S.N. BOSE

Solution d'une équation tensorielle intervenant dans la théorie du champ unitaire

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 81-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__81_0>

Bull. Soc. math. France,
83, 1955, p. 81 à 88.

SOLUTION D'UNE ÉQUATION TENSORIELLE INTERVENANT DANS LA THÉORIE DU CHAMP UNITAIRE;

PAR S. N. BOSE,

Université de Calcutta.

Résumé. — On exprime explicitement en fonction des C et de leurs invariants la solution de l'équation tensorielle d'où dépend la détermination des $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

On remarque que l'itération fournit une solution rigoureuse quand

$$\text{dét}\, C = 0.$$

1. Dans un précédent article [1], on a montré qu'il est possible de ramener le calcul des coefficients affines $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ en fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées à la solution de l'équation tensorielle.

$$U_{a\mu\nu} = T_{a\mu\nu} + T_{akl}C^k_\mu C^l_\nu + C^t_a(T_{tk\nu}C^k_\mu + T_{t\mu l}C^l_\nu). \tag{1.1}$$

Les tenseurs U et T sont antisymétriques par rapport aux indices μ et ν, C^k_μ sont les éléments d'une matrice C formée à partir des parties symétriques et antisymétriques du tenseur g :

$$\left\{\begin{array}{l} C = Sa, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}), \qquad s_{tk} = \frac{1}{2}(g_{tk} + g_{kt}), \\ \qquad\qquad S^{\mu t}s_{tk} = \delta^{\mu}_{k}. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Les valeurs propres x de la matrice C vérifient l'équation

$$x^4 + I_2 x^2 + I_4 = 0, \tag{1.3}$$

I_2 et I_4 sont les invariants d'ordre pair de C; de l'équation (1.2) il résulte immédiatement que les invariants impairs sont nuls.

Le vecteur propre M^k_a de C correspondant à la valeur propre a vérifie l'équation

$$C^{\mu}_{k}M^k_a = aM^{\mu}_a. \tag{1.4}$$

La matrice transposée $\overline{C}\left(\overline{C}^{\mu}_{k} = C^k_\mu\right)$ a les mêmes valeurs propres que C mais ses vecteurs propres $\overline{M}^k_a$ sont différents.

Si l'équation caractéristique a toutes ses racines distinctes, il existe une série

---

[1] *Ann. Math.* (U. S. A.), 1954, vol. 59, p. 171-176.

complète de vecteurs propres M et $\overline{M}$ de C et $\overline{C}$ et l'on peut exprimer les éléments de C en fonction des vecteurs propres : Savoir

$$C_\mu^k = \sum \lambda \overline{M}_\lambda^\mu M_\lambda^k. \tag{1.5}$$

On calcule facilement la solution de (1.1) :

$$\left\{\begin{aligned} T_{\sigma\mu\nu} &= \sum_{abc} (1 + ab + bc + ca)^{-1} \overline{M}_a^\sigma M_a^x \overline{M}\begin{pmatrix}\mu\nu\\ bc\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}yz\\ bc\end{pmatrix} U_{xyz} \qquad (b \neq c),\\ M\begin{pmatrix}yz\\ bc\end{pmatrix} &= M_b^y M_c^z - M_c^y M_b^z;\end{aligned}\right. \tag{1.6}$$

et la sommation porte sur les 24 combinaisons possibles des (abc).

On peut écrire la solution (1.6) sous la forme d'une équation tensorielle

$$T = BU,$$

le tenseur B ayant pour composantes :

$$B_{\sigma\mu\nu}^{xyz} = \sum \frac{\overline{M}_a^\sigma \overline{M}\begin{pmatrix}\mu\nu\\ bc\end{pmatrix} M_a^x M\begin{pmatrix}yz\\ bc\end{pmatrix}}{1 + bc + ca + ab}, \tag{1.7}$$

(1.7) est identique à (1.5).

Je me propose de faire la sommation dans (1.7) et d'obtenir les composantes de B en fonction des éléments de C.

2. Au moyen de C et de la matrice unitaire E nous pouvons former une algèbre $\{C_4\}$ avec addition et multiplication matricielle.

La formule générale d'une matrice A dans $\{C_4\}$ est

$$\left\{\begin{aligned} &A = \lambda_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \mu_3 C_3;\\ &C_1 = C, \qquad C_2 = CC, \qquad C_3 = CCC.\end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

Toutes les matrices A commutent et ont donc les mêmes vecteurs propres M que C.

