

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 241-249

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__241_0

© Bulletin de la S. M. F., 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION ALGÈBRIQUE
DE LA FORMULE DE HAUSDORFF;**

PAR

M. P. CARTIER,

(Paris).

1. — Je me propose de donner dans cette Note une démonstration aussi simple et directe que possible de la formule de Hausdorff, qui affirme que si $e^z = e^x e^y$, alors z s'exprime au moyen de crochets itérés en x et y ; on démontrera une formule « explicite » dont on prouvera la convergence d'après Dynkin [1]. La méthode employée est la suivante : on donne d'abord une caractérisation (lemme 1) des polynômes non commutatifs en x et y qui se fabriquent avec l'aide du crochet; on traduit ensuite cette caractérisation avec l'exponentielle, d'où résulte par un calcul facile que les exponentielles en question forment un groupe, ce qui achève la démonstration.

2. — \mathbf{L}_n désigne l'algèbre de Lie libre à n générateurs $\xi_i (1 \leq i \leq n)$, \mathbf{P}_n l'algèbre des polynômes non commutatifs en n lettres $x_i (1 \leq i \leq n)$ et \mathbf{P}_n^+ l'idéal de \mathbf{P}_n formé par les polynômes sans terme constant, toutes ces algèbres étant à coefficients rationnels. Les éléments de \mathbf{L}_n seront notés ξ, η, ζ, \dots et ceux de \mathbf{P}_n^+ : x, y, z, \dots

Nous ferons d'abord les remarques suivantes :

— Une algèbre associative devient une algèbre de Lie pour le crochet :

$$[a, b] = ab - ba;$$

— On définit une dérivation D dans toute algèbre graduée \mathbf{A} , associative ou non, en posant $D(a_n) = na_n$ pour a_n de degré n :

$$D(a_m b_n) = (m + n) a_m b_n = (m a_m) b_n + a_m (n b_n) = D(a_m) b_n + a_m D(b_n);$$

Comme \mathbf{L}_n et \mathbf{P}_n sont des algèbres graduées de manière naturelle, on obtient ainsi une dérivation D sur \mathbf{P}_n et une dérivation δ sur \mathbf{L}_n ;

— La donnée d'une représentation linéaire (ρ, \mathbf{V}) de l'algèbre \mathbf{P}_n équivaut à la donnée de n opérateurs $X_i = \rho(x_i)$ sur \mathbf{V} , choisis arbitrairement.

Nous définirons alors les opérateurs suivants :

1° l'application linéaire f de \mathbf{L}_n dans \mathbf{P}_n^+ telle que

$$(1) \quad f(\xi_i) = x_i, \quad f([\xi, \eta]) = f(\xi)f(\eta) - f(\eta)f(\xi);$$

2° la représentation linéaire (θ, \mathbf{P}_n^+) de \mathbf{P}_n définie par

$$(2) \quad \theta(x_i)z = x_i z - z x_i$$

et, de même, la représentation linéaire (θ', \mathbf{L}_n) de \mathbf{P}_n par

$$(3) \quad \theta'(x_i)\zeta = [\xi_i, \zeta];$$

3° L'application linéaire g de \mathbf{P}_n^+ dans \mathbf{L}_n définie par les conditions

$$(4) \quad g(x_i) = \xi_i, \quad g(xy) = \theta'(x)g(y),$$

soit, plus explicitement,

$$(5) \quad g(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}) = [\xi_{i_1}, [\xi_{i_2}, [\dots, [\xi_{i_{k-1}}, \xi_{i_k}] \dots]]];$$

4° L'application linéaire $h = f \circ g$ de \mathbf{P}_n^+ dans \mathbf{P}_n^+ .

