BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 241-249
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__241_0>

Bull. Soc. math. France,
84, 1956, p. 241 à 249.

DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE DE LA FORMULE DE HAUSDORFF;

PAR

M. P. Cartier,

(Paris).

1. — Je me propose de donner dans cette Note une démonstration aussi simple et directe que possible de la formule de Hausdorff, qui affirme que si $e^z = e^x e^y$, alors z s'exprime au moyen de crochets itérés en x et y; on démontrera une formule « explicite » dont on prouvera la convergence d'après Dynkin [1]. La méthode employée est la suivante : on donne d'abord une caractérisation (lemme 1) des polynômes non commutatifs en x et y qui se fabriquent avec l'aide du crochet ; on traduit ensuite cette caractérisation avec l'exponentielle, d'où résulte par un calcul facile que les exponentielles en question forment un groupe, ce qui achève la démonstration.

2. — $\mathbf{L}_n$ désigne l'algèbre de Lie libre à n générateurs $\xi_i (1 \leqq i \leqq n)$, $\mathbf{P}_n$ l'algèbre des polynômes non commutatifs en n lettres $x_i (1 \leqq i \leqq n)$ et $\mathbf{P}_n^+$ l'idéal de $\mathbf{P}_n$ formé par les polynômes sans terme constant, toutes ces algèbres étant à coefficients rationnels. Les éléments de $\mathbf{L}_n$ seront notés ξ, η, ζ, ... et ceux de $\mathbf{P}_n^+$: x, y, z, ...

Nous ferons d'abord les remarques suivantes :

— Une algèbre associative devient une algèbre de Lie pour le crochet :

$$[a, b] = ab - ba;$$

— On définit une dérivation D dans toute algèbre graduée $\mathbf{A}$, associative ou non, en posant $D(a_n) = na_n$ pour a_n de degré n :

$$D(a_m b_n) = (m+n)\, a_m b_n = (ma_m)\, b_n + a_m (nb_n) = D(a_m) b_n + a_m D(b_n);$$

Comme $\mathbf{L}_n$ et $\mathbf{P}_n$ sont des algèbres graduées de manière naturelle, on obtient ainsi une dérivation D sur $\mathbf{P}_n$ et une dérivation δ sur $\mathbf{L}_n$;

— La donnée d'une représentation linéaire $(\rho, \mathbf{V})$ de l'algèbre $\mathbf{P}_n$ équivaut à la donnée de n opérateurs $X_i = \rho(x_i)$ sur $\mathbf{V}$, choisis arbitrairement.

Nous définirons alors les opérateurs suivants :

1° l'application linéaire f de $\mathbf{L}_n$ dans $\mathbf{P}_n^+$ telle que

$$f(\xi_i) = x_i, \qquad f([\xi, \eta]) = f(\xi)f(\eta) - f(\eta)f(\xi); \tag{1}$$

2° la représentation linéaire $(\theta, \mathbf{P}_n^+)$ de $\mathbf{P}_n$ définie par

$$\theta(x_i)z = x_i z - z x_i \tag{2}$$

et, de même, la représentation linéaire $(\theta', \mathbf{L}_n)$ de $\mathbf{P}_n$ par

$$\theta'(x_i)\zeta = [\xi_i, \zeta]; \tag{3}$$

3° L'application linéaire g de $\mathbf{P}_n^+$ dans $\mathbf{L}_n$ définie par les conditions

$$g(x_i) = \xi_i, \qquad g(xy) = \theta'(x)g(y), \tag{4}$$

soit, plus explicitement,

$$g(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}) = [\xi_{i_1}, [\xi_{i_2}, [\ldots, [\xi_{i_{k-1}}, \xi_{i_k}]\ldots]]]; \tag{5}$$

4° L'application linéaire $h = f \circ g$ de $\mathbf{P}_n^+$ dans $\mathbf{P}_n^+$.

