BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CASAL

# Étude des champs de vecteurs aléatoires, appliquée à la cinématique des fluides turbulents

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 77 (1949), p. 141-147
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__141_0>

# ÉTUDE DES CHAMPS DE VECTEURS ALÉATOIRES, APPLIQUÉE A LA CINÉMATIQUE DES FLUIDES TURBULENTS;

PAR M. PIERRE CASAL.

**1. Introduction.** — Nous étudions dans cet article la cinématique des fluides turbulents, dans le cas d'une turbulence homogène et non isotrope.

On sait que la théorie statistique de la turbulence se borne actuellement à l'étude du cas particulier de la turbulence homogène et isotrope. Taylor l'introduisit en 1921 [1] pour un écoulement à une dimension, où la vitesse n'a qu'une composante, fonction d'une seule variable d'espace et du temps. Au lieu d'étudier la vitesse elle-même, il étudie les moyennes, prises par rapport au temps, de la vitesse, de son carré, ou plus généralement du produit des vitesses en plusieurs points, c'est-à-dire les corrélations des vitesses.

Karman et Howardt [2] généralisèrent cette idée pour un mouvement à trois dimensions tel que les propriétés statistiques de la vitesse soient les mêmes en tout point de l'écoulement et suivant toutes les directions, mouvement constituant la turbulence homogène et isotrope. Leur étude de la cinématique de ce mouvement montra que toute la statistique du second ordre des vitesses, c'est-à-dire toute corrélation entre deux composantes quelconques de la vitesse en deux points quelconques, est connue à partir d'une seule fonction scalaire; cela rend simple l'étude de ce cas de turbulence.

La recherche de cette fonction, problème de dynamique, a été menée à la fois expérimentalement [3] et théoriquement [4] par de nombreux auteurs. Nous n'approfondirons pas ce problème n'ayant en vue que la cinématique de la turbulence.

Le cas homogène et isotrope est le plus simple possible, mais on n'est pas sûr qu'il se présente effectivement. Nous étudions ici la turbulence homogène non isotrope, cas beaucoup plus large pour lequel les propriétés statistiques sont les mêmes en tout point de l'espace, mais non suivant toutes les directions. Au lieu d'une seule fonction nécessaire pour décrire la statistique des vitesses, il nous faudra ici un tenseur de corrélation, ensemble de neuf fonctions. On pourrait donc s'attendre à de grandes difficultés pour étudier ce cas de turbulence. L'étude cinématique que nous faisons des propriétés de ce tenseur nous permet d'obtenir des résultats très simples, en particulier pour l'expression de la fonction de dissipation, qui joue un rôle important dans l'étude dynamique de la turbulence, et de l'interaction entre le courant moyen et le courant turbulent. D'autre part, nous montrons qu'on peut calculer d'une manière simple le tenseur de corrélation du vecteur tourbillon à partir de ce tenseur, et résoudre aussi le problème inverse, ce qui nous permet d'obtenir pour ces tenseurs une généralisation des formules de Poincaré-Lichtenstein, qui donnent la vitesse d'un fluide en fonction du tourbillon.

Pour avoir de la rigueur dans nos calculs, notre statistique sera basée non pas sur des valeurs moyennes temporelles, comme le faisait Taylor, mais sur des valeurs moyennes stochastiques, comme le fait actuellement Kolmogoroff [5] pour la turbulence isotrope. M. Kampé de Fériet (*Congrès International de Mécanique appliquée*, Paris, 1947) a montré en effet que l'emploi des valeurs moyennes temporelles conduisait à des contradictions. Dans le cas de la turbulence isotrope et homogène, l'utilisation des probabilités ramène le problème à l'étude d'une *fonction aléatoire*, notion récemment introduite par Slutsky. Dans le cas présent de turbulence homogène et non isotrope, nous aurons à utiliser des *vecteurs aléatoires* dont nous allons donner la définition.