3. Les propriétés de ces opérateurs sont exprimées par le lemme 1 :

LEMME 1 (DYNKIN). — *On a les identités :*

$$(6) \quad g(f(\xi)) = \delta(\xi), \quad \theta'(f(\xi))\eta = [\xi, \eta], \quad \theta(f(\xi))x = [f(\xi), x]$$

et les éléments de $f(\mathbf{L}_n) \subset \mathbf{P}_n^+$ sont caractérisés par la condition $h(x) = D(x)$; autrement dit, l'application f est injective ⁽¹⁾ et l'on définit un projecteur P de \mathbf{P}_n^+ sur $f(\mathbf{L}_n)$ par la formule

$$(7) \quad P(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}) = P^{-1}[x_{i_1}, [\dots, [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}] \dots]].$$

On a deux représentations linéaires de \mathbf{L}_n dans l'espace vectoriel \mathbf{L}_n , à savoir la représentation adjointe et la représentation $\theta' \circ f$: de plus,

$$\theta'(f(\xi_i)) = \theta'(x_i) = \text{ad } \xi_i$$

par définition, et les ξ_i engendrent \mathbf{L}_n : ces deux représentations sont donc identiques et, par suite,

$$\theta'(f(\xi)) = \text{ad } \xi, \quad \text{soit } \theta'(f(\xi))\eta = [\xi, \eta].$$

On montre de même que les deux représentations $\theta \circ f$ et $\sigma(\xi)x = [f(\xi), x]$ sont identiques, d'où la dernière formule (6).

De plus, on a $g(f(\xi_i)) = g(x_i) = \xi_i$ et $g \circ f$ est une dérivation de \mathbf{L}_n en

⁽¹⁾ Une application f d'un ensemble dans un autre est dite *injective* si l'on a $f(x) \neq f(y)$ dès que $x \neq y$.

vertu du calcul suivant :

$$g(f([\xi, \eta]) = g(f(\xi)f(\eta) - f(\eta)(f(\xi)) = \theta'(f(\xi))g(f(\eta)) - \theta'(f(\eta))g(f(\xi)) \\ = [\xi, g(f(\eta))] - [\eta, g(f(\xi))]$$

comme les ξ_i engendrent \mathbf{L}_n , il en résulte que $g \circ f = \delta$.

δ étant injective, il en est de même de f ; de plus si ξ est de degré p , on aura

$$f(g(f(\xi))) = f(\delta(\xi)) = pf(\xi) = D(f(\xi)),$$

donc h et D coïncident sur $f(\mathbf{L}_n)$. Inversement, si x de degré p vérifie la condition $h(x) = D(x)$, on aura

$$x = p^{-1}D(x) = p^{-1}(f(g(x))) \in f(\mathbf{L}_n)$$

et la conclusion du lemme résulte de ce que les opérateurs en question conservent les degrés. Remarquons enfin, pour achever la démonstration du lemme, que $P(x) = p^{-1}f(g(x)) = x$ pour $x \in f(\mathbf{L}_n)$ de degré p , ce qui prouve que P est bien un projecteur de \mathbf{P}_n^+ sur $f(\mathbf{L}_n)$.

f étant injectif et \mathbf{L}_n n'étant définie qu'à un isomorphisme près, il n'y a aucun inconvénient à identifier \mathbf{L}_n à son image par f dans \mathbf{P}_n^+ , ce que nous ferons désormais.

4. — Soit $\mathbf{A} = \sum_{p \geq 0} \mathbf{A}_p$ une algèbre graduée; on plonge \mathbf{A} dans le

module $\bar{\mathbf{A}} = \prod_{p \geq 0} \mathbf{A}_p$ des suites $a = (a_p)_{p \geq 0}$ et l'on prolonge la multiplication de \mathbf{A} en une multiplication sur $\bar{\mathbf{A}}$ en posant