3. Les propriétés de ces opérateurs sont exprimées par le lemme **1** :

LEMME **1** (DYNKIN). — *On a les identités :*

$$g(f(\xi)) = \delta(\xi), \qquad \theta'(f(\xi))\eta = [\xi, \eta], \qquad \theta(f(\xi))x = [f(\xi), x] \tag{6}$$

et les éléments de $f(\mathbf{L}_n) \subset \mathbf{P}_n^+$ sont caractérisés par la condition $h(x) = D(x)$; autrement dit, l'application f est injective [1] *et l'on définit un projecteur P de $\mathbf{P}_n^+$ sur $f(\mathbf{L}_n)$ par la formule*

$$P(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_p}) = p^{-1}[x_{i_1}, [\ldots, [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}]\ldots]]. \tag{7}$$

On a deux représentations linéaires de $\mathbf{L}_n$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{L}_n$, à savoir la représentation adjointe et la représentation $\theta' \circ f$: de plus,

$$\theta'(f(\xi_i)) = \theta'(x_i) = \operatorname{ad}\xi_i$$

par définition, et les ξ_i engendrent $\mathbf{L}_n$: ces deux représentations sont donc identiques et, par suite,

$$\theta'(f(\xi)) = \operatorname{ad}\xi, \qquad \text{soit} \quad \theta'(f(\xi))\eta = [\xi, \eta].$$

On montre de même que les deux représentations $\theta \circ f$ et $\sigma(\xi)x = [f(\xi), x]$ sont identiques, d'où la dernière formule (6).

De plus, on a $g(f(\xi_i)) = g(x_i) = \xi_i$ et $g \circ f$ est une dérivation de $\mathbf{L}_n$ en

[1] Une application f d'un ensemble dans un autre est dite *injective* si l'on a $f(x) \neq f(y)$ dès que $x \neq y$.

vertu du calcul suivant :

$$g(f([\xi, \eta]) = g(f(\xi)f(\eta) - f(\eta)(f(\xi)) = \theta'(f(\xi))g(f(\eta)) - \theta'(f(\eta))g(f(\xi))$$
$$= [\xi, g(f(\eta))] - [\eta, g(f(\xi))]$$

comme les ξ_i engendrent $\mathbf{L}_n$, il en résulte que $g \circ f = \delta$.

δ étant injective, il en est de même de f; de plus si ξ est de degré p, on aura

$$f(g(f(\xi)) = f(\delta(\xi)) = pf(\xi) = D(f(\xi)),$$

donc h et D coïncident sur $f(\mathbf{L}_n)$. Inversement, si x de degré p vérifie la condition $h(x) = D(x)$, on aura

$$x = p^{-1} D(x) = p^{-1}(f(g(x)) \in f(\mathbf{L}_n)$$

et la conclusion du lemme résulte de ce que les opérateurs en question conservent les degrés. Remarquons enfin, pour achever la démonstration du lemme, que $P(x) = p^{-1}f(g(x)) = x$ pour $x \in f(\mathbf{L}_n)$ de degré p, ce qui prouve que P est bien un projecteur de $\mathbf{P}_n^+$ sur $f(\mathbf{L}_n)$.

f étant injectif et $\mathbf{L}_n$ n'étant définie qu'à un isomorphisme près, il n'y a aucun inconvénient à *identifier* $\mathbf{L}_n$ *à son image par* f *dans* $\mathbf{P}_n^+$, ce que nous ferons désormais.

