BULLETIN DE LA S. M. F.

LUC GAUTHIER

Commutation des matrices et congruences d'ordre un

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 283-294
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__283_0>

Bull. Soc. Math. France,
84, 1956, p. 283 à 294.

COMMUTATION DES MATRICES ET CONGRUENGES D'ORDRE UN

PAR

LUC GAUTHIER.

Résumé. — Ce Mémoire est le développement d'un exposé que j'ai fait au *Cinquième Congrès national de l'Union mathématique italienne*, qui a eu lieu à Pavie et Turin du 6 au 12 octobre 1955.

Les matrices carrées d'ordre n à éléments dans un corps commutatif k algébriquement clos, de caractéristique quelconque, sont représentées par les points d'un espace projectif S_{n^2-2}. Les matrices qui commutent avec une matrice donnée M sont représentées par les points d'un S_{n-2}, qui décrit, lorsque M varie, une congruence d'ordre un ayant pour focale une variété algébrique rationnelle dont la dimension est seulement n^2-5, d'ordre $n^2(n^2-1)/12$, image des matrices dérogatoires.

Introduction. — L'ensemble des *matrices carrées d'ordre* n, $X=(x_i^j)$ à éléments x_i^j pris dans un corps commutatif quelconque k, est souvent représenté par l'espace vectoriel à n^2 dimensions défini sur k : il suffit de prendre comme base les matrices E_i^j ayant pour éléments

$$e_p^q = 0 \quad \text{pour} \quad (p, q) \neq (i, j),$$
$$e_i^j = 1.$$

La représentation est alors la simple interprétation de la relation

$$X = \sum_{i,j} x_i^j E_i^j.$$

Dans un Mémoire récent, J. DIEUDONNÉ [1] (¹) a interprété la théorie des matrices équivalentes au moyen du groupe des transformations linéaires à n^2 variables qui laissent invariant le cône

$$\det X = 0.$$

C'est la lecture de ce Mémoire qui m'a ramené à l'étude des beaux travaux

(¹) Les indications entre [ ] renvoient à la bibliographie, à la fin du Mémoire.

de C. Segre [2] sur les diviseurs élémentaires et [3] sur les variétés qui portent son nom, et qui m'a suggéré l'objet des recherches que je présente ici.

Une propriété algébrique importante d'un couple de matrices est leur éventuelle commutativité

$$A.B = B.A.$$

Lorsqu'on interprète une matrice comme définissant dans un espace projectif S_{n-1} une transformation projective, ou dualistique, le produit de deux matrices correspond au produit des transformations associées, et la commutativité des matrices exprime évidemment que les transformations sont permutables. Mais ce n'est pas ce point de vue qui m'occupera : je désire obtenir une signification géométrique de la commutativité, dans l'espace vectoriel précédent (ou un espace analogue) où les matrices sont représentées par des éléments géométriques et non par des opérateurs.

Choix de l'espace représentatif. — Quelques remarques élémentaires vont nous conduire au choix d'un espace représentatif.

La propriété de commutativité est homogène : Si

$$A.B = B.A.$$

alors, quels que soient les scalaires p et q,

$$pA.qB = pq\,A.B = qp\,B.A = qB.pA$$

(et réciproquement, si p, q sont différents de zéro).

On peut donc, en faisant désormais abstraction de la *matrice nulle*, qui commute avec toute matrice, considérer comme équivalentes (vis-à-vis de la commutativité) deux matrices proportionnelles, et substituer à l'espace vectoriel précédent, l'espace projectif correspondant S_{n^2-1}. Les x_i^j sont alors les coordonnées homogènes de l'image de la matrice X.

Désignons par U la *matrice unité*, ayant pour éléments

$$u_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Elle est permutable avec toute matrice. On peut alors remarquer, comme précédemment, en substituant à la matrice nulle la matrice unité, que si

$$A.B = B.A,$$

alors, quel que soit le scalaire p,

$$(A + pU).B = A.B + pB = B.(A + pU)$$

et réciproquement.

On peut donc considérer comme équivalentes (vis-à-vis de la commutativité) deux matrices qui diffèrent d'un multiple scalaire de U : on peut ainsi substituer à toute matrice, une matrice équivalente vérifiant une condition linéaire et homogène donnée *a priori*, non vérifiée par U. Ceci signifie que dans S_{n^2-1} nous pouvons effectuer une *projection à partir du point image de U, sur un hyperplan arbitraire S_{n^2-2}* ne passant pas par ce point.

Nous ne préciserons pas plus le choix de cet hyperplan : il nous suffit d'avoir une convention de langage permettant de représenter par les points d'un espace projectif S_{n^2-2} les droites issues du point image de U dans S_{n^2-1}, c'est-à-dire les classes de matrices $pX + qU$ $(p \neq 0)$.

Nature géométrique de la question. — En posant, comme il est usuel,

$$[A, B] = A.B - B.A,$$

la commutativité de A et B s'écrit

$$[A, B] = 0.$$

Cette propriété est linéaire. Considérons en effet deux combinaisons linéaires, à coefficients scalaires,

$$[(uA + vB), (u'A + v'B)] = (uv' - vu')\,[A, B],$$

Si A et B sont permutables, il en est de même des deux combinaisons, quels que soient les scalaires u, v, u', v' ; et la réciproque est vraie si $uv' - vu' \neq 0$, c'est-à-dire si les deux combinaisons considérées ne sont pas proportionnelles.