$$(8) \quad (ab)_r = \sum_{p=0}^r a_p b_{r-p},$$

$\bar{\mathbf{A}}$ devient ainsi une algèbre contenant \mathbf{A} et de même espèce que \mathbf{A} (qui n'est pas nécessairement associative). On définit ainsi l'algèbre de Lie $\bar{\mathbf{L}}_n$, l'algèbre associative $\bar{\mathbf{P}}_n$ et son idéal $\bar{\mathbf{P}}_n^+$, et l'on peut identifier $\bar{\mathbf{L}}_n$ à un sous-module de $\bar{\mathbf{P}}_n$. Toutes les opérations introduites au paragraphe 2 conservant les degrés se prolongent aux algèbres « complétées » $\bar{\mathbf{L}}_n$ et $\bar{\mathbf{P}}_n$ et les identités démontrées restent valables.

Si $x \in \bar{\mathbf{P}}_n^+$, les séries

$$\exp x = e^x = \sum_{p \geq 0} x^p / p! \quad \text{et} \quad \log(1 + x) = \sum_{p \geq 0} (-x)^p / p$$

ont un sens, et l'exponentielle est une application biunivoque de $\bar{\mathbf{P}}_n^+$ sur $1 + \bar{\mathbf{P}}_n^+$ dont le logarithme est l'application réciproque d'après les propriétés clas-

siques de ces séries. Comme $1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$ est un groupe pour la multiplication induite par celle de $\overline{\mathbf{P}}_n$, on définit donc sur $\overline{\mathbf{P}}_n^+$ une structure de groupe en posant

$$(9) \quad x \circ y = \log(\exp x \exp y).$$

Ceci posé, nous allons montrer que $\overline{\mathbf{L}}_n$ est un sous-groupe du précédent :

LEMME 2. — *L'ensemble $\mathbf{HC} 1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$ formé des éléments u dont le logarithme appartient à $\overline{\mathbf{L}}_n$ est caractérisé par les deux identités suivantes :*

$$(10) \quad h(u - 1) = D(u)u^{-1},$$

$$(11) \quad \theta(u)x = u x u^{-1} \quad \text{pour tout } x \in \overline{\mathbf{P}}_n^+.$$

On pose $z = \log u$, donc $u = e^z$ et l'on note \mathbf{g} (resp. \mathbf{d}) l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) par z dans $\overline{\mathbf{P}}_n^+$; il est clair que \mathbf{g} et \mathbf{d} commutent, par suite

$$u x u^{-1} = e^z x e^{-z} = e^{\mathbf{g}} e^{-\mathbf{d}} x = e^{\mathbf{g} - \mathbf{d}} x.$$

Par ailleurs, $\theta(u) = \theta(e^z) = e^{\theta(z)}$ et, par suite, la condition (11) équivaut à $\theta(z) = \mathbf{g} - \mathbf{d}$, soit plus explicitement

$$(12) \quad \theta(z)x = zx - xz.$$

Le fait que D soit une dérivation fournit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} D(u) &= D(e^z) = \sum_{n \geq 0} D(z^n)/n! = \sum_{n \geq 0} 1/n! \sum_{a+b=n-1} z^a D(z) z^b \\ &= \sum_{n \geq 0} 1/n! \sum_{a+b=n-1} \mathbf{g}^a \mathbf{d}^b D(z) \\ &= \sum_{n \geq 0} 1/n! (\mathbf{g}^n - \mathbf{d}^n)/(\mathbf{g} - \mathbf{d}) D(z) = (e^{\mathbf{g}} - e^{\mathbf{d}})/(\mathbf{g} - \mathbf{d}) D(z). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$D(u)u^{-1} = D(e^z) e^{-z} = e^{-\mathbf{d}} D(e^z) = \varphi(\mathbf{g} - \mathbf{d}) D(z)$$

si l'on introduit la série formelle inversible $\varphi(T) = (e^T - 1)/T$. Il faut comparer ceci à la quantité $h(u - 1)$; or,

$$h(u - 1) = h((e^z - 1)/z) = \theta((e^z - 1)/z) h(z) = \theta(\varphi(z)) h(z) = \varphi(\theta(z)) h(z).$$