4. — Soit $\mathbf{A} = \sum_{p \geq 0} \mathbf{A}_p$ une algèbre graduée; on plonge $\mathbf{A}$ dans le module $\overline{\mathbf{A}} = \prod_{p \geq 0} \mathbf{A}_p$ des suites $a = (a_p)_{p \geq 0}$ et l'on prolonge la multiplication de $\mathbf{A}$ en une multiplication sur $\overline{\mathbf{A}}$ en posant

$$(ab)_r = \sum_{p=0}^{r} a_p b_{r-p}, \tag{8}$$

$\overline{\mathbf{A}}$ devient ainsi une algèbre contenant $\mathbf{A}$ et de même espèce que $\mathbf{A}$ (qui n'est pas nécessairement associative). On définit ainsi *l'algèbre de Lie* $\overline{\mathbf{L}}_n$, *l'algèbre associative* $\overline{\mathbf{P}}_n$ et son *idéal* $\overline{\mathbf{P}}_n^+$, et l'on peut identifier $\overline{\mathbf{L}}_n$ à un sous-module de $\overline{\mathbf{P}}_n$. Toutes les opérations introduites au paragraphe 2 conservant les degrés se prolongent aux algèbres « complétées » $\overline{\mathbf{L}}_n$ et $\overline{\mathbf{P}}_n$ et les identités démontrées restent valables.

Si $x \in \overline{\mathbf{P}}_n^+$, les séries

$$\exp x = e^x = \sum_{p \geq 0} x^p/p! \qquad \text{et} \qquad \log(1 + x) = \sum_{p \geq 0} (-x)^p/p$$

ont un sens, et l'exponentielle est une application biunivoque de $\overline{\mathbf{P}}_n^+$ sur $1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$ dont le logarithme est l'application réciproque d'après les propriétés classiques de ces séries. Comme $1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$ est un groupe pour la multiplication induite par celle de $\overline{\mathbf{P}}_n$, on définit donc sur $\overline{\mathbf{P}}_n^+$ une structure de groupe en posant

$$x \circ y = \log(\exp x \exp y). \tag{9}$$

Ceci posé, nous allons montrer que $\overline{\mathbf{L}}_n$ est un sous-groupe du précédent :

LEMME 2. — *L'ensemble $\mathbf{H} \subset 1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$ formé des éléments u dont le logarithme appartient à $\overline{\mathbf{L}}_n$ est caractérisé par les deux identités suivantes :*

$$h(u-1) = D(u)u^{-1}, \tag{10}$$

$$\theta(u)x = uxu^{-1} \quad \text{pour tout } x \in \overline{\mathbf{P}}_n^+. \tag{11}$$

On pose $z = \log u$, donc $u = e^z$ et l'on note $\mathbf{g}$ (resp. $\mathbf{d}$) l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) par z dans $\overline{\mathbf{P}}_n^+$; il est clair que $\mathbf{g}$ et $\mathbf{d}$ commutent, par suite

$$uxu^{-1} = e^z x\, e^{-z} = e^{\mathbf{g}}\, e^{-\mathbf{d}} x = e^{\mathbf{g}-\mathbf{d}} x.$$

Par ailleurs, $\theta(u) = \theta(e^z) = e^{\theta(z)}$ et, par suite, la condition (11) équivaut à $\theta(z) = \mathbf{g} - \mathbf{d}$, soit plus explicitement

$$\theta(z)x = zx - xz. \tag{12}$$

Le fait que D soit une dérivation fournit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} D(u) = D(e^z) &= \sum_{n\geqq 0} D(z^n)/n! = \sum_{n\geqq 0} 1/n! \sum_{a+b=n-1} z^a D(z) z^b \\ &= \sum_{n\geqq 0} 1/n! \sum_{a+b=n-1} \mathbf{g}^a \mathbf{d}^b D(z) \\ &= \sum_{n\geqq 0} 1/n!\, (\mathbf{g}^n - \mathbf{d}^n)/(\mathbf{g}-\mathbf{d})\, D(z) = (e^{\mathbf{g}} - e^{\mathbf{d}})/(\mathbf{g}-\mathbf{d})\, D(z). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$D(u)u^{-1} = D(e^z)\, e^{-z} = e^{-\mathbf{d}}\, D(e^z) = \varphi(\mathbf{g}-\mathbf{d})\, D(z)$$

si l'on introduit la série formelle inversible $\varphi(T) = (e^T - 1)/T$. Il faut comparer ceci à la quantité $h(u-1)$; or,

$$h(u-1) = h\,(((e^z-1)/z)z) = \theta((e^z-1)/z)\, h(z) = \theta(\varphi(z))\, h(z) = \varphi(\theta(z))\, h(z).$$

