

BULLETIN DE LA S. M. F.

CLAUDE BERGE

Sur une convexité régulière non linéaire et ses applications à la théorie des jeux

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 301-315

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__301_0

© Bulletin de la S. M. F., 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE CONVEXITÉ RÉGULIÈRE NON LINÉAIRE ET SES APPLICATIONS
A LA THÉORIE DES JEUX ;**

PAR M. CLAUDE BERGE.

I. — Introduction.

Considérons deux espaces linéaires E et E' , qui sont algébriquement duals : à tout élément x de E et f de E' , on peut faire correspondre un nombre (f, x) , ou *produit scalaire*, vérifiant les propriétés :

- (1) $(f, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (f, x_1) + \lambda_2 (f, x_2)$,
- (2) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, x) = \lambda_1 (f_1, x) + \lambda_2 (f_2, x)$,
- (3) $(f, x) = 0 \quad (x \in E) \quad \text{entraîne} \quad f = 0$,
- (4) $(f, x) = 0 \quad (f \in E') \quad \text{entraîne} \quad x = 0$.

Un ensemble C de E est dit *régulièrement convexe* si à tout élément $x_0 (\notin C)$ on peut faire correspondre un élément f de E' et un nombre α tels que :

$$\begin{aligned} (f, x_0) &> \alpha, \\ (f, x) &< \alpha \quad (x \in C). \end{aligned}$$

Cette notion a été introduite par Krein et Smulian [9], en prenant pour E' un espace de Banach B , et pour E son dual B^* ; depuis ces dernières années, ce cas a fait l'objet de nombreux développements, notamment par Smulian et Gantmakher [15], Milman [11], Krein et Milman [8], Clarkson [6].

Nous nous proposons ici de modifier la définition usuelle, de façon à pouvoir étendre ces résultats à une classe, aussi large que possible, de problèmes non linéaires.

En particulier, dans une deuxième partie, nous les appliquons à l'élaboration d'une théorie non linéaire des jeux de stratégies, avec pour *fonction de résultat* :

$$\Phi(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i \varphi_{ij}(q_j).$$

Dans le cas où $\varphi_{ij}(t) = h_{ij}t$, h_{ij} étant une constante, von Neumann et Morgenstern ont démontré que le jeu est *parfait* [12]; on généralisera ce résultat en démontrant que le jeu est encore parfait lorsque les φ_{ij} sont des fonctions convexes, continues, et nulles à l'origine. Les théorèmes suivants sont consacrés à l'étude des *bonnes stratégies*, sous l'angle de la convexité régulière non

linéaire. On retrouvera d'ailleurs quelques « topics » de la théorie classique comme cas particuliers.

Les théorèmes IV et V laissent également entrevoir certaines possibilités d'application à des problèmes non linéaires du calcul des variations et des équations intégrales.

II. — Propriétés des ensembles régulièrement convexes.

Définition générale. — Soit, sur un espace vectoriel topologique E, une famille \mathcal{F} de fonctions scalaires convexes et semi-continues inférieurement; on supposera que \mathcal{F} est conique-convexe, c'est-à-dire que

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0; f_1, f_2 \in \mathcal{F} \quad \text{entraîne} \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{F}.$$

Dans ce cas, nous dirons qu'un ensemble X de E est *régulièrement convexe- \mathcal{F}* si, à tout x_0 n'appartenant pas à X, on peut faire correspondre un élément f de \mathcal{F} et un nombre α tels que

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \alpha, \\ f(x) &< \alpha \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Dans cette définition, on peut inclure le cas où X est l'espace E tout entier, ou l'ensemble vide \emptyset .

Un ensemble X *régulièrement convexe- \mathcal{F}* est évidemment convexe, car sans cela il existerait deux éléments x_1 et x_2 de X et deux nombres p_1 et p_2 ($p_1, p_2 \geq 0; p_1 + p_2 = 1$) tels que $p_1 x_1 + p_2 x_2 \notin X$, et que

$$\begin{aligned} f(p_1 x_1 + p_2 x_2) &> \alpha, \\ f(x) &< \alpha \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Or ces inégalités sont incompatibles, car on en déduirait aussi :

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) < \alpha.$$

Notations. — Si A est un ensemble quelconque, désignons par (A) , \overline{A} et $[A]$ les enveloppes conique, convexe, et conique-convexe engendrées par A. On vérifie immédiatement que $[A] = \overline{(A)} = \overline{\overline{A}}$. Si un ensemble X de E est régulièrement convexe- \mathcal{F}_i pour tout $i (\in I)$, il est régulièrement convexe au sens

$$\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i = \left\{ \sum_{i \in I} f_i \mid \text{fini } i \in I; f_i \in \mathcal{F}_i \right\}.$$

Hyperplans au sens \mathcal{F} . — Dans tout ce qui va suivre, nous supposons donnée la famille convexe conique \mathcal{F} , et l'on dira indifféremment qu'un ensemble X est régulièrement convexe ou régulièrement convexe- \mathcal{F} .

