BULLETIN DE LA S. M. F.

M.A. TORTRAT

Sur la divisibilité des lois convexes de probabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 47-60
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__47_0>

SUR LA DIVISIBILITÉ DES LOIS CONVEXES DE PROBABILITÉ.

PAR M. A. TORTRAT.

(Faculté des Sciences, Alger.)

Ce travail se propose d'élucider quelques propriétés de divisibilité dans une classe particulière de lois de probabilité, celle des lois que j'appellerai « convexes ». Polya a montré [1] que les fonctions $y(x)$ réelles, continues, paires, convexes pour $t > 0$ et satisfaisant à

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1,$$

sont des fonctions caractéristiques (f. c.) (la fonction de répartition correspondante est symétrique par rapport au point $x = 0$ et correspond à une densité de probabilité, paire) ; ce sont les lois définies par de telles fonctions que j'appelle convexes, ainsi que les f. c. correspondantes. Il nous suffit de considérer $y(x)$ sur $(0, \infty)$.

Rappelons que la loi L est dite produit des deux lois L_1 et L_2, ou divisible, ou décomposable en L_1 et L_2, si elle est la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives L_1 et L_2 ; alors si y, y_1, y_2 sont leurs f. c. respectives, $y = y_1 y_2$ et réciproquement.

Nous étudions la divisibilité de telles lois dans l'ensemble des lois de même espèce et allons préciser ses propriétés, ne faisant appel qu'à des arguments assez élémentaires, en partant de l'idée intuitive suivante : si $y = y_1 y_2$ et si dans un intervalle, si petit soit-il, y_1 et y_2 sont strictement convexes (c'est-à-dire y''_1 et $y''_2 > \varepsilon$), on peut modifier y_1 et y_2 sur cet intervalle, sans changer y'_1 et y'_2, y_1 et y_2 aux extrémités, de façon que ces dernières fonctions restent convexes et de produit égal à y ; et ce d'une infinité de façons (infinité ayant la puissance du continu). Or, on s'aperçoit qu'il en est encore ainsi dans des circonstances très larges, c'est-à-dire que, dans des cas que nous préciserons, si une loi est divisible d'une façon ($y = y_1 y_2$), elle l'est d'une infinité d'autres façons.

La même méthode permet d'énoncer des conditions suffisantes qui assurent la divisibilité (d'une infinité de façons) de toute une sous-classe de lois convexes. On peut penser que des idées analogues pourraient se développer dans le cas de

---

[1] POLYA, *On Characteristic functions*, Berkeley Symposium.

lois de probabilités continues plus générales. Notons d'ailleurs que des lois convexes ne peuvent intervenir que rarement dans les applications concrètes, car si le moment d'ordre 2 existe (pour la loi dont y est f. c), y'' existe à l'origine et y', impaire et continue en $x = 0$, s'annule en ce point; donc il n'existe pas de loi convexe possédant un moment du 2ᵉ ordre.

1. Condition nécessaire de divisibilité. — Soit $y = y_1 y_2$; alors

$$y' = y'_1 y_2 + y'_2 y_1 \qquad \text{en tout point où } y'_1 \text{ et } y'_2 \text{ existent}$$

(en tout point où signifie : pour toute valeur de x pour laquelle ...).

y' et l'une ou l'autre des deux fonctions y'_1 et y'_2 sont discontinues en même temps et alors

$$\delta y' = \delta y'_1 . y_2 + \delta y'_2 . y_1$$

désignant par δf le saut de la fonction f (ces sauts sont ici $\geqq 0$, en vertu de l'hypothèse de convexité).

Soit Δx un intervalle, quelconque, en les extrémités duquel y' existe; on a

$$(1') \qquad \Delta y' = \Delta y'_1 (y_2 + \Delta y_2) + \Delta y'_2 (y_1 + \Delta y_1) + y'_1 \Delta y_2 + y'_2 \Delta y_1,$$

donc

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} \geqq 2 y'_1 y'_2$$

en prenant ces dérivées à l'extrémité droite (abscisse la plus grande) de l'intervalle.

Si y'' exisiste sur tout cet intervalle, il suffit d'écrire

$$y'' \geqq 2 y'_1 y'_2$$

qui résulte de

$$(1) \qquad y'' = y''_1 y_2 + 2 y'_1 y'_2 + y''_2 y_1.$$

La première forme de cette inégalité n'intervient que si l'ensemble de mesure nulle sur lequel y' est continue mais sans dérivée, a des points communs avec l'intervalle Δx. Les points de discontinuité de y' n'interviennent pas, puisqu'au voisinage de ces points $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ est aussi grand que voulu si Δx est assez petit. Considérons alors un intervalle fermé $(0, a)$ sur lequel y est $> \varepsilon$ (comme $|y'|$ ne croît pas, y' reste $> \varepsilon_1$ sur ce segment), la borne inférieure des y'' $\left(\text{ou des } \frac{\Delta y'}{\Delta x} \text{ si } y'' \text{ n'existe pas en certains points du } \Delta x \text{ considéré}\right)$ est > 0, car sinon il existerait une suite x_n avec $y''(x_n) \to 0$ $\left(\text{ou } \frac{\Delta y'}{\Delta_n x} \text{ pour une suite infinie de } \Delta_n x\right)$; les x_n ou les extrémités droites x_n des $\Delta_n x$ ont au moins un point limite x_0 et