Il résulte de ces deux évaluations et du fait que $\varphi(T)$ est inversible que, *moyennant la condition* (11) équivalente à (12), *la condition* (10) *équivaut à la condition*

$$h(z) = D(z). \tag{13}$$

autrement dit que les conditions (10) et (11) ensemble équivalent à la conjonction des conditions (12) et (13). Or il résulte du lemme 1 que (12) est conséquence de (13) et que (13) caractérise les $z \in \overline{\mathbf{L}}_n$.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

3. — Nous pouvons maintenant achever facilement la démonstration de la formule de Hausdorff :

Lemme 3. — *L'ensemble* $\mathbf{H}$ *défini au lemme* 2 *est un sous-groupe de* $1 + \overline{\mathbf{P}}_n^+$.

Soient u, $v \in \mathbf{H}$ et $w = uv^{-1}$; on doit montrer que w satisfait aux conditions (10) et (11)

$$(14) \qquad \theta(w)x = \theta(u)\,\theta(v^{-1})x = u(v^{-1}xv)u^{-1} = wxw^{-1} \qquad \text{pour} \quad x \in \overline{\mathbf{P}}_n^+.$$

$$\begin{aligned}(15) \quad D(w)\,w^{-1} &= D(uv^{-1})\,vu^{-1} = D(u)\,v^{-1}vu^{-1} + u\,D(v^{-1})\,vu^{-1}\\ &= D(u)u^{-1} - uv^{-1}\,D(v)u^{-1} = D(u)u^{-1} - \theta(uv^{-1})\,(D(v)\,v^{-1})\\ &= h(u - 1 - uv^{-1}(v - 1)) = h(w - 1),\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 3.

Des lemmes 2 et 3, il résulte que $\overline{\mathbf{L}}_n$ *est un groupe pour la loi* $\eta_1 \circ \eta_2$, groupe dont nous allons expliciter la multiplication. Posons

$$(16) \qquad z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \circ \ldots \circ x_n \in \overline{\mathbf{L}}_n,$$

donc dans l'algèbre $\overline{\mathbf{P}}_n$, on a identiquement $e^{a_1}\ldots e^{a_n} = {}^{z(a_1,\ldots,a_n)}$ et la même formule vaut dans toute algèbre où elle a un sens, en particulier, on aura pour a_1, $a_2 \in \overline{\mathbf{L}}_n$

$$(17) \qquad a_1 \circ a_2 = z(a_1, a_2).$$

De plus, si $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a

$$(18) \qquad e^z - 1 = e^{x_1}\ldots e^{x_n} - 1 = \sum_{(m)\neq 0} (m_1!\ldots m_n!)^{-1} x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n},$$

$$z = \sum_{k\neq 0} (-1)^k (e^z - 1)^{k k^{-1}} = \sum_{\substack{k\neq 0\\ (m^{(j)})\neq 0}} (-1)^{k k^{-1}}$$

$$\times \Big(\prod_{i,j} m_i^{(j)}!\Big)^{-1} x_1^{m_1^{(1)}}\ldots x_n^{m_n^{(1)}}\ldots x_1^{m_1^{(2)}}\ldots x_n^{m_n^{(2)}}\ldots x_1^{m_1^{(k)}}\ldots x_n^{m_n^{(k)}}$$

et l'on sait que $D(z) = h(z)$, donc que l'on ne change pas z en appliquant le projecteur P à chaque monôme de l'expression de z, soit

$$(19) \quad z(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k\neq 0\\ (m^{(j)})\neq 0}} (-1)^k \Big(k \sum_{i,j} m_i^{(j)} \prod_{i,j} m_i^{(j)}!\Big)^{-1} [x_1^{m_1^{(1)}}[\ldots[\ldots, x_n^{m_n^{(k)}}]\ldots]\ldots]$$

en posant pour abréger

$$[y_1^{\alpha_1}, [\ldots y_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, y_r^{\alpha_r}]\ldots] = \mathrm{ad}^{\alpha_1} y_1 \ldots \mathrm{ad}^{\alpha_{r-1}} y_{r-1}\, \mathrm{ad}^{\alpha_r - 1} y_r y_r.$$