**2. Définition de la vitesse aléatoire.** — Considérons l'ensemble de toutes les expériences analogues possibles comme un ensemble infini $\mathcal{E}_1$ d'épreuves E auxquelles nous supposons attaché un système de probabilité donné *a priori*. Au point $M_0$, et à l'instant $t_0$, la vitesse $\vec{a}(M_0, t_0)$ dépend de l'épreuve réalisée : c'est un vecteur aléatoire, ensemble de trois variables aléatoires. A chaque épreuve E est ainsi attachée une fonction vectorielle aléatoire $\vec{a}(M, t, E)$ des trois coordonnées $x_1, x_2, x_3$ du point M et du temps. L'ensemble $\vec{a}_{\mathcal{E}}(M, t)$ de ces fonctions constitue la vitesse aléatoire du fluide. $\vec{a}(M, t, E)$ est la réalisation de cette vitesse pour une épreuve E, c'est-à-dire au cours d'une des expériences théoriquement possibles,

Soit $a_i$, $i = 1, 2, 3$, les composantes de cette vitesse. $a_i$ sont trois fonctions scalaires aléatoires des quatre paramètres $x_1, x_2, x_3$ et $t$; nous noterons $a_i(x, t)$.

La statistique du second ordre de la vitesse sera donnée d'une part par les trois valeurs moyennes (stochastiques) $\overline{a_i(x, t, E)}$ et les neuf covariances

$$\mathcal{A}_{ij}(x, t, x', t) = \overline{\left[a_i(x, t) - \overline{a_i(x, t)}\right]\left[a_j(x', t') - \overline{a_j(x', t')}\right]}.$$

Comme dans les applications que nous ferons, nous n'utiliserons que la statistique spatiale, toutes les opérations étant faites à la même époque $t$, nous n'écrirons pas cette variable.

Nous supposerons

$$\overline{a_i(x, E)} = 0 \tag{1}$$

et poserons

$$\overline{a_i(x, E)\, a_j(x', E)} = \mathcal{A}_{ij}(x', x). \tag{2}$$

Cela constitue le cas général. Si nous supposons la turbulence homogène, les propriétés statistiques sont les mêmes en tout point de l'espace, les covariances ne sont fonctions que des trois variables $y_i = x'_i - x_i$

$$\mathcal{A}_{ij}(x', x) \equiv \mathrm{A}_{ij}(y).$$

Si les dérivées des deux premiers ordres de chaque covariance existent et sont continues, les dérivées partielles de $\vec{a}$ *existent et sont continues en moyenne quadratique*. Leurs différentes covariances sont données par

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\dfrac{\partial a_i(x)}{\partial x_a} a_j(x')} & = - & \dfrac{\partial \mathrm{A}_{ij}(y)}{\partial y_a} & = & \dfrac{\partial \mathcal{A}_{ij}(x', x)}{\partial x_a}, \\
\overline{a_i(x) \dfrac{\partial a_j(x')}{\partial x'_\beta}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{A}_{ij}(y)}{\partial y_\beta} & = & \dfrac{\partial \mathcal{A}_{ij}}{\partial x'_\beta}, \\
\overline{\dfrac{\partial a_i(x)}{\partial x_\alpha} \dfrac{\partial a_j(x')}{\partial x'_\beta}} & = - & \dfrac{\partial^2 \mathrm{A}_{ij}(y)}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} & = & \dfrac{\partial^0 \mathcal{A}_{ij}}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}, \\
 & & \textbf{cas homogène} & & \textbf{cas général.}
\end{array}$$

Notons tout de suite que dans le cas de la turbulence homogène, nous avons la conséquence que nous appellerons *propriété de symétrie* :

$$\mathrm{S}_{ij\alpha\beta} \equiv \overline{\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial x'_\beta}} = \overline{\frac{\partial a_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial a_j}{\partial x'_\alpha}} = 0,$$

qui n'est pas vérifiée dans le cas général, mais qui n'est pas caractéristique de la turbulence homogène.