Les matrices $\overline{A}$ de l'algèbre transposée ont aussi les mêmes vecteurs propres $\overline{M}$ que $\overline{C}$.

Si a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ sont les racines de l'équation caractéristique (1.3), on voit facilement que les matrices de base se développent ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} &E = f(a) + f(\bar{a}) + f(b) + f(\bar{b}); \qquad C_2 = a^2[f(a) + f(\bar{a})] + b^2[f(b) + f(\bar{b})];\\ &C_1 = a[f(a) - f(\bar{a})] + b[f(b) - f(\bar{b})]; \quad C_3 = a^3[f(a) - f(\bar{a})] + b^3[f(b) - f(\bar{b})];\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

où $f(a) = \overline{M}_a M_a$, ... en ajoutant les indices inférieurs et supérieurs aux formules ci-dessus, on obtient

$$C_\mu^\lambda = \left(\overline{M}_a^\mu M_a^\lambda - \overline{M}_{\bar{a}}^\mu M_{\bar{a}}^\lambda\right) a + b\left(\overline{M}_b^\mu M_b^\lambda - \overline{M}_{\bar{b}}^\mu M_{\bar{b}}^\lambda\right), \qquad \ldots.$$

Déduisons maintenant une nouvelle algèbre $\{V_6\}$: où l'on forme ainsi les matrices V à partir de deux éléments quelconques A, B, de $\{C_4\}$:

$$V = (AB),$$

avec

$$(2.3)\qquad V^{\mu\nu}_{rs} = \frac{1}{2}(A^{\mu}_{r}B^{\nu}_{s} + A^{\nu}_{s}B^{\mu}_{r} - A^{\mu}_{s}B^{\nu}_{r} - A^{\nu}_{r}B^{\mu}_{s}) \qquad (\mu \neq \nu \quad \text{et} \quad r \neq s).$$

La règle de composition (2.3) montre que toutes les matrices V de $\{V_6\}$ commutent entre elles.

Toutes les matrices V ont les mêmes vecteurs propres à six composantes que (CC); on voit facilement que les six valeurs propres de (CC) s'obtiennent en multipliant deux à deux les valeurs propres de C. Ce sont

$$(2.4)\qquad a\bar{a},\quad b\bar{b},\quad ab,\quad \bar{a}\bar{b},\quad a\bar{b},\quad \bar{a}b;$$

et les vecteurs propres à six composantes se déduisent des vecteurs propres de C par une règle analogue à (2.3) par exemple :

$$(2.5)\qquad M^{\mu\nu}_{ab} = M^{\mu}_{a}M^{\nu}_{b} - M^{\mu}_{b}M^{\nu}_{a},$$

sont des composantes de Mab, le vecteur qui correspond à la valeur propre ab de (CC).

Les matrices $\overline{V}$ de l'algèbre transposée $\{\overline{V}_6\}$ ont aussi les mêmes vecteurs propres à six composantes que $(\overline{CC})$; on voit facilement que les vecteurs $\overline{M}(ab)$ se déduisent des vecteurs propres de $\overline{C}$ par la règle, savoir,

$$\overline{M}^{\mu\nu}_{ab} = \overline{M}^{\mu}_{a}\overline{M}^{\nu}_{b} - \overline{M}^{\mu}_{b}\overline{M}^{\nu}_{a}, \qquad \ldots.$$

Comme bases de l'algèbre $\{V_6\}$, nous pouvons prendre six matrices quelconques de V_6 linéairement indépendantes.

Nous choisissons les six matrices suivantes dont nous donnons le développement en fonction des vecteurs propres :