Il résulte de ces deux évaluations et du fait que $\varphi(T)$ est inversible que, moyennant la condition (11) équivalente à (12), la condition (10) équivaut à la condition

$$(13) \quad h(z) = D(z).$$

autrement dit que les conditions (10) et (11) ensemble équivalent à la conjonction des conditions (12) et (13). Or il résulte du lemme 1 que (12) est conséquence de (13) et que (13) caractérise les $z \in \bar{\mathbf{L}}_n$.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

3. — Nous pouvons maintenant achever facilement la démonstration de la formule de Hausdorff :

LEMME 3. — *L'ensemble \mathbf{H} défini au lemme 2 est un sous-groupe de $\mathbf{1} + \bar{\mathbf{P}}_n^+$.*

Soient $u, v \in \mathbf{H}$ et $w = uv^{-1}$; on doit montrer que w satisfait aux conditions (10) et (11)

$$(14) \quad \theta(w)x = \theta(u)\theta(v^{-1})x = u(v^{-1}xv)u^{-1} = wxw^{-1} \quad \text{pour } x \in \bar{\mathbf{P}}_n^+.$$

$$(15) \quad \begin{aligned} D(w)w^{-1} &= D(uv^{-1})vu^{-1} = D(u)v^{-1}vu^{-1} + uD(v^{-1})vu^{-1} \\ &= D(u)u^{-1} - uv^{-1}D(v)u^{-1} = D(u)u^{-1} - \theta(uv^{-1})(D(v)v^{-1}) \\ &= h(u - \mathbf{1} - uv^{-1}(v - \mathbf{1})) = h(w - \mathbf{1}), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 3.

Des lemmes 2 et 3, il résulte que $\bar{\mathbf{L}}_n$ est un groupe pour la loi $\eta_1 \circ \eta_2$, groupe dont nous allons expliciter la multiplication. Posons

$$(16) \quad z(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \circ \dots \circ x_n \in \bar{\mathbf{L}}_n,$$

donc dans l'algèbre $\bar{\mathbf{P}}_n$, on a identiquement $e^{a_1} \dots e^{a_n} = z(a_1, \dots, a_n)$ et la même formule vaut dans toute algèbre où elle a un sens, en particulier, on aura pour $a_1, a_2 \in \bar{\mathbf{L}}_n$

$$(17) \quad a_1 \circ a_2 = z(a_1, a_2).$$

De plus, si $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a

$$(18) \quad \begin{aligned} e^z - \mathbf{1} &= e^{x_1} \dots e^{x_n} - \mathbf{1} = \sum_{(m) \neq 0} (m_1! \dots m_n!)^{-1} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \\ z &= \sum_{k \neq 0} (-\mathbf{1})^k (e^z - \mathbf{1})^{k-1} = \sum_{\substack{\kappa \neq 0 \\ (m^{(j)}) \neq 0}} (-\mathbf{1})^{k-1} \\ &\quad \times \left(\prod_{i,j} m_i^{(j)}! \right)^{-1} x_1^{m_1^{(1)}} \dots x_n^{m_n^{(1)}} \dots x_1^{m_1^{(2)}} \dots x_n^{m_n^{(2)}} \dots x_1^{m_1^{(k)}} \dots x_n^{m_n^{(k)}} \end{aligned}$$

et l'on sait que $D(z) = h(z)$, donc que l'on ne change pas z en appliquant le projecteur P à chaque monôme de l'expression de z , soit

$$(19) \quad z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k \neq 0 \\ (m^{(j)}) \neq 0}} (-\mathbf{1})^k \left(k \sum_{i,j} m_i^{(j)} \prod_{i,j} m_i^{(j)}! \right)^{-1} [x_1^{m_1^{(1)}} [\dots [x_n^{m_n^{(k)}}] \dots] \dots]$$

en posant pour abrégé

$$[y_1^{\alpha_1}, [\dots y_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, y_r^{\alpha_r}] \dots] = \text{ad}^{\alpha_1} y_1 \dots \text{ad}^{\alpha_{r-1}} y_{r-1} \text{ad}^{\alpha_r} y_r y_r.$$

