BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

Sur les tétraèdres dont certaines bihauteurs se rencontrent

Bulletin de la S. M. F., tome 77 (1949), p. 139-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__139_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES TÉTRAÈDRES DONT CERTAINES BIHAUTEURS SE RENCONTRENT;

PAR M. B. GAMBIER.

1. Le Général Marmion a bien voulu me communiquer le résultat suivant qu'il publie lui-même dans *Mathesis* : il s'agit du cas où *les bihauteurs* (AB, CD), (BC, AD) *du quadrilatère gauche* ABCD *sont perpendiculaires et par suite sécantes* (le paraboloïde hyperbolique contenant les côtés de ce quadrilatère est équilatère et, par suite, les bihauteurs en jeu sont les génératrices issues du sommet). Considérons le tétraèdre ABCD et appelons a, b, c, d les faces opposées aux sommets ayant le même nom, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ des vecteurs respectivement perpendiculaires aux faces de même nom, ayant des longueurs mesurées par le même nombre que la face correspondante, issus d'un point intérieur au tétraèdre, dirigés chacun vers l'extérieur. *On sait que la somme géométrique de ces vecteurs est nulle.* Le quadrilatère ABCD a pour couples de sommets opposés A et C, B et D et la condition d'orthogonalité (et par suite de rencontre) des bihauteurs (AB, CD), (BC, AD) peut recevoir encore l'une des formes, toujours nécessaire et suffisante, ci-après :

1° *la somme des carrés des aires des faces a, c opposées à* A *et* C *est égale à la somme analogue relative aux faces b, d opposées à* B *et* D;

2° *le produit des aires de a, c par le cosinus de leur angle est égal au produit analogue relatif à b, d;*

3° *le premier point de Lemoine du tétraèdre* ABCD *est dans le plan des deux bimédianes* (AB, CD), (BC, AD).

En effet, nous avons

$$\boxed{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}=0;} \tag{1}$$

si nous écrivons cette égalité sous la forme $\overline{a}+\overline{c}=-(\overline{b}+\overline{d})$, une élévation au carré nous donne $a^2+c^2+2\overline{a}\overline{c}=b^2+d^2+2\overline{b}\overline{d}$, relation vraie pour tout tétraèdre, de sorte que les tétraèdres spéciaux pour lesquels on a $a^2+c^2=b^2+d^2$ satisfont aussi à la condition $\overline{a}\overline{c}=\overline{b}\overline{d}$ et inversement; autrement dit, chacune des conditions 1° ou 2° est strictement équivalente à l'autre. Il suffit donc d'interpréter géométriquement $\overline{a}\overline{c}-\overline{b}\overline{d}=0$ que l'on peut écrire $\overline{a}\overline{c}+\overline{b}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})=0$ ou encore $(\overline{a}+\overline{b}).(\overline{b}+\overline{c})=0$; le vecteur $(\overline{a}+\overline{b})$ est dans le plan des deux vecteurs $\overline{a}$, $\overline{b}$, dont le premier est perpendiculaire à la face BCD, le second à la face ACD; ce vecteur $\overline{a}+\overline{b}$ est donc, en direction, perpendiculaire à DC; mais ce même vecteur est aussi égal à $-(\overline{c}+\overline{d})$, donc, pour la même raison, perpendiculaire en direction à AB; il est donc parallèle à la bihauteur (AB, CD); le vecteur $(\overline{b}+\overline{c})$, pour la même raison est parallèle à la bihauteur (BC, AD); donc chacune des relations 1°, 2° exprime que ces deux bihauteurs sont perpendiculaires et, par suite, sécantes; les réciproque sont évidentes. La relation $a^2+c^2=b^2+d^2$ s'exprime aisément au moyen des carrés des six arêtes du tétraèdre ABCD.

Les coordonnées barycentriques du premier point de Lemoine sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2, d^2, de sorte que $a^2+c^2=b^2+d^2$ exprime que ce point est dans le plan des deux bimédianes (AB, CD), (BC, AD).

2. Je profite de cette communication pour rectifier une démonstration incomplète que j'ai donnée dans ce même *Bulletin* (1949, p. 79-94); page 91, il s'agissait de prouver que si les bihauteurs (a, a'), (b, b') concourent avec le schéma A, ainsi que les bihauteurs (a, a'), (c, c'), si l'on suppose de plus $(l-m)(l-n)(m-n)\neq 0$ et par suite $\sin^2\lambda=\sin^2\mu+\sin^2\nu$, les deux bihauteurs (b, b'), (c, c') ne peuvent être orthogonales (et par suite ne peuvent concourir suivant le schéma B); en effet on devrait avoir $\cos\lambda=\cos\mu\cos\nu$; l'élévation au carré de cette relation donne, tenu compte de $\sin^2\lambda=\sin^2\mu+\sin^2\nu$, la relation $\sin^2\mu\sin^2\nu=0$ ce qui ne peut avoir lieu pour un tétraèdre non dégénéré.

3. Je rectifie enfin quelques erreurs de copie dans le travail en jeu :

Page 79, ligne 12, *au lieu de* (ADBC), *lire* (ABDC).
Page 82, ligne 9 en remontant, *au lieu de* xy et ll, *lire* xz et ll'.
Page 83, ligne 3, *au lieu de* xy, *lire* xz.
Page 86, sur la ligne précédant l'équation (15), *au lieu de* l'équation (14), *lire* l'équation (14').
Page 86, sur l'équation (17) *au lieu de* $4a^2a'^2$, *lire* au numérateur de la première fraction, $4b^2b'^2$.
Page 92, sur la figure 6, *au lieu de* y, *lire* z.

(Manuscrit reçu le 15 avril 1949.)