Il nous reste à étudier les questions de convergence : soit $z_r(x_1, \ldots, x_n)$ la composante de degré r de $z(x_1, \ldots, x_n)$; comme c'est un élément de $\mathbf{L}_n$ qui est *libre*, on peut substituer aux x_i des éléments a_i d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ quelconque sur le corps des nombres rationnels, et l'on définit ainsi les fonctions $z_r(a_1, \ldots, a_n)$. Si $\mathfrak{g}$ est munie d'une norme telle que $\|[a, b]\| \leq \|a\|.\|b\|$, il résulte alors de la formation même du développement de $z(x_1, \ldots, x_n)$ que l'on a l'inégalité

$$\|z_r(a_1, \ldots, x_n)\| \leq r^{-1} f_r(\|a_1\|, \ldots, \|a_n\|), \tag{20}$$

où f_r est l'ensemble des termes de degré r du développement en série entière de

$$\log(e^{T_1}\ldots e^{T_n} - 1) = \log(e^{T_1+\ldots+T_n} - 1)$$

convergeant dès que $|T_1| + \ldots + |T_n| < \log 2$. Nous avons donc prouvé ceci :

Théorème. — *On définit sur toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients rationnels des fonctions $z_r(a_1, \ldots, a_n)$ en substituant a_i à x_i dans la somme des termes de degré r de la série* (19). *Si l'on pose formellement*

$$z(a_1, a_2) = \sum_{r \geq 0} z_r(a_1, a_2),$$

on a les identités formelles suivantes (qui signifient que les termes de degré r des deux membres sont égaux) :

$$z(a_1, z(a_2, a_3)) = z(z(a_1, a_2), a_3), \tag{21}$$

$$z(a, -a) = 0, \tag{22}$$

$$z(a, 0) = z(0, a) = a. \tag{23}$$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie normée complète avec une norme telle que $\|[a, b]\| \leq \|a\|.\|b\|$, la série $z(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ converge absolument dès que $\sum \|a_i\| < \log 2$, et la multiplication $a_1 \circ a_2 = z(a_1, a_2)$ définit un germe de groupe au voisinage de 0 *dans $\mathfrak{g}$; on a alors*

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n = z(a_1, \ldots, a_n)$$

pour les a_i assez voisins de 0 *dans $\mathfrak{g}$.*

Remarques. — 1° Les formules (22) et (23) traduisent le fait que l'on a $\xi \circ (-\xi) = 0$ et $\xi \circ 0 = 0 \circ \xi = \xi$ dans $\overline{\mathbf{L}}_n$.

2° Un calcul de majoration analogue à celui qu'on a fait montre que si $\mathfrak{g}$

est une algèbre de Lie de rang fini sur un corps valué complet, la série $z(a_1, \ldots, a_n)$ est le développement de Taylor d'une fonction analytique des arguments.

6. — A titre d'application, on va voir que les résultats précédents permettent de démontrer assez facilement le théorème de Birkhoff-Witt pour une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique o.