$$y'_1(x_n) y'_2(x_n) \to 0;$$

s'il y a une sous-suite croissante de x'_n tendant vers x_0, comme

$$0 \leqq y'_1(x_0) y'_2(x_0) \leqq y'_1(x'_n) y'_2(x'_n) \quad (\text{convexité de } y_1 \text{ et } y_2),$$
$$y'_1(x_0) y'_2(x_0) = 0,$$

s'il y a une sous-suite décroissante de x'_n tendant vers o, x_0 est intérieur au segment (o, a) et pour tout $x > x_0$,

$$y'_1(x)y'_2(x) \leqq y'_1(x'_n)y'_2(x'_n) \qquad \text{si} \quad x_0 \leqq x'_2 \leqq x,$$

donc

$$y'_1(x)y'_2(x) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x > x_0.$$

Mais en un point où $y'_1 y'_2 = 0$, on a, par exemple, $y'_1 = 0$, donc $y_1 = 0$ (y_1 étant f. c. convexe), donc $y = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $y > \varepsilon$ sur (o, a).

Il est donc nécessaire pour que y soit divisible que y'' ou $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ soit $> \eta$ sur out segment où y reste $> \varepsilon$ (η dépendant de ce segment), ou encore : la borne inférieure des y'', comme celle des $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ est > 0 sur tout segment où y ne s'annule pas. Il suffit, bien entendu, pour cela que (o, a), $y'' > \eta$ lorsque y'' existe et $\frac{\Delta y}{\Delta x} > \eta$ pour des intervalles assez petits recouvrant chaque point où y' est continue non dérivable; les points de discontinuité de y' n'introduisent aucune condition. Appelons condition 1 la condition nécessaire ci-dessus; nous la supposons implicitement vérifiée lorsque, dans ce qui suit, nous parlons de conditions suffisantes de divisibilité sans mentionner cette première condition.

2. **Condition suffisante de divisibilité lorsque y ne s'annule qu'à l'infini.** — Nous cherchons une décomposition en

$$y(x) = k(x)\,z(x),$$

k et z étant des fonctions convexes tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ (cf. *fig.* 1).

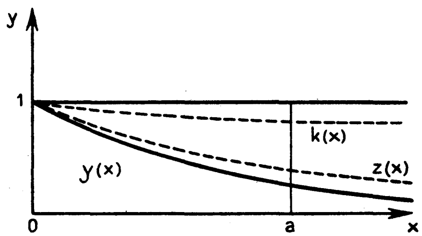

Fig. 1.

Sur le segment (o, a), nous avons $y \geqq y(a)$, donc $y'' > \eta$; or de $y = kz$, nous tirons

$$z = \frac{y}{k}, \qquad z' = \frac{y'}{k} - \frac{k'}{k^2}y, \tag{2}$$

$$k^2 z'' = \frac{2k'^2 - kk''}{k}y - 2k'y' + ky'' \tag{3}$$

en tout point où y' et y'' existent. Nous pouvons supposer que k' et k'' existent partout; k' est $\leqq 0$, $k'' \geqq 0$ et nous pouvons choisir k' et k'' assez petits (k restant alors aussi voisin de 1 que voulu) pour que z' reste < 0, $z'' > 0$, toujours sur l'' segment (o, a); d'après (2), cela est possible pour z' si $\frac{|k'|}{k} < \frac{|y'|}{y}$ et peut être fait avec $k'(a) < o$, puisque $y'(a)$ est nécessairement $< o$, de même pour z'' d'après (3), puisque $y'' > \eta$.

Au voisinage d'un point où y'' n'existe pas, nous aurons nécessairement (c'est la condition 1 supposée vérifiée)

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} > \eta,$$

(3) s'écrit alors [partant de (2)]

$$(3') \qquad \frac{\Delta z'}{\Delta x} = \frac{1}{k}\frac{\Delta y'}{\Delta x} + (y' + \Delta y')\frac{\Delta\left(\frac{1}{k}\right)}{\Delta x} - \frac{k'}{k^2}\frac{\Delta y}{\Delta x} - (y + \Delta y)\frac{\Delta\left(\frac{k'}{k^2}\right)}{\Delta x}$$

et $\frac{\Delta z'}{\Delta x}$ peut être rendu $> o$ pour k' et k'' assez petits, quel que soit Δx, c'est-à-dire que z est bien convexe (une discontinuité de y' en entraîne une, $> o$ aussi, pour z', ces points ne créent donc aucune difficulté).

Il nous reste à prolonger cette solution de a à l'∞ ; le seul cas dans lequel nous conclurons est celui où pour x assez grand, $\operatorname{Log} y$ est convexe (c'est-à-dire pour $x > a$).

Remarquons à ce sujet : $y^{\frac{1}{2}}$ est convexe si

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{y}}\right)' \geqq o \qquad \text{ou} \qquad 2yy'' - y'^2 \geqq o$$

$\left(\text{ou, plus exactement, aux points où } y' \text{ est continue non dérivable} : 2y\frac{\Delta y'}{\Delta x} - y'^2 \geqq o\right)$.