On appellera *hyperplan- \mathcal{F}* , ou plus simplement hyperplan, les ensembles de la forme

$$H_f(\alpha) = \{x \mid x \in E; f(x) = \alpha\},$$

où α est un nombre réel quelconque, et où f est un élément de \mathcal{F} . On notera que, si f est continue, $H_f(\alpha)$ est un ensemble fermé.

On appelle *demi-espace sous-tendu par cet hyperplan* l'ensemble

$$\Delta_f(\alpha) = \{x \mid x \in E; f(x) \leq \alpha\}.$$

Tout *demi-espace est régulièrement convexe*, car si x_0 n'appartient pas à $\Delta_f(\alpha)$,

on a :

$$f(x_0) > \alpha, \quad f(x) \leq \alpha \quad (x \in \Delta_f).$$

On notera que Δ_f est un ensemble fermé. On notera également que l'enveloppe convexe \overline{H}_f de H_f est contenue dans Δ_f , car si $x_0 \in \overline{H}_f$, on peut écrire

$$x_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad [x_1, x_2, \dots, x_n \in H_f(\alpha)], \\ f(x_0) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) \leq (\sum p_i) \alpha = \alpha.$$

Un ensemble X de E étant donné, on dira que $H_f(\alpha)$ est un *hyperplan d'appui* de X si

- 1° $X \subset \Delta_f(\alpha)$,
- 2° $X \cap H_f(\alpha) \neq \emptyset$.

On dira de même que $H_f(\alpha)$ est un *hyperplan de contre-appui* de X si :

- 1° $X \subset \{x \mid x \in E; f(x) \geq \alpha\}$,
- 2° $X \cap H_f(\alpha) \neq \emptyset$.

THÉORÈME I. — *f étant un élément donné de $\overline{\mathcal{F}}$, et C un convexe compact non vide de E, il existe pour C un et un seul hyperplan de contre-appui du type $H_f(\alpha)$.*

Cette propriété préliminaire est le cas particulier d'un théorème connu, et nous ne l'établissons ici qu'en raison de sa simplicité; posons en effet :

$$m = \inf_{x \in C} f(x).$$

Si $a > m$, l'ensemble

$$C(a) = \{x \mid x \in C; f(x) \leq a\}$$

est fermé et non vide. Comme C est compact, on a la propriété de l'intersection finie :

$$\bigcap_{a > m} C(a) \neq \emptyset.$$

Mais $\bigcap_{a > m} C(a)$ n'est autre que l'intersection de $H_f(m)$ et de C; $H_f(m)$ est donc un hyperplan d'appui, et le seul qui soit « parallèle » à f .

THÉORÈME II. — *Si C est régulièrement convexe, il est convexe et fermé.*

En effet, C est l'intersection des demi-espaces $\Delta_f(\alpha)$ qui le contiennent; or ceux-ci sont des ensembles convexes et fermés.

THÉORÈME III (1). — *Si C_i est régulièrement convexe quel que soit l'indice $i \in I$,*

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i$$

est régulièrement convexe.

(1) On voit donc que l'on pourra parler par la suite d'une enveloppe régulièrement convexe d'un ensemble X de E, qui sera l'intersection de tous les ensembles régulièrement convexes contenant X.

En effet, si $x_0 \notin C$, on a pour un indice $i_0 : x_0 \notin C_{i_0}$; il existe donc un nombre α et un élément f de \mathcal{F} tels que

$$f(x_0) > \alpha, \quad f(x) < \alpha \quad (x \in C \subset C_{i_0}).$$

THÉORÈME IV, OU THÉORÈME DE LA SÉPARATION ⁽²⁾. — *Si C est un ensemble convexe compact, et si C' est un ensemble régulièrement convexe disjoint de C, il existe un hyperplan $H_f(\alpha)$ qui sépare strictement C de C' :*

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \alpha & (x \in C), \\ f(x) &< \alpha & (x \in C'). \end{aligned}$$

En effet, à tout $x(x \in C)$, faisons correspondre un élément f_x de \mathcal{F} et un nombre α_x tels que

$$\begin{aligned} f_x(x) &> \alpha_x, \\ f_x(y) &< \alpha_x & (y \in C'). \end{aligned}$$

C étant compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini n d'ensembles ouverts du type :

$$\Omega_i = \{x / f_i(x) > \alpha_i\} \quad (\text{où } f_i = f_{x_i}; \alpha_i = \alpha_{x_i}; x_1, x_2, \dots, x_n \in C).$$

Considérons l'application σ de E dans R^n , définie par :

$$x \rightarrow \sigma x = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Dans R^n , $\sigma C'$ est contenu dans un cône K, convexe et ouvert, d'équation

$$\xi_i < \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

σC est disjoint de K; démontrons que $\overline{\sigma C}$ est aussi disjoint de K. En effet, s'il n'en n'était pas ainsi, il existerait m points x_1, x_2, \dots, x_m de C tels que

$$p_1(\sigma x_1) + p_2(\sigma x_2) + \dots + p_m(\sigma x_m) = \xi \in K.$$

Or cette hypothèse est absurde, car on a, pour un indice i bien choisi, la relation :

$$(\xi)_i = p_1 f_i(x_1) + p_2 f_i(x_2) + \dots + p_m f_i(x_m) \geq f_i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m) > \alpha_i.$$

Le convexe $\overline{\sigma C}$ est donc disjoint du cône K, et, d'après un théorème bien connu dans l'espace R^n ⁽³⁾, il existe un hyperplan $\sum_1^n \lambda_i \xi_i = \alpha$ séparant K et $\overline{\sigma C}$. Ici, en outre, les coefficients λ_i sont de même signe, que l'on peut supposer positif, quitte à changer celui de α .