Notons enfin que ces différentes dérivées partielles peuvent ne pas être définies sur chaque épreuve, mais le sont, sous les hypothèses indiquées plus haut, que nous supposerons réalisées, *en moyenne quadratique*. Ainsi seront entendus définis la *divergence* ou le rotationnel de $\vec{a}$.

Ainsi la statistique d'un vecteur nécessite la connaissance de neuf fonctions formant le tenseur de corrélation du vecteur $\vec{a}$.

Ces neuf fonctions se réduisent à six car

$$\mathcal{A}_{ij}(x, x') = \mathcal{A}_{ji}(x', x),$$

cas homogène

$$\mathrm{A}_{ij}(y) = \mathrm{A}_{ji}(-y).$$

Le fluide étant incompressible, nous avons en outre l'égalité

(3) $$\operatorname{div} \vec{a} = 0.$$

En multipliant cette égalité par $a_i(x')$ et en prenant l'espérance mathématique, il vient

$$\overline{\sum_k \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_k} a_i(x')} = 0$$

ou

(4) $$\sum_k \frac{\partial \mathrm{A}_{ki}}{\partial y_k} = 0$$

ou de la même manière

$$(4') \qquad \sum_{k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial y_k} = 0,$$

(4) et (4′) sont d'ailleurs équivalents, car $A_{ij}(y) = A_{ji}(-y)$.

**3. Calcul du tenseur de corrélation du vecteur tourbillon.** — Nous pouvons définir en moyenne quadratique le vecteur

$$(5) \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}\, a} = \overrightarrow{b(x)}.$$

Nous nous proposons de calculer, en fonction du tenseur $A_{ij}(y)$, le tenseur

$$\overline{b_i(x)\, b_j(x')} = B_{ij}(y).$$

Calculons par exemple $B_{12}$

$$B_{12} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x'_1}\right),$$

$$B_{12} = -\frac{\partial^2 A_{31}}{\partial y_2\, \partial y_3} - \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial y_3\, \partial y_1} + \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial y_1\, \partial y_2}.$$

Nous allons transformer cette forme peu maniable à l'aide des égalités (4). Nous pouvons par un calcul élémentaire mettre $B_{12}$ sous la forme

$$B_{12} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right) A_{31} + \frac{\partial^2}{\partial y_1\, \partial y_2}(A_{11} + A_{22} + A_{33})$$

et de même nous pouvons mettre $B_{33}$ sous la forme

$$B_{33} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)[A_{33} - (A_{11} + A_{22} + A_{33})] + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}(A_{11} + A_{22} + A_{33}),$$

ou, en appelant

$$U = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$(6) \qquad B_{ij} = \Delta A_{ji} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_i\, \partial y_j} - \delta_{ij}\, \Delta U \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ij} = 0 & \text{si} & i \neq j \\ \phantom{\delta_{ij}} = 1 & \text{si} & i = j \end{pmatrix}.$$

Cette forme (6) est simple dans le sens où elle ne fait intervenir que $A_{ij}(y)$ [ou $A_{ij}(-y)$] et l'invariant tensoriel $U(y)$, somme des termes de la diagonale.

Cette fonction U a une signification immédiate : c'est la moyenne au sens du calcul des probabilités du produit scalaire des vecteurs aux points considérés

$$U = \overline{\vec{a}(x)\ \vec{a}(x')},$$

on voit que

$$(7) \qquad V \equiv \overline{\overrightarrow{b(x)}\ \overrightarrow{b(x')}}, = -\Delta U.$$