Faisons d'abord quelques remarques concernant l'algèbre tensorielle : soit **V** un espace vectoriel sur le corps **K** de caractéristique o, $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ l'algèbre tensorielle construite sur **V** (²), $\mathbf{TS}(\mathbf{V})$ le sous-espace des tenseurs symétriques. Comme **K** est de caractéristique o, le sous-espace $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ des tenseurs symétriques de degré n est sous-tendu par les tenseurs symétrisés $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} = t$ (les x_i sont des éléments de V). Or t est le coefficient de $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ dans le polynôme $(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^n$ (puissance calculée dans l'algèbre $\mathbf{T}(\mathbf{V})$: on omet le signe $\otimes$ de multiplication); si alors f est une forme linéaire sur $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ nulle sur les tenseurs x^n, le polynôme $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$ s'annule pour toutes les valeurs données aux variables λ_i, donc est identiquement nul, donc $f(t)$ qui est le coefficient de $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ est nul, ce qui implique que $f = 0$. Par suite, $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ est sous-tendu par les tenseurs x^n.

Soit u une application linéaire de $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ dans un espace vectoriel **W** et f la fonction définie dans **V** par la formule

$$f(x) = u(x^n), \tag{24}$$

u se prolonge en une application linéaire $\bar{u}$ de $\mathbf{T}_n(\mathbf{V})$ dans **W**, c'est-à-dire en une application n-linéaire de $\mathbf{V}^n$ dans **W**, soit $v(x_1, \ldots, x_n)$ et l'on a, par suite,

$$f(x) = v(x, x, \ldots, x). \tag{25}$$

Inversement, si f est une fonction définie dans **V** à valeurs dans **W** et s'il existe une fonction n-linéaire v telle que (25) ait lieu, on dira que *f est homogène de degré n*. Dans ce cas v définit une application linéaire v' de $\mathbf{T}_n(\mathbf{V})$ dans **W** dont la restriction u à $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$ vérifie (24); comme les x^n sous-tendent $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$, u ne dépend que de f et non de v (qui n'est pas unique en général). *La formule* (24) *établit donc une correspondance biunivoque entre les fonctions homogènes f de degré n et les applications linéaires u définies dans* $\mathbf{TS}_n(\mathbf{V})$.

Ceci dit, voici le théorème de Birkhoff-Witt :

Théorème. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps* **K** *de caractéris-*

(²) Pour les notions d'algèbre tensorielle, *cf.* Bourbaki, *Algèbre*, t. III, Paris, Hermann, 1948.

tique o; $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ *est somme directe de l'idéal bilatère* $\mathbf{J}$ *engendré par les éléments* $a_1 a_2 - a_2 a_1 - [a_1, a_2]$ $(a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$, crochet calculé dans $\mathfrak{g})$ *et du sous-espace* $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ *des tenseurs symétriques.*

$\mathfrak{g}$ étant une algèbre de Lie, le théorème du paragraphe 5 définit des fonctions $z_r(a_1, a_2)$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$; de même puisque $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[t_1, t_2] = t_1 t_2 - t_2 t_1$, il existe des fonctions analogues sur $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ dont nous noterons $\bar{z}_r(a_1, a_2)$ la restriction à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On a donc $\bar{z}_r(a_1, a_2) \in \mathbf{T}(\mathfrak{g})$ et il est clair sur la formule (19) que l'on a

$$\bar{z}_r(a_1, a_2) \equiv z_r(a_1, a_2) \pmod{\mathbf{J}}. \tag{26}$$

De plus, introduisant deux indéterminées $U_i (i = 1, 2)$, on définit une multiplication bilinéaire sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ par la formule symbolique suivante :

$$e^{U_1 a_1} \star e^{U_2 a_2} = e^{z(U_1 a_1, U_2 a_2)} \qquad (a_1, a_2 \in \mathfrak{g}) \tag{27}$$

qui a la signification suivante : le coefficient $f_{n_1, n_2}(a_1, a_2)$ de $U_1^{n_1} U_2^{n_2}$ dans le second membre est une fonction homogène de degré n_i en a_i $(i = 1, 2)$ et il existe par suite une fonction bilinéaire sur $\mathbf{TS}_{n_1}(\mathfrak{g}) \times \mathbf{TS}_{n_2}(\mathfrak{g})$ bien déterminée F_{n_1, n_2} telle que

$$f_{n_1, n_2}(a_1, a_2) = F_{n_1, n_2}(a_1^{n_1}/n_1!, a_2^{n_2}/n_2!). \tag{28}$$

Les fonctions F_{n_1, n_2} sont les restrictions d'une même fonction F bilinéaire définie sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g}) \times \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$, et l'on pose :

$$u \star v = F(u, v).$$

La formule (26) montre alors immédiatement que $u \star v \equiv uv \pmod{\mathbf{J}}$, le second produit étant pris au sens de $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$.