$y^{\frac{1}{n}}$ est convexe si

$$\left(y'y^{-\frac{n-1}{n}}\right)' \geqq o \qquad \text{ou} \qquad yy'' - \frac{n-1}{n}y'^2 \geqq o$$

et $y^{1-\frac{1}{n}}$ est alors aussi convexe. A la limite, quand $n \to \infty$, on obtient $yy'' - y'^2 \geqq o$, condition pour que $\operatorname{Log} y$ soit convexe (en supposant que y'' existe), y est à ce moment indéfiniment divisible, car $\frac{1}{N}\operatorname{Log} y$ est convexe et $e^{\frac{1}{N}\operatorname{Log} y} = \sqrt[N]{y}$ est une caractéristique convexe.

Il est alors facile de prolonger $k(x)$ au delà de a par $\lambda y^{\frac{1}{N}}$ qui est convexe, $z(x)$ l'étant alors par $\frac{1}{\lambda}y^{1-\frac{1}{N}}$ qui est aussi convexe; il nous faut

$$k(a) = \lambda y^{\frac{1}{N}}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{k'(a)}{k(a)} = \frac{1}{N}\frac{y'(a)}{y(a)};$$

choisissant N assez grand $\frac{1}{N}\frac{y'(a)}{y(a)}$ peut être rendu assez petit pour égaler $\frac{k'(a)}{k(a)}$ (N pouvant être non entier), on choisit ensuite la constante λ.

Nous avons donc démontré que si $\operatorname{Log} y$ est convexe à partir d'un certain x assez grand, la loi de f. c. égale à $y(x)$ est divisible et d'une infinité de façons.

3. **Conditions suffisantes de divisibilité lorsque $y(x)$ s'annule à distance finie $(x = a)$.** — *a*. y'' ou $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ restent $> \varepsilon$ pour $x < a$.

La méthode du paragraphe précédent s'applique sur $(0, a)$, on choisit $k(x)$ assez voisin de 1 sur $(0, a)$, z s'annule en a et pour $x > a$, $k(x)$ se prolonge arbitrairement [il suffit que $k'(a)$ soit < 0] en une courbe convexe asymptote à Ox. L'existence ou la valeur de y'' en $x = a$ n'importent pas.

C'est le cas d'une parabole ou d'une succession d'un nombre fini d'arcs de paraboles, qu'il y ait raccord ou non des tangentes en a.

b. Sinon, il existe une suite croissante $x_n \to a$, avec $y''(x_n) \to$ ou $\frac{\Delta y'}{\Delta_n x} \to 0$ (les x_n désignant comme au paragraphe 1 les extrémités droites des $\Delta_n x$); mais alors le raisonnement de ce même paragraphe 1 nous a montré que $y'_1 y'_2 \to 0$, et par conséquent, $y' \to 0$, s'il y a divisibilité.

La condition nécessaire 1 s'est donc précisée de la façon suivante :

$y'' > \varepsilon$ pour $x < a$ est condition nécessaire et suffisante de divisibilité;
$y'' > \varepsilon$ pour $x < a - \eta$, $\eta > 0$ et $y' \to 0$ pour $x \to a$ sont conditions nécessaires.

Dans ce dernier cas, nous pouvons donner des conditions suffisantes :

Supposons $\frac{|y'|}{y''}$ et $\frac{y}{y''}$ bornés, dans un voisinage assez petit (à gauche) de a, par A.

D'après (3),

$$k^2 z'' \geqq [k - (k'' + 2 \mid k' \mid \mathrm{A}] y'' \geqq 0$$

si k' et k'' sont choisis assez petits, cette inégalité intervenant dans l'intervalle $(a - \eta, a)$; la méthode du paragraphe 2 nous permet de conclure. Elle ne s'applique pas au cas où y ne s'annule qu'à l'infini, pour deux raisons : d'une part, $\frac{|y'|}{y''}$ et $\frac{y}{y''}$ ne sont pas alors en général bornés par exemple si $y \sim e^{\frac{1}{x}} - 1$); d'autre part, il faut s'assurer que k et $\frac{y}{k}$ tendent bien vers zéro quand $x \to \infty$.

Si y' est continue non dérivable en des points voisins de a, (3') montre que la condition $\frac{|y'|}{\frac{\Delta y'}{\Delta x}}$ et $\frac{y}{\frac{\Delta y'}{\Delta x}}$ bornés au voisinage de a est suffisante.

Exemple 1. — Un développement limité existe au voisinage à gauche de a, au 3e ordre :

Si y'' existe et est continue dans ce voisinage et si $y'''(x)$ existe en a (du moins à gauche) et est $\neq 0$ (soit α)

$$y''(a - \xi) = -\xi(\alpha + \varepsilon),$$
$$y'(a - \xi) = -\frac{\xi^2}{2}(\alpha + \varepsilon'),$$
$$y'(a - \xi) = -\frac{\xi^3}{6}(\alpha + \varepsilon'') \qquad (\xi \text{ étant infiniment petit}),$$

les conditions suffisantes sont vérifiées.