$$(2.6)\quad \left\{\begin{aligned}
(EE) &= V(a\bar{a}) + V(b\bar{b}) + V(ab) + V(\bar{a}\bar{b}) + V(a\bar{b}) + V(\bar{a}b),\\
(CC) &= -a^2V(a\bar{a}) - b^2V(b\bar{b}) + ab[V(ab) + V(\bar{a}\bar{b})] - ab[V(a\bar{b}) + V(\bar{a}b)],\\
(C_2C_2) &= a^4V(a\bar{a}) + b^4V(b\bar{b}) + a^2b^2[V(ab) + V(\bar{a}\bar{b})] + a^2b^2[V(a\bar{b}) + V(\bar{a}b)],\\
2(EC_2) &= -2a^2V(a\bar{a}) - 2b^2V(b\bar{b}) + (a^2+b^2)[V(ab) + V(\bar{a}\bar{b}) + V(a\bar{b}) + V(\bar{a}b)],\\
2(EC) &= -(a+b)[V(ab) - V(\bar{a}\bar{b})] + (a-b)[V(a\bar{b}) - V(\bar{a}b)],\\
2(CC_2) &= ab(a+b)[V(ab) - V(\bar{a}\bar{b})] - ab(a-b)[V(a\bar{b}) - V(\bar{a}b)],\\
&\qquad V(ab) = \overline{M}(ab)M(ab), \qquad \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (2.6) sont obtenues d'une manière tout à fait analogue à la manière dont on a obtenu les formules (2.2).

Les quatre autres combinaisons qui peuvent être formées à partir des éléments de base de $\{C_4\}$ dépendent des six ci-dessus en vertu des quatre identités ci-dessous :

$$(2.7)\quad \left\{\begin{aligned}
&(EC_3) + (C\,C_2) + I_2(EC) = 0,\\
&2(CC_3) + (C_3C_2) + I_2(CC) - I_4(EE) = 0,\\
&(C_2C_3) - I_4(EC) = 0,\\
&(C_3C_3) - I_2(C_2C_2) - I_4[(CC) + 2(EC_2)] = 0.
\end{aligned}\right.$$

On montre aussi facilement qu'en multipliant V_1 et V_2 dans $\{V_6\}$ avec

$$V_1 = (AB), \qquad V_2 = (CD),$$

on a

$$V_1 V_2 = \frac{1}{2}[(AC.BD) + (AD.BC)]. \tag{2.8}$$

Avec (2.8), les identités (2.7) et l'identité générale de Cayley-Hamilton :

$$C_4 + I_2 C_2 + I_4 E = 0 \tag{2.9}$$

nous pouvons réduire toute matrice de forme $(C_r . C_s)$ à une fonction linéaire des six éléments de la base adoptée en (2.6).

On peut choisir des bases et démontrer des identités analogues pour toute algèbre $V_{\frac{n(n-1)}{2}}$ composée à partir de $\{C_n\}$ [par la manière analogue à (2.3)].

Avec les mineurs m_3 d'une matrice C_4 quelconque, nous pouvons former la matrice conjuguée D.

Dans le cas particulier de C ici étudié, où $C = Sa$ est le produit de composantes symétriques S par les antisymétriques a, on voit facilement que D est donné par

$$D = A' s',$$

où A' et s' sont formés de même à partir des mineurs m_s de a et S.

Admettons que toujours

$$\| S \| = \Delta \qquad \text{et} \qquad S \neq 0.$$

On peut cependant avoir

$$\| C \| = 0 \qquad \text{si} \quad \| a \| = 0.$$

Le cas $\| a \| = 0$ est intéressant pour la théorie du champ unitaire. Nous discuterons donc les propriétés particulières de V_6 quand $\| C \| = 0$ par suite de $\| a \| = 0$.

a. est une matrice antisymétrique d'ordre 4. Donc Δ déterminant de a est un carré parfait et $\sqrt{\Delta}$ est un facteur de tous les mineurs m_3 de a_4.

Si $\| a \| = 0$, A et D, mineurs conjugués de C, sont identiquement nuls.

Pour la matrice conjuguée, nous avons une identité analogue à (2.9) :

$$C_3 + I_2 C_1 + D = 0 \qquad (C_3 = CCC). \tag{2.10}$$

Quand

$$\| a \| = 0, \qquad I_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad D = 0,$$

nous avons

$$C_3 + I_2 C_1 = 0 \tag{2.11}$$

et des identités (2.7) nous tirons immédiatement

$$(CC_2) = 0, \qquad (C_2 C_2) = I_2 (C_1 C_1), \qquad (C_3 C_3) = I_2 (C_2 C_2). \tag{2.12}$$

Nous allons utiliser ces relations pour déduire la solution de (1.1) dans le cas particulier $I_4 = 0$.