Remarquons que si nous supposons à son tour $\vec{b}(x)$ dérivable en moyenne quadratique, nous aurons $\operatorname{div} b = 0$ puisque $b$ est un rotationnel, et en posant $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{rot}\, b}$ nous déterminerons de la même manière $C_{ij}(y) = \overline{c_i(x)\, c_j(x')}$ en fonction des $B_{ij}$

par la même formule (6). Nous pouvons calculer aussi $C_{ij}$ en fonction de $A_{ij}$ et nous trouvons simplement

$$C_{ij} = \Delta\Delta A_{ij} \tag{8}$$

et de même si

$$W \equiv \sum_j C_{jj},$$

$$W = -\Delta V = \Delta\Delta U. \tag{9}$$

**4. Inversion des formules précédentes.** — Nous nous proposons de calculer maintenant $A_{ij}$ en fonction de $B_{ij}$, ou ce qui revient au même, de calculer $B_{ij}$ en fonction de $C_{ij}$. La formule (8) nous montre la manière la plus simple d'opérer, en passant par l'intermédiaire de $A_{ij}$ :

Dans (8), $A_{ij}$ est la fonction inconnue, $C_{ij}$ est une fonction donnée. Nous supposerons que $C_{ij}$ est une fonction régulière, nulle à l'infini. (8) est une équation de Poisson par rapport à $\Delta A_{ij}$ et a pour solution

$$\Delta A_{ij}(M) = -\frac{1}{4\pi}\iiint C_{ij}(P)\,\frac{1}{r}\,d\omega(P),$$

M étant un point de l'espace des $y$, P un point courant (variable d'intégration) et $r = MP$.

D'après les propriétés du potentiel newtonien, $\Delta A_{ij} = f(M)$ régulière, s'annulant à l'infini, nous avons alors

$$A_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\iiint f(P)\,\frac{1}{r}\,d\omega(P),$$

$A_{ij}$ étant déterminé, l'équation (6) nous donnera $B_{ij}$; le problème est résolu.

En fait, il sera inutile de calculer tous les $A_{ij}$ mais seulement U, on aura alors

$$B_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\iiint C_{ji}(P)\,\frac{1}{r}\,d\omega(P) + \delta_{ij}V + \frac{\partial^2 U}{\partial y_i\,\partial y_j}$$

avec

$$V = \frac{1}{4\pi}\iiint W(P)\,\frac{1}{r}\,d\omega(P) \qquad \text{et} \qquad U = \frac{1}{16\pi^2}\iiint\left\{\iiint W(P)\,\frac{1}{r}\,d\omega(P)\right\}\frac{1}{r'}\,d\omega(P').$$

Cette dernière formule nous donne par conséquent *la statistique du second ordre* d'un vecteur lorsqu'on connaît celle de son rotationnel. C'est l'analogue de la formule de Poincaré-Lichtenstein donnant la vitesse d'un fluide en fonction du vecteur tourbillon, mais ici pour les tenseurs.

Nous nous sommes placés ici dans le cas d'une *turbulence homogène*, c'est-à-dire d'un champ homogène de vecteurs aléatoires. Il est facile de refaire les calculs de dérivation dans le cas général. Nous obtiendrons des formules analogues. Les $\mathfrak{A}_{ij}$ étant fonction de six variables, nous devrions remplacer $-\dfrac{\partial^2}{\partial y_\alpha\,\partial y_\beta}$ par $\dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x'_\beta}$ ou $\dfrac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x_\beta}$, mais il apparaît des termes supplémentaires qui sont des $S_{ij\alpha\beta}$ et qui ne sont pas nuls comme dans le cas particulier traité. Tous ces termes supplémentaires rendent alors les formules peu maniables et *empêchent de les inverser*.