$f(x) = \sum \lambda_i f_i(x)$ appartient à \mathcal{F} et vérifie :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \alpha & (x \in C); \\ f(x) &< \alpha & (x \in C'). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

⁽²⁾ Ce théorème peut être considéré comme la généralisation d'un théorème de Mazur [10].

⁽³⁾ Soit C un convexe ouvert non vide de R^n , et C' un convexe non vide de C. Il existe un hyperplan fermé séparant C et C', et ne rencontrant pas C (cf., par exemple, N. Bourbaki, [5], p. 71).

Remarque 1. — On notera également que, dans ce théorème, l'hyperplan de séparation s'écrit :

$$\sum_1^n \lambda_i f_i(x) = \alpha = \sum_1^n \lambda_i \alpha_i.$$

avec

$$f_i(x_i) > \alpha_i > \sup_{x \in C} f_i(x); \quad x_i \in C \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ainsi, si tous les nombres de séparation α_i peuvent être pris positifs, le nombre α sera aussi positif.

Remarque 2. — Si l'on suppose, dans l'énoncé du théorème IV, que les fonctions de \mathcal{F} sont continues, on a montré ailleurs, par un raisonnement analogue, que l'on a l'inégalité stricte : on aura pour un f de \mathcal{F} :

$$f(x) > \alpha \quad (x \in C), \quad f(x) < \alpha \quad (x \in C').$$

(pour la démonstration, cf. *C. R. Acad. Sc.*, 238, 1954, p. 000).

Ensemble polaire X^* d'un ensemble X . — Par définition, l'ensemble polaire d'un ensemble $X (\subset E)$ sera

$$X^* = \{ f / f \in \mathcal{F}; f(x) \leq 0, \text{ q. q. } s. x \in X \}.$$

On définira de même l'ensemble polaire d'un ensemble $F (\subset \mathcal{F})$ par :

$$F^* = \{ x / x \in E; f(x) \leq 0, \text{ q. q. } s. f \in F \}.$$

On a les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. — F^* est régulièrement convexe au sens $\overline{(F^*)} = F^*$.

En effet, si $x_0 \notin F^*$, il existe un $f (\in F)$ tel que

$$f(x_0) > 0, \quad f(x) \leq 0 \quad (x \in F^*).$$

PROPRIÉTÉ 2. — Si les fonctions de \mathcal{F} sont nulles à l'origine F^* est étoilé, Si $x \in F^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x) + 0 \leq 0 \quad (f \in F).$$

Donc $\lambda x \in F^*$.

PROPRIÉTÉ 3. — Si les fonctions de \mathcal{F} sont nulles à l'origine, et si X est un cône régulièrement convexe, on a $X^{**} = X$.

En effet, si $x_0 \in X$, on a $x_0 \in X^{**}$, car

$$f(x_0) \leq 0 \quad (f \in X^*),$$

Inversement, si $x_0 \notin X$, il existe une fonction f telle que

$$f(x_0) > \alpha, \quad f(x) < \alpha \quad (x \in X);$$

comme $0 \in X$, on a :

$$f(x_0) > \alpha > 0. \quad (1)$$

Si $x \in X$, $\lambda \geq 1$, on a :

$$\lambda x \in X \quad \text{et} \quad \alpha > f(\lambda x) \geq \lambda f(x).$$

Mais λ pouvant être pris aussi grand que l'on veut, il en résulte :

$$f(x) \leq 0 \quad (x \in X).$$

f appartient donc à X^* , et, en tenant compte de (1), on a :

$$x_0 \notin X^{**}.$$

C. Q. F. D.

THÉOREME V (1). — Soit, dans E , un ensemble convexe compact C . Si à tout $f(\in \mathcal{F})$, on peut faire correspondre un $x_f(\in C)$, de sorte que $f(x_f) \leq 0$, il existe un $x_0(\in C)$ tel que

$$f(x_0) \leq 0 \quad (f \in \mathcal{F}).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait :

$$C \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

D'après la propriété 1, l'ensemble \mathcal{F}^* est régulièrement convexe; d'après le théorème IV, il existe donc un f qui appartient à \mathcal{F} et un nombre α tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \alpha & (x \in C), \\ f(x) &< \alpha & (x \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

D'après la remarque 1, on peut même supposer $\alpha > 0$, d'où :

$$f(x) > 0 \quad (x \in C),$$

ce qui est contraire à l'énoncé.

