de M. Borsuk, qui m'apprend que le théorème 3 a été démontré indépendamment par M. H. Hopf. Il utilise le théorème de M<sup>lle</sup> Pannwitz, qui assure que pour tout nœud on peut trouver une droite le coupant au moins en quatre points.