Exemple 2. — Si y est divisible,

$$y = y_1 y_2, \qquad y' = y_1 y'_2 + y_2 y'_1$$

en tout point où y' existe,

$$\frac{|y'|}{\dfrac{\Delta y'}{\Delta x}} \leq \frac{|y'|}{2y'_2 y'_2} = \frac{y_1\,|y'_2| + y_2\,|y'_1|}{2y'_1 y'_2},$$

y'_1 et y'_2 étant pris à l'extrémité droite de l'intervalle Δx; y'_1 par exemple, s'annule en a avec y_1 et vu la convexité

$$|y'_1| \geq \frac{y_1}{\xi} \qquad (\xi = a - x), \qquad \text{soit} \quad \frac{y_1}{|y'_1|} < \xi;$$

si

$$y_2(a) \neq 0, \qquad y'_2(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{y_2}{|y'_2|} < \frac{1}{|y'_2(a)|};$$

d'autre part,

$$\frac{y}{\dfrac{\Delta y'}{\Delta x}} \leq \frac{y_1 y_2}{2y'_1 y'_2}$$

est borné pour les mêmes raisons.

Ainsi, toute loi convexe dont la f. c. s'annule à distance finie, est divisible d'une infinité de façons si elle l'est d'au moins une façon.

4. Recherche de conditions de décomposition unique d'une loi L en $L_1 L_2$. — Dans ce qui suit nous supposons que $y = y_1 y_2$ et allons examiner si cette décomposition peut être unique.

a. Si dans un intervalle y''_1 et y''_2 $\left(\text{ou } \dfrac{\Delta y'_1}{\Delta x}, \dfrac{\Delta y'_2}{\Delta x} \text{ lorsque } y'_1 \text{ ou } y'_2 \text{ ne sont pas dérivables, mais seulement continus}\right)$ restent $> \eta$, il y a une infinité de décompositions; on peut, en effet, modifier localement y_1 et y_2.

Soient

$$z_1 = k y_1, \qquad z_2 = \frac{y_2}{k},$$

$k = 1$, $k' = 0$ aux extrémités de l'intervalle et, d'après (1) et (3) [ou (1) et (3')], si k' et k'' sont assez petits, on est assuré que z''_1 et z''_2 $\left(\text{ou } \dfrac{\Delta z'_1}{\Delta x}\, \dfrac{\Delta z'_2}{\Delta x}\right)$ restent ≥ 0.

Nous voyons que si la relation $y = y_1 y_2$ est unique, il existe des points où $y''_1 y''_2 = 0$ sur tout intervalle; en particulier, si y''_1 et y''_2 sont continus, l'axe Ox se partage en deux ensembles ouverts formés chacun d'une infinité dénombrable d'intervalles (ouverts) et imbriqués l'un dans l'autre, et sur l'un de ces ensembles $y''_1 = 0$, sur l'autre $y''_2 = 0$ [il faut ajouter les extrémités des intervalles, pour lesquelles $(y''_1 = y''_2 = 0)$].

b. Soit seulement $y''_2 > \eta$ sur (a, b). S'il n'y a pas de discontinuité pour y'_1 en a et b, la modification locale n'est pas possible en général, car si C_1 est rectiligne entre A_1 et B_1, l'arc de courbe modifié ne peut être qu'au-dessous du segment de droite et étant convexe ne pourrait se raccorder à C_1 en A_1 et B_1 (cf. *fig.* 2).

Si $\delta y'_1$ en a et b est > 0, prenons $k = 1$ en a et b, mais $k' \neq 0$ aux extrémités, k'' étant partout > 0, soit $k' \leqq 0$ de a à ξ, > 0 de ξ à b (cf. *fig.* 3).

On peut prendre k' et k'' assez petits pour satisfaire à $z''_2 \leqq 0$ [d'après (3)] et $z''_1 \geqq 0$ si entre ξ et b, $\frac{k''}{k'} > \frac{2|y'_1|}{y_1}$, inégalité qui peut toujours être satisfaite [un facteur convenablement petit assure alors que (3) est satisfait]; en A_1 et B_1, nous avons alors les sauts

$$\delta z'_1 = \delta y'_1(a) + k'(a) y_1(a) \qquad \text{et} \qquad \delta y'_1(b) - k'(b) y_1(b)$$

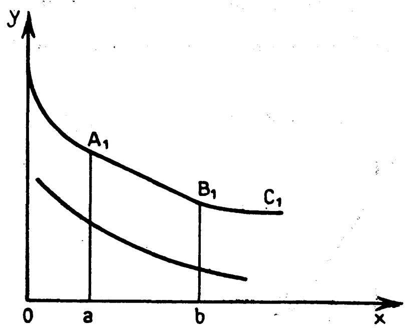

Fig. 2.

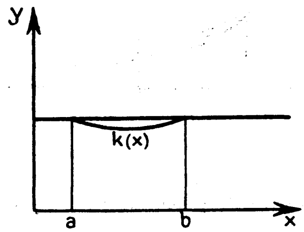

Fig. 3.

qui sont $\geqq 0$ si k' est assez petit. De même, des $\delta z'_2$ égaux à

$$-\frac{k'(a)}{k^2} y_2(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{k'(b)}{k^2} y_2(b)$$

qui peuvent être $\geqq 0$. Donc il y a une infinité de décompositions possibles.