C. Q. F. D.

Profil \tilde{C} d'un convexe C . — Rappelons qu'un point x de C est dit *extrémal* si l'on ne peut avoir

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2; \quad (x_1 \neq x_2; x_1, x_2 \in C; p_1, p_2 > 0; p_1 + p_2 = 1).$$

L'ensemble des points extrémaux d'un ensemble C est appelé son *profil*, et sera désigné par \tilde{C} .

Lorsque l'on considère un espace E localement convexe séparé, on sait (2) que tout hyperplan d'appui (au sens usuel) d'un ensemble C convexe compact contient un point extrémal de C , et que, par conséquent, le profil \tilde{C} n'est pas vide. Nous allons étendre ce résultat pour la famille \mathcal{F} définie plus haut.

(1) C'est la généralisation d'un théorème linéaire de H. F. Bohnenblust et S. Karlin [4]; il est à noter que dans l'énoncé de MM. Bohnenblust et Karlin, on supposait que le cône \mathcal{F} est fermé. La démonstration donnée ici montre que cette hypothèse est superflue. Dans le cas particulier où E est l'espace Euclidien à N dimensions, on retrouve d'ailleurs ici, sous une autre forme, un résultat de Bohnenblust, Karlin et Shapley ([7], vol. 1, pp. 182-192).

(2) Cf. M. KREIN et D. MILMAN [8].

LEMME. — Soit, dans un espace localement convexe séparé E , un ensemble compact X . Si son enveloppe convexe-compacte C existe, le profil \check{C} est contenu dans X .

En effet, soit $x_0 \notin X$; il existe un voisinage V convexe fermé de l'origine et des éléments x_1, x_2, \dots, x_n de X tels que $\{x_i + V / i = 1, 2, \dots, n\}$, soit un recouvrement de X , et non de x_0 .

$X_i = X \cap (x_i + V)$ étant contenu dans un ensemble C convexe et compact, il admet une enveloppe convexe-compacte que l'on désignera par C_i .

On a $C_i \subset C$ quel que soit i , donc

$$\bigcup_1^n C_i \subset C.$$

En outre,

$$\bigcup_1^n C_i \supset \bigcup_1^n X_i = X;$$

mais on sait par ailleurs que $\bigcup_1^n C_i$ est compact, et, par conséquent, on peut aussi écrire :

$$\bigcup_1^n C_i \supset C.$$

Autrement dit, $C = \bigcup_1^n C_i$, et l'on peut aussi écrire :

$$x_0 = \sum_1^n p_i x_i; \quad p_i \geq 0; \quad \sum_1^n p_i = 1; \quad x_i \in C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ainsi, si x_0 était un point extrémal de C , il existerait un indice i_0 tel que

$$x_0 = x_{i_0} \in C_{i_0} \subset x_{i_0} + V.$$

Comme ceci contredit l'une de nos hypothèses, on a $x_0 \in \check{C}$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME VI. — Dans un espace localement convexe séparé, tout hyperplan d'appui fermé d'un ensemble C convexe compact contient un point extrémal de C .

Si f est continue, il existe pour C (cf. dém., théorème I) un hyperplan d'appui d'équation $f(x) = M$, et son intersection X avec C est fermée non vide; comme fermée contenue dans un ensemble C compact, X est compact. En outre, son enveloppe convexe-compacte existe, et, d'après le théorème de Krein et Milman, admet au moins un point extrémal x_0 .

D'après le lemme, $x_0 \in X$; montrons que $x_0 \in \check{C}$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait écrire :

$$x_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2; \quad x_1, x_2 \in C; \quad p_1, p_2 > 0; \quad p_1 + p_2 = 1.$$

On aurait :

$$M = f(x_0) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \leq p_1 M + p_2 M = M.$$

Ceci n'est possible que si l'on a :

$$f(x_1) = f(x_2) = M.$$

Mais alors $x_1, x_2 \in X$, et x n'est pas extrémal de l'enveloppe convexe-compacte de X , ce qui est contraire aux hypothèses précédentes.

On a donc bien le théorème énoncé.

Remarque. — On peut donner une plus grande portée à ce théorème si l'on remarque que, à moins que le convexe C soit tout entier contenu dans son hyperplan d'appui H_f , celui-ci ne contiendra jamais un point interne de C . En effet, supposons qu'il existe dans C un élément x_0 interne tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x) = M,$$

et un élément x_1 tel que $f(x_1) < M$. Il existera un élément x_2 de C tel que

$$x_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (p_1, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1).$$

On aura alors :

$$f(x_0) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) < M.$$

Ceci étant contraire à nos hypothèses, on a bien le résultat annoncé. Comme tout point intérieur de C est un point interne, on peut aussi énoncer :

Un hyperplan d'appui (fermé) d'un convexe C est disjoint de l'intérieur de C .

Pseudo-cône engendré par un ensemble X . — A tout élément x de E , faisons correspondre l'ensemble $e(x)$ des éléments y tels que les inégalités $f(y) < 0$, $f(x) > 0$, $f \in \mathcal{F}$ soient incompatibles. Si X est un ensemble non vide de E , on posera : $e(X) = \bigcup_{x \in X} e(x)$; pour l'ensemble vide \emptyset , on posera : $e(\emptyset) = \emptyset$.