Il nous reste à étudier les questions de convergence : soit $z_r(x_1, \dots, x_n)$ la composante de degré r de $z(x_1, \dots, x_n)$; comme c'est un élément de \mathbf{L}_n qui est libre, on peut substituer aux x_i des éléments a_i d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} quelconque sur le corps des nombres rationnels, et l'on définit ainsi les fonctions $z_r(a_1, \dots, a_n)$. Si \mathfrak{g} est munie d'une norme telle que $\|[a, b]\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, il résulte alors de la formation même du développement de $z(x_1, \dots, x_n)$ que l'on a l'inégalité

$$(20) \quad \|z_r(a_1, \dots, a_n)\| \leq r^{-1} f_r(\|a_1\|, \dots, \|a_n\|),$$

où f_r est l'ensemble des termes de degré r du développement en série entière de

$$\log(e^{T_1} \dots e^{T_n} - 1) = \log(e^{T_1 + \dots + T_n} - 1)$$

convergeant dès que $|T_1| + \dots + |T_n| < \log 2$. Nous avons donc prouvé ceci :

THÉOREME. — On définit sur toute algèbre de Lie \mathfrak{g} à coefficients rationnels des fonctions $z_r(a_1, \dots, a_n)$ en substituant a_i à x_i dans la somme des termes de degré r de la série (19). Si l'on pose formellement

$$z(a_1, a_2) = \sum_{r \geq 0} z_r(a_1, a_2),$$

on a les identités formelles suivantes (qui signifient que les termes de degré r des deux membres sont égaux) :

$$(21) \quad z(a_1, z(a_2, a_3)) = z(z(a_1, a_2), a_3),$$

$$(22) \quad z(a, -a) = 0,$$

$$(23) \quad z(a, 0) = z(0, a) = a.$$

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie normée complète avec une norme telle que $\|[a, b]\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, la série $z(a_1, a_2, \dots, a_n)$ converge absolument dès que $\sum \|a_i\| < \log 2$, et la multiplication $a_1 \circ a_2 = z(a_1, a_2)$ définit un germe de groupe au voisinage de 0 dans \mathfrak{g} ; on a alors

$$a_1 \circ \dots \circ a_n = z(a_1, \dots, a_n)$$

pour les a_i assez voisins de 0 dans \mathfrak{g} .

REMARQUES. — 1° Les formules (22) et (23) traduisent le fait que l'on a $\xi \circ (-\xi) = 0$ et $\xi \circ 0 = 0 \circ \xi = \xi$ dans $\bar{\mathbf{L}}_n$.

2° Un calcul de majoration analogue à celui qu'on a fait montre que si \mathfrak{g}

est une algèbre de Lie de rang fini sur un corps valué complet, la série $z(a_1, \dots, a_n)$ est le développement de Taylor d'une fonction analytique des arguments.

6. — A titre d'application, on va voir que les résultats précédents permettent de démontrer assez facilement le théorème de Birkhoff-Witt pour une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0.

Faisons d'abord quelques remarques concernant l'algèbre tensorielle : soit \mathbf{V} un espace vectoriel sur le corps \mathbf{K} de caractéristique 0, $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ l'algèbre tensorielle construite sur \mathbf{V} ⁽²⁾, $\mathbf{TS}(\mathbf{V})$ le sous-espace des tenseurs symétriques. Comme \mathbf{K} est de caractéristique 0, le sous-espace $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ des tenseurs symétriques de degré n est sous-tendu par les tenseurs symétrisés $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} = t$ (les x_i sont des éléments de V). Or t est le coef-

ficient de $\lambda_1 \dots \lambda_n$ dans le polynôme $(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^n$ (puissance calculée dans l'algèbre $\mathbf{T}(\mathbf{V})$: on omet le signe \otimes de multiplication); si alors f est une forme linéaire sur $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ nulle sur les tenseurs x^n , le polynôme $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$ s'annule pour toutes les valeurs données aux variables λ_i , donc est identiquement nul, donc $f(t)$ qui est le coefficient de $\lambda_1 \dots \lambda_n$ est nul, ce qui implique que $f = 0$. Par suite, $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ est sous-tendu par les tenseurs x^n .