3. Nous effectuons maintenant la sommation indiquée en (1.6) et (1.7).
Notons quelques propriétés simples du dénominateur $D(abc)$:

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} D(a\bar{a}c) = D(ca\bar{a}) = 1 - a^2, \\ D(abc) = D(\bar{a}\bar{b}\bar{c}), \\ D(aab) = \lambda_+ - b^2, & \lambda_+ = 1 + (a+b)^2, \\ D(aa\bar{b}) = \lambda_- - b^2, & \lambda_- = 1 + (a-b)^2. \end{cases}
$$

A l'aide de ces relations simples, nous pouvons regrouper facilement les termes à sommer :

On utilise les notations ci-après pour écrire le résultat final :

$$
(3.2)\qquad \begin{cases} V(ab) + V(\bar{a}\bar{b}) = X, & V(a\bar{b}) + V(\bar{a}b) = Y; \\ V(ab) - V(\bar{a}\bar{b}) = U, & V(a\bar{b}) - V(\bar{a}b) = V; \\ \bar{M}_a M_a = f(a), & \bar{M}(bc)M(bc) = V(bc), \quad \dots \end{cases}
$$

La sommation (1.7) est notée

$$
(3.3)\qquad B = \sum \frac{f(a)V(bc)}{D(abc)}.
$$

Après regroupement, il vient

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad B = \sum f(\lambda)\left[\frac{V(aa)}{1-a^2} + \frac{V(b\bar{b})}{1-b^2}\right] &+ \frac{1}{2}(X+Y)\left[\frac{f(a)+f(\bar{a})}{1-a^2} + \frac{f(b)+f(\bar{b})}{1-b^2}\right] \\
+ \frac{1}{2}X\left[\frac{f(a)+f(\bar{a})}{\lambda_+ - b^2} + \frac{f(b)+f(\bar{b})}{\lambda_+ - a^2}\right] &+ \frac{1}{2}Y\left[\frac{f(a)+f(\bar{a})}{\lambda_- - b^2} + \frac{f(b)+f(\bar{b})}{\lambda_- - a^2}\right] \\
- \frac{1}{2}U\left[\frac{f(a)-f(\bar{a})}{1-a^2} + \frac{f(b)-f(\bar{b})}{1-b^2}\right] &- \frac{1}{2}V\left[\frac{f(a)-f(\bar{a})}{1-a^2} - \frac{f(b)-f(\bar{b})}{1-b^2}\right] \\
+ \frac{1}{2}U\left[\frac{f(a)-f(\bar{a})}{\lambda_+ - b^2} + \frac{f(b)-f(\bar{b})}{\lambda_+ - a^2}\right] &+ \frac{1}{2}V\left[\frac{f(a)-f(\bar{a})}{\lambda_- - b^2} - \frac{f(b)-f(\bar{b})}{\lambda_- - a^2}\right].
\end{aligned}
$$

Servons-nous de (2.2) et (2.6) pour exprimer X, Y, U, V et $f(a) \pm f(\bar{a})$, ...; X, Y, U, V en fonction de matrices de $\{V_6\}$ et $\{C_4\}$, et nous obtenons après un calcul simple le résultat sous sa forme définitive

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad B = {} & E[d_0(EE) + d_1(CC) + d_2(C_2C_2) + 2\mu(EC_2)] \\
& + C_2[g_0(EE) + g_1(CC) + g_2(C_2C_2) + 2\nu(EC_2)] \\
& + C_1[2f_1(EC) + 2h_1(CC_2)] + C_3[2f_3(EC) + 2h_3(CC_2)],
\end{aligned}
$$

où les coefficients d, g, μ, ν, f, h sont fonctions des seuls invariants de C. Si

$$
t_0 = 1 + I_2 + I_4, \qquad t_+ = \lambda_+^2 + I_2\lambda_+ + I_4, \qquad t_- = \lambda_-^2 + I_2\lambda_- + I_4;
$$

$$
\frac{t_+ - t_-}{2} = x = 1 + 5I_4 - I_2, \qquad \frac{t_+ - t_-}{4ab} \equiv y = 2 - I_2
$$

et

$$
t_+t_- = (1 - I_2 + 5I_4)^2 - 4I_4(2 - I_2)^2
$$

sont fonctions des invariants.