Il suffit d'ailleurs de supposer une seule discontinuité, par exemple en A_1, mais la modification n'est plus tout à fait localisée à (a, b). Prenons $k'(a) < 0$ $[k(a) = 1]$ et partout $k'' > 0$, de telle façon que k' reste $\leqq 0$ et s'annule en b, $k(b)$ étant alors < 1.

Pour $x > b$, nous prenons

$$z_1 = k(b) y_1, \qquad z_2 = \frac{y_2}{k(b)};$$

Autrement dit, nous profitons de ce que la multiplication par un facteur constant, ne change pas la nature des courbes que nous considérons (convexité, asymptote Ox).

$z''_1 \geqq 0$ est satisfait, $z''_2 \geqq 0$ l'est pour k' et k'' assez petits et en a nous avons les discontinuités

$$\delta z'_2(a) = -\frac{k'(a)}{k^2(a)} y_2(a) > 0 \qquad \text{et} \qquad \delta z'_1(a) = \Delta y'_1(a) + k'(a) y_1(a)$$

qui, comme ci-dessus, peut être rendu $\geqq 0$ (cf. *fig.* 4).

Il en serait de même si l'on supposait une discontinuité en B_1, à l'extrémité droite du segment rectiligne (ou de l'arc de C_1 où l'on ne peut supposer $y''_1 > \eta$) (cf. *fig.* 2). Le raccord se ferait en a, entre les parties modifiées et $k(a)y_1$, $\frac{y_2}{k(a)}$; on a alors

$$z_1(0) = k(a), \qquad z_2(0) = \frac{1}{k(a)}$$

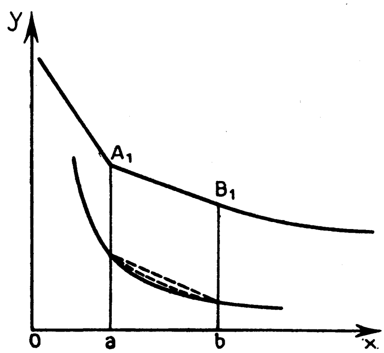

Fig. 4.

et il suffit de multiplier sur $(0, \infty)$, z_2 par $k(a)$ et z_1 par $\frac{1}{k(a)}$ pour avoir $y = z_1 z_2$, z_1 et z_2 étant des caractéristiques.

Prenons $a = 0$. Si $y''_2 > \eta$ sur $(0, \varepsilon)$ et si $y'_1(0)$ est fini, alors le résultat précédent s'applique, car $z'_1(0)$ peut bien être pris $< y'_1(0)$. C'est le cas pour y_1 si y''_1 est continue et finie.

c. Pour préciser la question au voisinage de $x = 0$, supposons que y''_1 et y''_2 existent pour $x > 0$ sont connues pour $x > 0$ et ont une limite lorsque $x \to 0$. Si pour y''_1, par exemple cette limite est $\neq 0$, comme $y'_2(0)$ est fini (y''_2 étant borné au voisinage de 0), y est décomposable d'une infinité de façons.

Supposons donc que y''_1 et y''_2 tendent toutes deux vers 0 quand $x \to 0$.

Supposons qu'il existe, lorsque x croît à partir de 0, une des deux courbes pour laquelle y'' devient > 0, tandis qu'elle reste nulle jusqu'à ce point pour l'autre. Soit C_2 cette courbe, a une valeur de x pour laquelle

$$y''_2(a) > 0, \qquad y''_1(a) = 0.$$

Posons $t = a - x$, et construisons ainsi $k(t)$ de $t = 0$ à $t = a$.

En $t = 0$, $k = 1$, $k' = 0$, puis $k'' > 0$ au voisinage $t \geqq 0$, k' est alors > 0 et si k' et k'' sont assez petits, z''_1 et z''_2 peuvent être $\geqq$ o. Avant que y''_2 ne s'annule, changeons le signe de k'' de telle sorte que

$$\frac{|k''|}{k'} \leqq \frac{2y'_1}{y_1}, \tag{4}$$

ce qui est possible sur tout l'intervalle jusqu'à $t = a$ et assure que k' reste $>$ o, z''_1 est alors $\geqq$ o. Pour que z''_2 le soit, il suffit que

$$\frac{|k''|}{k'} \geqq \frac{2y'_2}{y_2} - \frac{2k'}{k} \tag{5}$$

(ici et dans ce qui suit, les dérivées sont prises par rapport à t, y'_1 et y'_2 sont $\geqq$ o).