Nous pouvons dire que ces termes $S_{ij\alpha\beta}$ donnent une mesure de *l'écart entre la turbulence étudiée et la turbulence homogène.*

5. Nous allons préciser ceci en étudiant maintenant *la fonction de dissipation.*

*La fonction de dissipation* est l'énergie dissipée dans le fluide par unité de temps et de volume. Elle a été calculée par Lord Rayleigh et est égale comme on sait à

$$E = \Omega^2 + 4\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \dots.$$

Sa valeur moyenne au sens du calcul des probabilités est donc

$$\overline{E} = \overline{\Omega^2} + 4\,S_{1212} + 4\,S_{2323} + 4\,S_{3131}.$$

Dans le cas de la turbulence homogène, nous voyons donc qu'elle *est égale en moyenne à la valeur probable du carré du vecteur tourbillon*

$$\overline{E} = \overline{\Omega^2} = -(\Delta U)_{r=0}.$$

Ici encore la différence du cas général avec la turbulence homogène s'exprime à l'aide des S.

6. Examinons enfin les *tensions turbulentes.* Nous savons qu'elles représentent *l'interaction du courant d'agitation sur le courant moyen* et sont

$$P_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i(x)u_j(x)}\right].$$

Elles sont évidemment *nulles pour la turbulence homogène,* puisque

$$\overline{u_i(x)u_j(x)} = A_{ij}(o) = \text{const}.$$

Nous pouvons voir qu'elles sont nulles aussi pour toute turbulence vérifiant *les conditions de symétrie* $S = o$. Les équations de Reynolds sont identiques aux équations de Navier. Le courant moyen est le même que le courant laminaire.

Posons en effet

$$R_i(x, x') = \sum_j \overline{u_j(x')\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}}.$$

Nous avons

$$P_i = R_i(x, x) \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial R_i}{\partial x'_\alpha} = \sum_j \overline{\frac{\partial u_j(x')}{\partial x'_j}\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}}$$

qui est égal, puisque $S = o$, à

$$\frac{\partial R_i}{\partial x'_\alpha} = \sum_j \overline{\frac{\partial u_j(x')}{\partial x'_j}\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\alpha}},$$

et est donc nul d'après l'équation (3).

Comme $\frac{\partial R_i}{\partial x'_\alpha} = o$, quel que soit $\alpha$, on a

$$R_i(x, x') \equiv R_i(x, \infty).$$

Il s'ensuit que $R_i(x, x')$ est nul en admettant que la corrélation est nulle lorsque $x' - x$ est infini.

Donc

$$P_j = 0.$$

**7. Conclusion.** — Cette étude cinématique nous a montré les résultats simples que l'on obtient pour la turbulence homogène, malgré le fait que l'on ait à considérer neuf fonctions de corrélation au lieu d'une seule dans le cas particulier de la turbulence isotrope. Nous avons vu que cette simplicité vient du fait qu'il n'y a pas d'interaction entre le courant moyen et le courant turbulent. Il pourrait y avoir intérêt à étudier des cas simples de turbulence, à deux dimensions par exemple, pour lesquels il y aurait une interaction entre ces deux courants, c'est-à-dire pour lesquels l'hypothèse ne serait pas vérifiée.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] TAYLOR, *Théorie statistique de la turbulence* (*Proc. Roy. Soc.*, vol. 151, 1935.

TAYLOR, *Diffusion par les mouvements continus* (*Proc. Math. Soc. London*, vol. 20, 1921, p. 196.

[2] KARMAN et HOWARTH, *Sur la théorie statistique de la turbulence isotrope* (*Proc. Roy. Soc. London*, 1938.

KARMAN, *Quelques remarques sur la théorie statistique de la turbulence* (V^e Congrès international, Cambridge, 1938).

[3] TAYLOR, *Quelques résultats dans l'étude de la turbulence* (V^e Congrès international, Cambridge, 1938).

DRYDEN, *Les recherches sur la turbulence au National Bureau of Standars* (V^e Congrès international, Cambridge, 1938).

[4] OBUKHOFF, *C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, t. XXXII, n° 1, 1941.

[5] KOLMOGOROFF, *C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, t. XXX, n° 4, 1941; t. XXXI, n° 6, 1941; t. XXXII, n° 1, 1941.

(Conférence faite le 26 avril 1948 à la Société Mathématique.)