Les coefficients de (3.5) sont

$$
(3.6)\left\{\begin{aligned}
&d_0 = \frac{1+I_2}{t_0} - \frac{I_4 y}{t_+ t_-} - \frac{I_4(x-2y)}{t_0 t_+ t_-},\\
&d_1 = \frac{x - y(y-1)}{t_+ t_-}, \quad d_2 = -\frac{y}{t_+ t_-} + \frac{2y - x}{t_0 t_+ t_-};\\
&g_0 = \frac{I_4(x-2y)}{t_0 t_+ t_-}, \quad g_1 = \frac{y}{t_+ t_-}, \quad g_2 = \frac{x-2y}{t_0 t_+ t_-}, \quad 2f_3 = \frac{2[2x + y(2I_2 - t_0)]}{t_0 t_+ t_-};\\
&2h_3 = -\frac{4(x + y I_2)}{t_0 t_+ t_-}, \quad 2\mu = \frac{1}{t_0} + \frac{x}{t_+ t_-} - \frac{2(x - 2y I_4)}{t_0 t_+ t_-}, \quad 2\nu = \frac{2(x - 2I_4 y)}{t_0 t_+ t_-};\\
&2f_1 = \frac{2[f_3 I_2 + 4I_4 y - x(1 + I_4)]}{t_0 t_+ t_-} \quad \text{et} \quad 2h_1 = -\frac{4[I_2 h_3 + x - y(1 + I_4)]}{t_0 t_+ t_-}.
\end{aligned}\right.
$$

4. Nous avons exprimé le résultat final (3.6) en fonction de matrices déduites de C suivant des lois déterminées, avec des coefficients qui sont fonctions des invariants de C. Ce résultat est valable dans tous les cas, même quand pour des matrices particulières, il n'existe pas un système complet de vecteurs propres et l'on ne peut plus développer suivant (3.3) la matrice résolvante B mais le résultat général (3.5) reste toujours vrai. L'expression (3.6) donne donc la solution générale du problème posé en (1.1).

Néanmoins, il est intéressant d'observer que, dans les cas particuliers $I_4 = 0$ ou $I_2 = 0$, $I_4 = 0$, on peut facilement mettre la solution sous forme d'une somme d'un petit nombre de termes, grâce à une méthode d'itération.

Discutons brièvement le cas $I_4 = 0$.

On a déjà déduit les propriétés spéciales de la matrice C en (2.11) et (2.12) : à savoir

$$
(CC_2) = 0, \quad (C_2 C_2) = I_2(C_1 C_1), \quad (C_3 C_3) = I_2(C_2 C_2),
$$
$$
C_3 + I_2 C_1 = 0, \quad C_4 + I_2 C_2 = 0.
$$

Nous écrivons (1.1) dans la forme

$$
U = AT = [E\{(EE) + (CC)\} + 2C(EC)]T
$$

ou

$$
U = T + [E(CC) + 2C(EC)]T = T + \delta T; \tag{4.1}
$$

et cherchons une solution en posant

$$
T = U + \Phi_1.
$$

L'équation ayant la forme

$$
U \equiv T + \delta T.
$$

On déduit facilement pour Φ, l'équation

$$
-\delta U = \Phi_1 + \delta\Phi_1.
$$

En répétant l'opération, nous obtenons successivement

$$
\delta\delta U = \Phi_2 + \delta\Phi_1, \qquad -\delta\delta\delta U = \Phi_3 + \delta\Phi_3. \tag{4.2}
$$

En raison des propriétés spéciales de l'opérateur [(2.11)-(2.12)] nous déduisons facilement

$$
\delta\delta\delta = I_2^2\, \delta. \tag{4.3}
$$

En posant $\delta = \Delta - E$, où E est l'opérateur-unité, l'équation (4.2) s'écrit

$$\Delta\Phi_3 = - I_2^2(\Delta - E)U$$

ou

$$\Delta(\Phi_3 + I_2^2 U) = I_2^2 U. \tag{4.4}$$

L'équation originale est

$$\Delta T = U.$$

Comme dét $\Delta \neq 0$, la solution est unique et l'on voit facilement que la solution de (4.4) est