Or, d'après nos hypothèses,

$$\begin{aligned} &y_1 = 1 - m_1 x \quad \text{entre o et } a, \qquad m_1 = y'_1(0) = y'_1(x),\\ &y_2 = 1 - x y'_2(\theta x),\\ &y'_2 = m_2 - x y''_2(\theta' x). \end{aligned}$$

Si y'_2 est constant de $x = 0$ à $x = b < a$,

$$y'_2(\theta x) = m_2 - (x - b) y''_2(\varepsilon)$$

[avec $y''_2(\varepsilon) = 0$ si $x < b$] et

$$\varepsilon = \theta(a - b)$$

$(a - b)$ étant considéré comme infiniment petit principal; de même,

$$\begin{aligned} y''_2(\theta' x) &= y''_2(\varepsilon'), \qquad \text{nul si } x < b,\\ \varepsilon' &= \theta'(a - b) \qquad \text{si } b < x < a \end{aligned}$$

(θ et θ' ne sont plus les mêmes); posons $x - b = \Delta x$, alors

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y'_2} &= \frac{1 - m_2 x + x \Delta x y''_2(\varepsilon)}{m_2 - x y''_2(\varepsilon')}\\ &= \frac{1}{m_2} - x + \left(\frac{1}{m_2} - x\right) \frac{x}{m_2} y''_2(\varepsilon') + \frac{x}{m_2} \Delta x y''_2(\varepsilon) + \text{termes ordre supérieur} \end{aligned}$$

et

$$\frac{y_1}{y'_1} = \frac{1}{m_1} - x;$$

si donc $m_2 \leqq m_1$, $\frac{y'_1}{y_1} - \frac{y'_2}{y_2}$ a le signe de

$$\frac{y_2}{y'_2} - \frac{y_1}{y'_1} = \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right) + \left(\frac{1}{m_2} - x\right) \frac{x}{m_2} y''_2(\varepsilon')$$

pour Δx assez petit; $\geqq$ o, entre o et $b + \Delta x$ pour x, car $m_2 x \leqq 1$.

On peut alors satisfaire à (4) et (5) sans difficultés sur $(0, b + \Delta x)$ tout en gardant k' et k'' assez petits pour satisfaire à $z''_1 \geqq 0$, $z''_2 \geqq 0$ sur $(b + \Delta x, a)$, en choisissant d'abord Δx assez petit.

Soit, au contraire, $m_2 > m_1$; lorsque Δx, donc $y''(\varepsilon') \to 0$, $\frac{y'_1}{y_1} - \frac{y'_2}{y_2}$ devient $<$ o pour Δx assez petit et dans le cas général il n'est pas possible de satisfaire à (4) et (5), car cela imposerait

$$\frac{2k'}{k} \geqq \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}$$

(à un infiniment petit près), ce qui peut être contradictoire à la fois avec (4) et avec la condition $z''_2 \geqq 0$ lorsque k'' est > 0 (au voisinage de $x = a$).

Or, la construction de k essayée est la seule possible dans ce cas :

k' et k'' étant nécessairement $\geqq 0$ au voisinage de $t = 0$, si k'' reste $\geqq 0$, $z''_2 \geqq 0$ exige

$$k''y_2 - ky''_2 \leqq 2\frac{k'^2}{k}y - 2k'y' = -2k'kz'_2 \qquad \left(z'_2 = \frac{y'}{k} - \frac{k'}{k^2}y\right);$$

or, $y''_2 \to 0$, $-2k'kz'_2$ est $< -\eta$, tandis que $k''y_2 - ky''_2$ tend vers une limite $\geqq 0$; nous supposons là que k'' existe, mais supposer k' continu sans dérivée ou discontinu ne peut en rien résoudre la difficulté.

On peut donc affirmer que dans le cas $m_2 > m_1$, il est possible que y ne soit pas décomposable d'une autre façon par une modification localisée au voisinage de $x = 0$.

Le raisonnement que nous aurons fait est valable sous la seule condition, pour y''_2, que cette dérivée ne soit pas partout nulle dans l'intervalle $(0, a)$ où y''_1 est supposée l'être. Il se peut, par exemple, que les extrémités des intervalles sur lesquels y''_2 est > 0 (nulle sur le complémentaire) aient 0 pour point d'accumulation. Si cette circonstance se présente aussi pour y''_1, c'est-à-dire non $\equiv 0$, ni $> \eta$ dans un voisinage de 0, on a

$$\frac{y_2}{y'_2} - \frac{y_1}{y'_1} = \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} + \Delta x\left[\frac{y''_2(\varepsilon')}{m_1^2} - \frac{y''_1(\eta')}{m_1^2}\right].$$

Si $m_2 \neq m_1$, $\dfrac{y'_2}{y_2} - \dfrac{y'_1}{y_1}$ a un signe constant pour Δx assez petit, et comme dans ce cas y_1 et y_2 sont interchangeables, il y a infinie décomposabilité.

Si $m_1 = m_2$ $\dfrac{y_2}{y'_2} - \dfrac{y_1}{y'_1}$ est infiniment petit d'ordre > 1 en Δx et d'après (4), on peut borner inférieurement k', donc $\dfrac{k'}{k}$ et en modifiant y_1, y_2 à partir d'un point suffisamment voisin de 0, on peut satisfaire à (4) et (5).

Nous avons ainsi examiné tous les cas possibles lorsque y''_1 et y''_2 ont une limite, lorsque $x \to 0$ et si ces deux limites sont 0, lorsque ces dérivées sont continues au voisinage de $x = 0$.