Par définition, on dira que $e(X)$ est le *pseudo-cône engendré par X* ; il contient évidemment X . Dans le cas où E est un espace localement convexe, et où \mathcal{F} est son dual topologique, on voit immédiatement, d'après le théorème de Hahn-Banach, que $e(X)$ n'est autre que le cône (X) engendré par X .

THÉOREME VII. — *Si les fonctions de \mathcal{F} sont continues, la fonction multivalente $e(x)$ est continue dans la topologie \mathcal{C} .*

On dit que $y_0 \in \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} e(x)$ s'il existe deux familles $\{x_i\}_{i \in I}$ et $\{y_i\}_{i \in I}$, où I est un domaine filtré, telles que

$$\{x_i\}_{i \in I} \rightarrow x_0, \quad \{y_i\}_{i \in I} \rightarrow y_0, \quad y_i \in e(x_i), \quad x_i \neq x_0 \quad (i \in I).$$

$e(x)$ est dit *continu* en x_0 (ou, pour certains auteurs, *semi-continu supérieurement*) si l'on a

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} e(x) \subset e(x_0).$$

Pour qu'une fonction multivalente $e(x)$ soit continu, il faut et il suffit que, dans l'espace produit $E \times E$, son graphe \mathcal{E} soit un ensemble fermé; montrons donc que si $y_0 \notin e(x_0)$, il existe un voisinage élémentaire $\omega(x_0 \times y_0)$ disjoint de \mathcal{E} .

Par définition, il existe une fonction f de \mathcal{F} telle que $f(y_0) < 0$, $f(x_0) > 0$; considérons les voisinages ouverts

$$V(x_0) = \{x/f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad V(y_0) = \{y/f(y) < 0\}.$$

Le voisinage élémentaire

$$\omega(x_0 \times y_0) = V(x_0) \times V(y_0)$$

répond à la question.

THÉOREME VIII. — *Si X est un ensemble compact, et s'il existe un ensemble convexe C tel que $X \subset C \subset e(X)$, à tout x_0 n'appartenant pas à $e(X)$ on pourra faire correspondre une fonction f de \mathcal{F} telle que :*

$$f(x_0) < 0, \quad f(x) \geq 0 \quad (x \in C).$$

En effet, si $x_0 \notin e(X)$, on pourra faire correspondre à tout x de X une fonction f_x de \mathcal{F} telle que :

$$f_x(x_0) < 0, \quad f_x(x) > 0.$$

X étant compact, il existe dans X des éléments x_1, x_2, \dots, x_n , tels que, pour tout x de X, il existe un indice i vérifiant

$$f_{x_i}(x) = f_i(x) > 0.$$

Considérons l'application de E dans R^n définie par

$$x \rightarrow \sigma x = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Dans R^n , le cône ouvert K d'équation $\xi_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) contient σx_0 et est disjoint de σX , ainsi que de $\sigma e(X)$, et, par conséquent, du convexe $\overline{\sigma C}$.

On peut donc séparer σx_0 et $\overline{\sigma C}$ par un hyperplan d'équation $\sum_1^n \lambda_i \xi_i = 0$, avec $\lambda_i \geq 0$ quel que soit i . La fonction $f = \sum_1^n \lambda_i f_i$ appartient à \mathcal{F} , et l'on a

$$f(x_0) < 0, \quad f(x) \geq 0 \quad (x \in C).$$

COROLLAIRE. — *Supposons que les fonctions de \mathcal{F} soient nulles à l'origine si un ensemble X compact ne contient pas l'origine, et engendre un pseudo-cône $e(X)$ convexe saillant, il existe une fonction f ($\in \mathcal{F}$) de telle que*

$$\inf_{x \in X} f(x) > 0.$$

Si $x_0 \in X$, on a, puisque $e(X)$ est saillant, $-x_0 \notin e(X)$; d'après le théorème VII, il existe une fonction f_{x_0} de \mathcal{F} telle que :

$$\begin{aligned} f_{x_0}(-x_0) &< 0, \\ f_{x_0}(x) &\geq 0 \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Par suite de la convexité de f_{x_0} , on a

$$f_{x_0}(x_0) > 0.$$

X étant compact, on peut trouver des éléments x_1, x_2, \dots, x_n de X tels que, en posant

$$f_i = f_{x_i}, \delta_i = \frac{f_i(x_i)}{2},$$

on puisse faire correspondre à tout x de X un indice i vérifiant

$$f_i(x) > \delta_i.$$

Soit δ le plus petit des nombres $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$.

$f = \sum_1^n f_i$ appartient à \mathcal{F} , et l'on a

$$f(x) > \delta \quad (x \in X).$$

On a donc bien le résultat énoncé.

Ensembles bordés au sens \mathcal{F} . — On dira qu'un ensemble X est *bordé- \mathcal{F}* si à tout x_0 n'appartenant pas à X , on peut faire correspondre une fonction f de \mathcal{F} telle que

$$f(x_0) < 0, \quad f(x) \geq 0 \quad (x \in X).$$

Cette propriété constitue également une généralisation de la convexité régulière linéaire, et, à la lumière des théorèmes précédents, on voit qu'elle jouit de propriétés analogues à celles de la convexité régulière- \mathcal{F} .