Soit u une application linéaire de $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ dans un espace vectoriel \mathbf{W} et f la fonction définie dans \mathbf{V} par la formule

$$(24) \quad f(x) = u(x^n),$$

u se prolonge en une application linéaire \bar{u} de $\mathbf{T}_n(\mathbf{V})$ dans \mathbf{W} , c'est-à-dire en une application n -linéaire de \mathbf{V}^n dans \mathbf{W} , soit $\nu(x_1, \dots, x_n)$ et l'on a, par suite,

$$(25) \quad f(x) = \nu(x, x, \dots, x).$$

Inversement, si f est une fonction définie dans \mathbf{V} à valeurs dans \mathbf{W} et s'il existe une fonction n -linéaire ν telle que (25) ait lieu, on dira que f est homogène de degré n . Dans ce cas ν définit une application linéaire ν' de $\mathbf{T}_n(\mathbf{V})$ dans \mathbf{W} dont la restriction u à $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ vérifie (24); comme les x^n sous-tendent $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$, u ne dépend que de f et non de ν (qui n'est pas unique en général). La formule (24) établit donc une correspondance biunivoque entre les fonctions homogènes f de degré n et les applications linéaires u définies dans $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$.

Ceci dit, voici le théorème de Birkhoff-Witt :

THÉORÈME. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur un corps \mathbf{K} de caractéris-

(2) Pour les notions d'algèbre tensorielle, cf. BOURBAKI, *Algèbre*, t. III, Paris, Hermann, 1948.

tique 0; $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ est somme directe de l'idéal bilatère \mathbf{J} engendré par les éléments $a_1 a_2 - a_2 a_1 - [a_1, a_2]$ ($a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$, crochet calculé dans \mathfrak{g}) et du sous-espace $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ des tenseurs symétriques.

\mathfrak{g} étant une algèbre de Lie, le théorème du paragraphe 5 définit des fonctions $z_r(a_1, a_2)$ sur \mathfrak{g} à valeurs dans \mathfrak{g} ; de même puisque $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[t_1, t_2] = t_1 t_2 - t_2 t_1$, il existe des fonctions analogues sur $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ dont nous noterons $\bar{z}_r(a_1, a_2)$ la restriction à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On a donc $\bar{z}_r(a_1, a_2) \in \mathbf{T}(\mathfrak{g})$ et il est clair sur la formule (19) que l'on a

$$(26) \quad \bar{z}_r(a_1, a_2) \equiv z_r(a_1, a_2) \pmod{\mathbf{J}}.$$

De plus, introduisant deux indéterminées U_i ($i = 1, 2$), on définit une multiplication bilinéaire sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ par la formule symbolique suivante :

$$(27) \quad e^{U_1 a_1} \star e^{U_2 a_2} = e^{z(U_1 a_1, U_2 a_2)} \quad (a_1, a_2 \in \mathfrak{g})$$

qui a la signification suivante : le coefficient $f_{n_1, n_2}(a_1, a_2)$ de $U_1^{n_1} U_2^{n_2}$ dans le second membre est une fonction homogène de degré n_i en a_i ($i = 1, 2$) et il existe par suite une fonction bilinéaire sur $\mathbf{TS}_{n_1}(\mathfrak{g}) \times \mathbf{TS}_{n_2}(\mathfrak{g})$ bien déterminée F_{n_1, n_2} telle que

$$(28) \quad f_{n_1, n_2}(a_1, a_2) = F_{n_1, n_2}(a_1^{n_1}/n_1!, a_2^{n_2}/n_2!).$$

Les fonctions F_{n_1, n_2} sont les restrictions d'une même fonction F bilinéaire définie sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g}) \times \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$, et l'on pose :

$$u \star v = F(u, v).$$

La formule (26) montre alors immédiatement que $u \star v \equiv uv \pmod{\mathbf{J}}$, le second produit étant pris au sens de $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$.