$$\Phi_3 + I_2^2 U = I_2^2 T.$$

En écrivant

$$\Phi_3 = T - U + \delta U - \delta\delta U = I_2^2(T - U),$$

nous avons facilement

$$T = U + \frac{\delta U - \delta\delta U}{I_2^2 - 1}. \tag{4.5}$$

En développant, nous avons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} T_{\sigma\mu\nu} = {} & U_{\sigma\mu\nu} - (1 + I_2)^{-1} U_{\sigma kl} C_\mu^k C_\nu^l + (I_2^2 - 1)^{-1} [C_\sigma^l (C_\mu^k U_{tk\nu} + C_\nu^l U_{t\mu l})] \\ & - (I_2^2 - 1)^{-1} C_{2,\sigma}^l (U_{tk\nu} C_{2,\mu}^k + U_{t\mu l} C_{2,\nu}^l) - 2(I_2^2 - 1)^{-1} C_{2\sigma}^t C_\mu^k C_\nu^l U_{tkl}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

La solution générale nous donne le même résultat en posant $I_4 = 0$ et en utilisant les relations particulières (2.11) et (2.12).

On peut aussi traiter de même les autres cas $I_2 = 0$, $I_4 = 0$.

Post-scriptum.

Si les coefficients λ de

$$N \equiv \lambda_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 \text{ (nombre quelconque dans } [C]_4)$$

sont choisis dans l'algèbre $[V]_6$, ces nombres forment une nouvelle algèbre $[cV]_{24}$.

Résoudre

$$U = [e(EE) + e(cc) + 2c(Ec)]T \equiv BT$$

est donc équivalent à trouver l'inverse de B en tant que nombre algébrique. L'inverse est aussi un nombre dans $[cV]$ et on peut le trouver facilement de la façon suivante.

Nous vérifions d'abord les résultats suivants à partir de la règle de multiplication et des identités pour l'algèbre $[V]_6$.

Si

$$L = (C_2 C_2) - I_4(EE), \qquad M = 2(EC_2) + I_2(CC),$$
$$R = 2L + I_2 M, \qquad X = 4(EC)^2 = 2(CC) + 2(EC_2),$$

et $D \equiv I_2^2 - 4 I_4$, le discriminant des équations

$$x^2 + I_2 x + I_4 = 0,$$

on a alors

$$L(EC) = M(EC) = 0; \quad \text{d'où} \quad LX = MX = RX = 0$$
$$RL = DL, \quad RM = DM, \quad RR = DR, \quad M^2 = R$$

et

$$XX + 2 I_2 X + D = R.$$

Dans ce qui suit, nous employons les abréviations suivantes : $s = 2 + I_2$, $t_0 = 1 + I_2 + I_4$, $x = 1 + 5 I_4 - I_2$, et $y = 2 - I_2$.

Comme $B = (EE) + (CC) + 2C(EC)$, en le multipliant par son conjugué

$$B^\star = (EE) + (CC) - 2C(EC),$$

nous avons

$$BB^\star = (EE + CC)^2 - 4 C_2 (EC)^2$$

ou

$$BB^\star = \left(1 + \frac{R - sM}{t_0}\right)(t_0 + X - C_2 X)$$

après factorisation ;

Comme $\left(1 + \frac{R - sM}{t_0}\right)\left(1 + \frac{R + sM}{t_0}\right) \equiv 1$,

$$\frac{1}{BB^\star} = \frac{\left[1 + \frac{R + sM}{2 t_0}\right][t_0 + X(1 + I_2) + C_2 X]}{[t_0 + X - C_2 X][t_0 + X(1 + I_2) + C_2 X]}$$

après l'addition du même facteur dans le numérateur et le dénominateur de l'expression de droite.

En faisant la multiplication, on obtient pour le dénominateur

$$t_0 [x + y(X + I_2) + R].$$

Nous observons que

$$[x + y(X + I_2) + R][x - y(X + I_2) - \nu R]$$
$$= \Omega = t_+ t_- = x^2 - 4 I_4 y^2$$

si $\nu = \frac{x - 2y}{t_0}$.

On peut donc exprimer facilement l'inverse par l'équation suivante :

$$B^{-1} = \frac{B^\star \left[1 + \frac{R + sM}{2 t_0}\right][t_0 + X(1 + I_2) + C_2 X][x - y(X + I_2) - \nu R]}{t_0 t_+ t_-}.$$

En supprimant les crochets, on obtient un résultat équivalent à celui de l'article principal.

146752. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 996 — Dépôt légal, Éditeur. 1955, n° 585.