Signalons l'exemple particulier suivant : C_1 et C_2 commençant par deux segments rectilignes, y''_1 et y''_2 ne peuvent être toujours $\equiv 0$, si le premier $\neq 0$ correspond au segment de pente la plus faible (ou s'ils le deviennent tous deux à partir du même x comme il vient d'être examiné), il y a infinie décomposabilité. La conclusion est encore la même s'il y a une discontinuité de y' à l'extrémité du segment de pente la plus faible, quoiqu'il se passe ensuite, mais la démonstration ne rentre pas dans le cadre précédent, ni dans le cas b (une discontinuité, mais avec $y'' > \eta$ sur l'autre courbe).

Soient, en effet (cf. *fig.* 5),

$$y_1 = at + b, \qquad y_2 = ct + d \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq \alpha, \qquad t = \alpha - x$$

en $x = \alpha$, y'_2 possède la discontinuité $\delta_2 . (t = 0)$, sans autres hypothèses.

Soit

$$z_1 = a't + b, \qquad a' - a = \delta > 0,$$

alors

$$z_2 = \frac{(at+b)}{a'+b}(ct+d) = \frac{y_2}{k} \qquad (0 \leqq t \leqq \alpha),$$

d'où

$$z''_2 = (ct+d)\frac{2\delta ba'}{(a't+b)^3} - \frac{2c\delta b}{(a't+b)^2} = \frac{2\delta b(a'd-bc)}{(a't+b)^3}$$

pour $x = \alpha$, z'_2 possède la discontinuité

$$\Delta y'_2 - \frac{k'}{k^2}y_2, \qquad k' = \frac{a't+b}{at+b},$$

soit

$$\delta_2 - \frac{\delta b}{(a'\alpha+b)^2}.$$

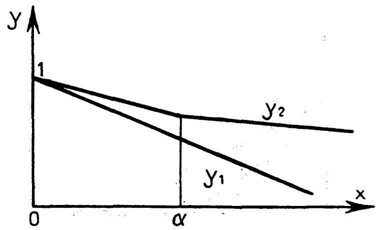

Fig. 5.

Si $ad - bc > 0$, on peut choisir $\delta = a' - a$ assez petit pour satisfaire à

$$a'd - bc > 0 \qquad (\text{c'est-à-dire } z''_2 > 0)$$

et

$$\delta_2 - \frac{\delta b}{(a'\alpha+b)^2} \geqq 0 \qquad (\text{soit } \Delta z'_2 \geqq 0).$$

Donc, il y a décomposabilité et la condition $ad - bc > 0$ équivaut à

$$\frac{|y'_2|}{y_2} < \frac{|y'_1|}{y_1} \qquad \text{en } x = \alpha,$$

soit, comme déjà vu, à

$$|y'_2(0)| < |y'_1(0)|, \qquad (m_2 < m_1).$$

Si $m_2 = m_1$, nous ne pouvons conclure à une décomposition de cette sorte comme dans le cas où y''_2 est supposé non $\equiv 0$ dans un voisinage $x - \alpha = \varepsilon > 0$.

Résumons les résultats obtenus dans ce paragraphe :

y étant supposé décomposable en $y_1 y_2$, on conclut à une infinité d'autres décompositions :

a. Si sur un segment si petit soit-il, y''_1 et y''_2 $\left(\text{ou } \frac{\Delta y'_1}{\Delta x} \text{ et } \frac{\Delta y'_2}{\Delta x}\right)$ sont $\geqq \eta$;

b. Si y''_2, par exemple $\left(\text{ou } \frac{\Delta y'_2}{\Delta x}\right)$ seulement est $\geqq \eta$ sur un segment, mais si à l'une des extrémités de ce segment y'_1 est discontinue;

c. Supposons y''_1 et y''_2 continues pour $x > 0$. La conclusion est positive si y''_1 ou y''_2 tendent vers une limite > 0 quand $x \to 0$, sinon :

ou bien, y''_1 et y''_2 ne sont chacune ni $\equiv 0$, ni $> \eta$ dans un voisinage de o, on conclut à l'infinie décomposabilité;

ou des deux courbes C_1 et C_2, il y en a une pour laquelle y'' est la première $\neq 0$ lorsque x croît à partir de o, soit C_2 cette courbe :

si $|y'_1| \geqq |y'_2|$ en o, il y a infinie décomposabilité;

si $|y'_1| < |y'_2|$ en o, il n'y a pas en général possiblité d'une infinité de décompositions par une modification locale.

Une conclusion analogue vaut si au lieu d'avoir $y''_2 > 0$ au voisinage de $x = a$, y'_2 possède une discontinuité, quoi qu'il se passe ensuite, c'est-à-dire si y_1 et y_2

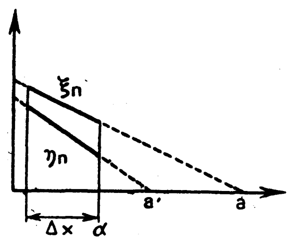

Fig. 6.

sont linéaires entre o et a, avec une discontinuité de y'_2 en a, mais c'est la conclusion négative qui vaut pour $y'_1 = y'_2$ de o à a.