La multiplication sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ est *associative* d'après la formule (21) et l'on a

$$(29) \quad a \star a \star \dots \star a = a^n \quad (a \in \mathfrak{g}, n \text{ facteurs}),$$

car si l'on a n éléments $\eta_i \in \bar{\mathbf{L}}_n$ ($1 \leq i \leq n$) commutant entre eux, on aura

$$e^{\eta_1} \dots e^{\eta_n} = e^{\eta_1 + \dots + \eta_n}$$

dans $\bar{\mathbf{P}}_n$, d'où

$$z(\eta_1, \dots, \eta_n) = \eta_1 + \dots + \eta_n.$$

Cette identité est valable par spécialisation dans toute algèbre de Lie pour des éléments commutant deux à deux, donc

$$z(U_1 a, \dots, U_n a) = (U_1 + \dots + U_n) a$$

et, par suite,

$$e^{U_1 a} \star \dots \star e^{U_n a} = e^{(\sum U_i) a}$$

et la formule (29) s'obtient en comparant les coefficients de $U_1 \dots U_n$.

Nous allons maintenant calculer le produit de deux éléments de \mathfrak{g} dans $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$; pour cela, on évalue d'abord $z(x_1, x_2)$ modulo les termes de degré au moins égal à 3

$$\begin{aligned} z(x_1, x_2) &\equiv \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \\ &\equiv x_1 + x_2 + \frac{1}{2}[x_1, x_2], \end{aligned}$$

puis on évalue $e^{z(U_1a_1, U_2a_2)}$ en négligeant les termes de degré ≥ 3 , soit

$$e^{z(U_1a_1, U_2a_2)} \equiv U_1a_1 + U_2a_2 + \frac{1}{2}U_1U_2[a_1, a_2] + \frac{1}{2}(U_1a_1 + U_2a_2)^2.$$

Il vient alors

$$a_1 \star a_2 = \frac{1}{2}(a_1a_2 + a_2a_1) + \frac{1}{2}[a_1, a_2],$$

d'où

$$(30) \quad a_1 \star a_2 - a_2 \star a_1 = [a_1, a_2] \quad (a_1, a_2 \in \mathfrak{g}).$$

Pour achever la démonstration, on définit un opérateur linéaire Q :

$$\mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{TS}(\mathfrak{g}) \quad \text{par} \quad Q(a_1 \dots a_n) = a_1 \star \dots \star a_n$$

pour les $a_i \in \mathfrak{g}$; Q est un homomorphisme d'algèbres qui a les propriétés suivantes :

- Comme $u \star v \equiv uv \pmod{\mathbf{J}}$ pour $u, v \in \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$, on a $Q(t) \equiv t \pmod{\mathbf{J}}$ pour tout $t \in \mathbf{T}(\mathfrak{g})$;
- D'après la formule (29), on a $Q(u) = u$ pour $u \in \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$;
- D'après la formule (30), on a $Q(t) = 0$ pour $t \in \mathbf{J}$.

Autrement dit, Q est un projecteur de $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ dont le noyau est \mathbf{J} , ce qui prouve que $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ et de \mathbf{J} .

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DYNKIN, Estimation des coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff, Doklady Akad. Naouk URSS, 57, (1947), p. 323-326 (en russe).

(Manuscrit reçu le 1^{er} février 1956).