PROPRIÉTÉ I. — *Si les fonctions de \mathcal{F} sont continues, tout ensemble bordé est fermé.*

Un ensemble bordé est en effet l'intersection des ensembles fermés $\{x | f(x) \geq 0\}$ qui le contiennent.

PROPRIÉTÉ II. — *Toute intersection d'ensembles bordés est un ensemble bordé.*

La démonstration est immédiate.

PROPRIÉTÉ III. — *Tout pseudo-cône $e(X)$ convexe et engendré par un ensemble X compact est bordé.*

Cela résulte du théorème VIII.

PROPRIÉTÉ IV. — *Tout ensemble bordé est un pseudo-cône topologique.*

Considérons, au lieu de la relation e , la relation e' définie de la façon suivante : on dira que $y \in e'(x)$ si et seulement si $f(x) \geq 0$ entraîne $f(y) \geq 0$, tandis que $f(y) \leq 0$ entraîne $f(x) \leq 0$.

On voit immédiatement que $X \subset e'(X) \subset e(X)$; en outre, la relation $e'(X)$ est une fermeture topologique, car on a :

1. $e'(X_1 \cup X_2) = e'(X_1) \cup e'(X_2)$;
2. $e'(\emptyset) = \emptyset$;
3. $x \in e'(x)$;
4. $e'[e'(X)] = e'(X)$.

Elle définit donc une topologie véritable [alors que $e(X)$ ne définit qu'une pseudo-topologie], et pour cette raison, on dit que $e'(X)$ le *pseudo-cône topologique engendré par X*.

On remarque immédiatement que si X est bordé, on a $e'(X) = X$.

III. — Application à la théorie des jeux de stratégie non linéaire.

Définition. — Donnons-nous une matrice réelle $H = \|h_j^i\|$ (où $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Désignons par \mathfrak{X}_m l'ensemble des vecteurs $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ de R^m tels que

$$p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \sum_1^m p_i = 1.$$

On dira aussi que \vec{p} est une *stratégie*. Deux joueurs (A) et (B) jouent un jeu de stratégie s'ils choisissent respectivement une stratégie \vec{p} de \mathfrak{X}_m et une stratégie \vec{q} de \mathfrak{X}_n , le joueur (A) se proposant d'obtenir une valeur numérique aussi grande que possible pour $F(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i,j} h_j^i p_i q_j$, le joueur (B) essayant au contraire, d'obtenir la plus petite valeur numérique possible.

Dans certains problèmes d'économétrie, néanmoins, il arrive que la fonction $F(\vec{p}, \vec{q})$ — appelée aussi *résultat du jeu* — ne soit linéaire que par rapport à une seule des variables. Nous nous proposons ici d'étudier le cas où le résultat est

$$\Phi(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i \varphi_{ij}(q_j),$$

où les fonctions $\varphi_{ij}(t)$ remplissent les conditions suivantes :

- 1° Elles sont convexes dans le segment $[0, 1]$;
- 2° Elles sont continues dans ce segment;
- 3° Elles sont nulles pour $t = 0$.

Si $\varphi_{ij}(t) = h_j^i t$, on retrouve le cas classique.

Jeux parfaits. — Rappelons ici quelques définitions et notations connues (7). On dit que le joueur (B) peut garantir le résultat α s'il connaît une stratégie q_0 telle que

$$\Phi(p, q_0) \leq \alpha \quad (p \in \mathfrak{X}_m).$$

(7) Cf. C. BERGE, [2] et [3].

Si le joueur (B) joue sans connaître le choix de son adversaire, le plus petit résultat qu'il peut garantir est

$$\omega = \inf_q \sup_p \Phi(p, q)$$

(on notera d'ailleurs que les bornes supérieures et inférieures sont ici des maxima et des minima).

Si le joueur (B) a la possibilité de connaître le choix de son adversaire avant de jouer, le plus petit résultat qu'il peut garantir *a priori* est

$$\nu = \sup_p \inf_q \Phi(p, q).$$

On a évidemment $\nu \leq \omega$; si $\nu = \omega$, on dit que le jeu est *parfait*. Dans ce cas, $\nu = \omega = V$ est appelé la *valeur* du jeu.