Remarques. — On pouvait *a priori* se demander s'il n'existe pas de conditions locales qui, vérifiées partout par y, assurent la divisibilité unique ou multiple; par exemple,

$$yy'' - py'^2 \geqq 0 \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq p \leqq 1\right)$$

assure la décomposition en

$$y = y^q . y^{1-q} \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq q \leqq p\right).$$

Une façon d'approcher ce problème pourrait être la suivante : approchant y_1 et y_2 par des lignes polygonales inscrites ξ_n, η_n, y est approchée par une succession ζ_n d'arcs de paraboles ayant chacun deux points communs avec $y(x)$, situés entre ces points au-dessus de $y(x)$ et satisfaisant à la limite, en ces points à une condition que nous allons déterminer. Soient en un point $x = \alpha$, δ et δ' les discontinuités des pentes des deux lignes polygonales, $-m$ et $-m'$ ces pentes à gauche de ce point, ε et ε' les discontinuités de ζ'_n et ζ''_n ($\zeta_n = \xi_n \eta_n$). Pour simplifier, supposons que y'' est continue, alors si les abscisses de deux sommets consécutifs diffèrent de moins de Δx, infiniment petit principal, ε et ε' seront aussi infiniment petits d'ordre au moins égal à 1 ; de (cf. *fig.* 6)

$$\frac{1}{2}\zeta'' = mm', \qquad \zeta' = \xi m' + \eta m,$$

on tire

$$\varepsilon = \delta\eta + \delta'\xi, \qquad \frac{1}{2}\varepsilon' = \delta m' + \delta' m + \delta\delta'$$

pour Δx assez petit, $\delta\delta'$, infiniment petit d'ordre au moins égal à 2 peut être négligé; donc, en prenant $\xi = m(a - x)$, $\eta = m'(a' - x)$ dans l'intervalle

$$(\alpha - \Delta x, \alpha),$$

$$\delta \sim \frac{\varepsilon m - \xi\frac{\varepsilon'}{2}}{(m\eta - m'\xi)} = \frac{\varepsilon - (a - x)\frac{\varepsilon'}{2}}{m'(a' - a)}$$
$$\delta' \sim -\frac{\varepsilon m' - \eta\frac{\varepsilon'}{2}}{(m\eta - m'\xi)} = -\frac{\varepsilon(a' - x)\frac{\varepsilon'}{2}}{m(a' - a)}. \qquad \text{avec} \quad x = \alpha.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes polygonales ξ, η soient convexes est

$$\delta > 0, \qquad \delta' > 0.$$

Soit, par exemple, $a' > a$, les conditions deviennent

$$\varepsilon - (a - x)\frac{\varepsilon'}{2} > 0,$$
$$-\varepsilon + (a' - x)\frac{\varepsilon'}{2} > 0 \qquad \text{pour} \quad x = \alpha$$

(une des deux inégalités pouvant être prise au sens large, $\geqq 0$) et se réduisent à $\delta\delta' \geqq 0$ ou

$$-\varepsilon^2 + \varepsilon\varepsilon'\left(\frac{a + a'}{2} - x\right) - (a - x)(a' - x)\frac{\varepsilon'^2}{4} \geqq 0 \quad \text{en } \alpha$$

ou, puisque

$$(a - \alpha)(a' - \alpha) = \frac{\zeta_n(\alpha)}{mm'} = \frac{2y(\alpha)}{\zeta''_n} \qquad \text{et} \qquad x - \frac{a + a'}{2} = \frac{\zeta'_n}{\zeta''_n},$$

$$\zeta''(\Delta\zeta')^2 + \frac{\zeta}{2}(\Delta\zeta'')^2 - \zeta'\Delta\zeta'\Delta\zeta'' \leqq 0 \quad \text{(au 3}^{\text{e}}\text{ ordre près).} \tag{6}$$

(l'égalité en un point entraîne $\delta = 0$, $\delta' > 0$ ou $\delta' = 0$, $\delta > 0$).

Concluons : une condition nécessaire et suffisante de décomposabilité est que y puisse être approchée par des courbes ζ_n, composées d'une suite d'arcs de paraboles (à convexité vers les $\zeta > 0$), situées au-dessus de $y(x)$ et telles que lorsque les points de raccordement [qui sont sur $y(x)$] sont assez voisins les uns des autres (pour n assez grand), les discontinuités $\Delta\zeta'$ et $\Delta\zeta''$ en ces points satisfassent à la condition (6). Mais on ne peut rien tirer de cette relation pour un passage à la limite ($\zeta'' \to y''$, $\zeta' \to y'$ mais $\Delta\zeta'$, $\Delta\zeta''$ n'ont pas de signification simple).

Dans le cas où y est une succession d'un nombre fini d'arcs de paraboles, la condition, analogue à (6) mais plus compliquée, est nécessaire et suffisante pour la décomposition en deux lignes polygonales, mais nullement nécessaire pour des décompositions plus générales. Il résulte de notre étude générale (§ **3**, a) qu'il y a toujours décomposabilité (d'une infinité de façons). S'il y a une infinité d'arcs de parabole, y s'annulant à distance finie, ce sont les conclusions du paragraphe **3**, b qu'il faut appliquer.