La multiplication sur $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ est *associative* d'après la formule (21) et l'on a

$$a \star a \star \ldots \star a = a^n \qquad (a \in \mathfrak{g},\ n \text{ facteurs}), \tag{29}$$

car si l'on a n éléments $\eta_i \in \bar{\mathbf{L}}_n (1 \leqq i \leqq n)$ commutant entre eux, on aura

$$e^{\eta_1} \ldots e^{\eta_n} = e^{\eta_1 + \ldots + \eta_n}$$

dans $\bar{\mathbf{P}}_n$, d'où

$$z(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \eta_1 + \ldots + \eta_n.$$

Cette identité est valable par spécialisation dans toute algèbre de Lie pour des éléments commutant deux à deux, donc

$$z(U_1 a, \ldots, U_n a) = (U_1 + \ldots + U_n) a$$

et, par suite,

$$e^{U_1 a} \star \ldots \star e^{U_n a} = e^{(\Sigma U_i) a}$$

et la formule (29) s'obtient en comparant les coefficients de $U_1 \ldots U_n$.

Nous allons maintenant calculer le produit de deux éléments de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$; pour cela, on évalue d'abord $z(x_1, x_2)$ modulo les termes de degré au moins égal à 3

$$\begin{aligned} z(x_1, x_2) &\equiv \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \\ &\equiv x_1 + x_2 + \frac{1}{2}[x_1, x_2], \end{aligned}$$

puis on évalue $e^{z(U_1 a_1, U_2 a_2)}$ en négligeant les termes de degré $\geqq 3$, soit

$$e^{z(U_1 a_1, U_2 a_2)} \equiv U_1 a_1 + U_2 a_2 + \frac{1}{2} U_1 U_2 [a_1, a_2] + \frac{1}{2}(U_1 a_1 + U_2 a_2)^2.$$

Il vient alors

$$a_1 \bigstar a_2 = \frac{1}{2}(a_1 a_2 + a_2 a_1) + \frac{1}{2}[a_1, a_2],$$

d'où

$$a_1 \bigstar a_2 - a_2 \bigstar a_1 = [a_1, a_2] \qquad (a_1, a_2 \in \mathfrak{g}). \tag{30}$$

Pour achever la démonstration, on définit un opérateur linéaire Q :

$$\mathbf{T}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{TS}(\mathfrak{g}) \qquad \text{par} \quad Q(a_1 \ldots a_n) = a_1 \bigstar \ldots \bigstar a_n$$

pour les $a_i \in \mathfrak{g}$; Q est un homomorphisme d'algèbres qui a les propriétés suivantes :

— Comme $u \bigstar v \equiv uv \pmod{\mathbf{J}}$ pour $u, v \in \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$, on a $Q(t) \equiv t \pmod{\mathbf{J}}$ pour tout $t \in \mathbf{T}(\mathfrak{g})$;

— D'après la formule (29), on a $Q(u) = u$ pour $u \in \mathbf{TS}(\mathfrak{g})$;

— D'après la formule (30), on a $Q(t) = 0$ pour $t \in \mathbf{J}$.

Autrement dit, *Q est un projecteur de* $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ *sur* $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ *dont le noyau est* $\mathbf{J}$, ce qui prouve que $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\mathbf{TS}(\mathfrak{g})$ et de $\mathbf{J}$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DYNKIN, Estimation des coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff, Doklady Akad. Naouk URSS, 57, (1947), p. 323-326 (en russe).

(Manuscrit reçu le 1er février 1956).