THÉORÈME 1. — *Les jeux de stratégie considérés ici sont parfaits.*

Par suite de la définition de ν , on a :

$$\inf_q \Phi(p, q) \leq \nu \quad (p \in \mathfrak{X}_m).$$

Autrement dit, à toute stratégie p ($\in \mathfrak{X}_m$), on peut faire correspondre une stratégie q telle que :

$$\Phi(p, q) - \nu = \sum_{i,j} p_i [\varphi_{ij}(q_j) - \nu q_j] \leq 0.$$

Considérons la famille \mathfrak{F}_ν , formée des fonctions de γ ($\gamma \in \mathbb{R}^n$) d'expression

$$\Phi'(\xi, \gamma) = \sum_{i,j} \xi_i [\varphi_{ij}(\gamma_j) - \nu \gamma_j],$$

ξ étant un vecteur de \mathbb{R}^m de coordonnées non négatives. Cette famille est donc conique-convexe. En outre, les fonctions qui lui appartiennent sont convexes, continues et nulles en $\gamma = 0$. On peut donc définir avec \mathfrak{F}_ν une convexité régulière. En particulier, considérons dans \mathbb{R}^n l'ensemble convexe compact \mathfrak{X}_n ; et, dans \mathfrak{F}_ν , l'ensemble F formé des fonctions $\Phi'(p, \gamma)$, avec $p \in \mathfrak{X}_m$. (F) est convexe.

On peut donc appliquer le théorème IV: il existe une stratégie q_0 de (B) telle que

$$\begin{aligned} \Phi'(p, q_0) &\leq 0 & (p \in \mathfrak{X}_m), \\ \Phi(p, q_0) &\leq \nu & (p \in \mathfrak{X}_m). \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sup_p \Phi(p, q_0) &\leq \nu, \\ \inf_q \sup_p \Phi(p, q) &\leq \nu; \end{aligned}$$

or le premier membre de cette égalité n'est autre que ω , et l'on a par ailleurs $\omega \geq \nu$; on a donc $\nu = \omega$, c'est-à-dire que le jeu est parfait.

COROLLAIRE. — *Le jeu est parfait avec le résultat $\Phi(p, q) + k$, k étant une constante. Plus généralement, si $F(t)$ est une fonction monotone, le jeu est parfait avec pour résultat $F[\Phi(p, q)]$.*

Bonnes stratégies. — Supposons que le but de (A) — resp. de (B) — soit de majorer — resp. de minorer — le résultat $\Phi(p, q)$. On dira que x est une *bonne stratégie pour* (A) si $x \in \mathfrak{X}_m$, et si

$$\Phi(x, q) \geq V \quad (q \in \mathfrak{X}_n).$$

De même, on dira que y est une *bonne stratégie pour* (B) si $y \in \mathfrak{X}_n$, et si

$$\Phi(p, y) \leq V \quad (p \in \mathfrak{X}_m).$$

Les ensembles de bonnes stratégies pour (A) et pour (B) seront désignés par X et Y.

Supposons, au contraire, que le but de (A) — resp. de (B) — soit de minorer — resp. de majorer — le résultat $\Phi(p, q)$. Les bonnes stratégies seront définies en renversant le sens des inégalités précédentes, et leurs ensembles respectifs seront désignés par X' et Y'.

Les ensembles X, Y, X', Y' ne sont pas vides, d'après le théorème 1. Cherchons à les caractériser plus amplement.

THÉOREME 2. — *L'ensemble Y est convexe compact et, relativement à \mathfrak{X}_n il est régulièrement convexe au sens \mathfrak{F}_y .*

En effet, si $y_0 \notin Y$, $y_0 \in \mathfrak{X}_n$, il existe une fonction $\Phi'(p, y)$ de \mathfrak{F}_y telle que

$$\Phi'(p, y_0) > 0, \quad \Phi'(p, y) \leq 0 \quad (y \in Y').$$

Y est donc, relativement à \mathfrak{X}_n , régulièrement convexe- \mathfrak{F}_y . Autrement dit, Y est l'intersection du convexe compact \mathfrak{X}_n et d'un ensemble \bar{Y} régulièrement convexe, qui est aussi, d'après le théorème II, convexe fermé : Y est donc convexe et compact.

THÉOREME 2'. — *L'ensemble Y' est, relativement à \mathfrak{X}_n , bordé au sens \mathfrak{F}_y , et c'est un ensemble compact.*

(La démonstration sera calquée sur la précédente.)

THÉOREME 3. — *Les ensembles X et X' sont convexes compacts, et, relativement à \mathfrak{X}_m , régulièrement convexes au sens \mathfrak{F}_x , où \mathfrak{F}_x est l'espace linéaire engendré par les fonctions linéaires $\Phi(x, q)$, avec $q \in \mathfrak{X}_n$.*

(La démonstration sera calquée sur celle du théorème 2.)

THÉOREME 4. — *Soient deux stratégies x et y pour les joueurs (A) et (B). La condition nécessaire et suffisante pour que $x \in X'$, $y \in Y'$ est que l'on ait :*

$$(1) \quad \Phi(e_i, y) \geq \Phi(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(2) \quad \Phi(x, e_j) \leq \Phi(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Posons $\Phi(x, y) = V$; on a :

$$\Phi(p, y) = \Phi\left(\sum_i p_i e_i, y\right) = \sum_i p_i \Phi(e_i, y) \geq V \quad (p \in \mathfrak{X}_m),$$

$$\Phi(x, q) = \Phi\left(x, \sum_j q_j e_j\right) \leq \sum_j q_j \Phi(x, e_j) \leq V \quad (q \in \mathfrak{X}_n).$$

Ces deux relations montrent que V est la valeur du jeu; en outre, la première montre que y appartient à Y' , la seconde montrant que x appartient à X' .

COROLLAIRE. — *Considérons deux stratégies x et y vérifiant (1) et (2), et les ensembles*

$$I_1 = \{i / x_i \neq 0\}, \quad I_2 = \{i / \Phi(e_i, y) = V\}, \\ J_1 = \{j / y_j \neq 0\}, \quad J_2 = \{j / \Phi(x, e_j) = V\}.$$

On a

$$I_1 \subset I_2, \quad J_1 \subset J_2.$$

En effet, s'il existait un indice i_0 appartenant à I_1 et non à I_2 , on aurait :

$$\Phi(e_{i_0}, y) > V;$$

d'où :

$$V = \Phi(x, y) = \sum_i x_i \Phi(e_i, y) > V.$$

De même, s'il existait un indice j_0 appartenant à J_1 et non à J_2 , on aurait :

$$\Phi(x, e_{j_0}) < V;$$

d'où :

$$V = \Phi(x, y) \leq \sum_j y_j \Phi(x, e_j) < V.$$

Ces relations étant erronées, on a bien :

$$I_1 \subset I_2, \quad J_1 \subset J_2.$$

THÉOREME 5. — *Si les stratégies x et y vérifient (1) et (2), et s'il existe des ensembles I et J tels que $I_1 \subset I \subset I_2$, $J_1 \subset J \subset J_2$, et que la matrice des nombres $\varphi_{ij}(1)$ (où $i \in I$, $j \in J$) soit régulière, x appartient au profil \bar{X}' .*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait deux bonnes stratégies x' et x'' telles que $x = \frac{x' + x''}{2}$. Si $i \notin I$, on a

$$0 = x_i = \frac{x'_i + x''_i}{2} \geq 0.$$

On ne peut avoir l'égalité que si $x'_i = x''_i = 0$. Montrons que les vecteurs \bar{x}' et \bar{x}'' , projections de x' et x'' dans l'espace E^J , sont égaux.

On a quel que soit $j \in J$:

$$V = \Phi(\bar{x}, e_j) = \frac{1}{2} [\Phi(\bar{x}', e_j) + \Phi(\bar{x}'', e_j)] \leq V$$

On ne peut avoir l'égalité que si

$$\Phi(\bar{x}', e_j) = \Phi(\bar{x}'', e_j) = V.$$

On aura donc :

$$\sum_{i \in I} (x'_i - x''_i) \varphi_{ij}(1) = \Phi(\bar{x}'_i - \bar{x}''_i, e_j) = 0 \quad (j \in J).$$

La matrice $\|\varphi_{ij}(1)\|$ étant régulière, on a nécessairement $\bar{x}' = \bar{x}''$ et, par conséquent, $x' = x''$: l'élément x ne peut donc appartenir à \bar{X} . c. q. f. d.

Ce théorème montre, en particulier, que l'on peut déterminer \bar{X}' par une méthode rigoureusement analogue à celle de Shapley et Snow [13]. Avec les mêmes raisonnements que dans le cas linéaire, on pourra donc démontrer que X' est un hyperpolyèdre. Il serait intéressant de déterminer, les ensembles X , Y et Y' .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] L. ALAOGU, *Weak topologies of normed linear spaces* (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 252).
 - [2] C. BERGE, *Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs* (*J. Math. pures et appl.*, t. 32, 1953, p. 129).
 - [3] C. BERGE, *Le problème du gain dans la théorie généralisée des jeux sans informations* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 1).
 - [4] H. F. BOHNENBLUST et S. KARLIN, *On a theorem of Ville* (Cont. to the theory of games, I, 1950, p. 155).
 - [5] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique* 1^{re} partie, Livre V, chap. II, 1953.
 - [6] J. A. CLARKSON, *Uniformly convex spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 396).
 - [7] H. W. KUHN et A. W. TUCKER, *Contributions to the theory of games* (*Ann. Math. Studia*, Vol. I et II, 1950 et 1953).
 - [8] M. KREIN et D. MILMAN, *On extreme points of regular convex sets* (*Studia Math.*, t. 9, 1940, p. 133).
 - [9] M. KREIN et D. SMULIAN, *On regular convex sets in the space conjugate to a Banach space* (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 556).
 - [10] S. MAZUR, *Ueber Konvexe Mengen in linearen normierten Räumen* (*Studia Math.*, t. 4, 1933, p. 70).
 - [11] D. MILMAN, *On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1938, p. 243).
 - [12] O. MORGENSTERN et J. VON NEUMAN, *Theory of games and economic behavior*, Fr. 1944.
 - [13] P. C. ROSENBLUM, *Quelques classes de problèmes extrémaux* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 80, 1952, p. 183).
 - [14] L. S. SHAPLEY et R. N. SNOW, *Basic solution of discrete games* (Cont. to the theory of games, I, 1950, p. 27).
 - [15] V. SMULIAN et V. GANTMAKHER, *Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1937, p. 91).
 - [16] J. VILLE, *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs* [*Tr. du C. des Prob. et de ses applications* (Borel), 1938, IV, 2, p. 105].
-