La signification géométrique, dans l'espace S_{n^2-2}, de la commutativité de A et B, est donc une *propriété de la droite* joignant les images de A et B.

Considérons alors une matrice M *régulière* ($\det M \neq 0$), et la transformation

$$Y = M^{-1}.X.M$$

de la matrice arbitraire X, en la *matrice semblable Y*. Les composantes y_i^j de Y sont des formes linéaires par rapport aux x_i^j et la représentation dans l'espace projectif S_{n^2-1} du groupe multiplicatif des M est un *groupe projectif*, qui exprime projectivement la structure algébrique invariante de l'anneau des matrices

$$M^{-1}.(a_1X_1 + a_2X_2).M = a_1M^{-1}.X_1.M + a_2M^{-1}.X_2.M.$$

La transformée d'une combinaison linéaire de matrices est la combinaison des transformées, avec mêmes coefficients scalaires,

$$M^{-1}.(X_1.X_2).M = (M^{-1}.X_1.M).(M^{-1}.X_2.M).$$

La transformée d'un produit de matrices est le produit des transformées. En particulier :

L'espace linéaire des polynômes en X à coefficients scalaires est transformé en celui des polynômes en Y.

La famille des droites représentatives de la commutativité est globalement invariante dans les transformations de ce groupe projectif.

Pour caractériser ce groupe, prenons les déterminants

$$\det Y = (\det M)^{-1} (\det X) (\det M) = \det X.$$

L'hypersurface V^n d'ordre n

$$\det X = 0$$

est invariante.

Remarquons en outre que

$$M^{-1}.U.M = U.$$

Le point représentatif de U est invariant.

Ces deux propriétés suffisent à caractériser le groupe projectif image des matrices semblables : On sait, en effet [1], que le groupe projectif qui conserve l'hypersurface V^n sans échanger ses deux familles d'espaces linéaires générateurs (qui correspondent aux idéaux à droite et à gauche) est l'image du groupe de l'équivalence

$$Y = P.X.Q,$$

avec

$$\det P \neq 0, \qquad \det Q \neq 0.$$

L'invariance de U assure alors

$$Y - p\lambda U = P.(X - \lambda U).Q,$$

p étant un scalaire non nul. Il en résulte

$$P.Q = pU.$$

Comme nous avons identifié les matrices proportionnelles, nous pouvons supposer

$$P = Q^{-1}$$

et les matrices X et Y sont bien semblables.

Notons encore que, toute matrice régulière X ($\det X \neq 0$) pouvant être transformée par équivalence en la matrice unité U

$$U = X^{-1}.X.U,$$

c'est-à-dire

$$P = X^{-1}, \qquad Q = U,$$

dans S_{n^2-1} le point image de U est un point générique extérieur à V^n.

Ainsi, *le groupe projectif de S_{n^2-1}, image des matrices semblables, isomorphe du groupe multiplicatif des matrices régulières, est le groupe des transformations projectives qui conservent individuellement les deux* *systèmes d'espaces générateurs de l'hypersurface* $V^n(\det X = 0)$ *et un point générique U extérieur à celle-ci.*

Étant donné que la matrice unité U est symétrique, il est possible d'accroître ce groupe en un *groupe mixte* en lui adjoignant la *transposition*

$$Y = X'$$

qui permute les deux systèmes d'espaces générateurs de V^n.

Le groupe projectif mis en évidence dans S_{n^2-1} possède un *hyperplan invariant :* l'hyperplan $(n-1)$ — ième polaire du point U par rapport à V^n

$$\mathrm{Tr}\, X = \sum_i x_i^i = 0.$$

On aurait pu songer à prendre cet hyperplan comme espace représentatif; nous ne l'avons pas fait pour conserver à notre exposé toute sa généralité : en effet, l'hyperplan invariant passe par U, et par conséquent ce choix n'est pas admissible, lorsque le corps de base k a une *caractéristique finie p qui divise l'ordre n :* on a, en effet, dans ce cas

$$\mathrm{Tr}\, U = 0,$$
$$\mathrm{Tr}(X + \lambda U) = \mathrm{Tr}\, X.$$

Examinons maintenant le cône de sommet A, représentatif de toutes les matrices qui commutent avec une matrice donnée A

$$[A, X] = 0.$$

La règle de calcul du produit de deux matrices donne les conditions nécessaires et suffisantes

$$\sum_j (a_i^j x_j^k - a_j^k x_i^j) = 0$$

qui forment un système de n^2 équations linéaires par rapport aux coordonnées grassmanniennes de la droite AX.

La famille des droites images de la commutativité est la base d'un système linéaire de complexes linéaires.

Ainsi, le cône de sommet A représentatif de toutes les matrices qui commutent avec A est un espace projectif passant par A, éventuellement réduit au seul point A.

Explicitons ce calcul dans le cas $n = 2$. Les conditions s'écrivent

$$\begin{aligned}
&a_1^2 x_2^1 - a_2^1 x_1^2 = 0,\\
&a_1^1 x_1^2 - a_1^2 x_1^1 + a_1^2 x_2^2 - a_2^2 x_1^2 = 0,\\
&a_2^1 x_1^1 - a_1^1 x_2^1 + a_2^2 x_2^1 - a_2^1 x_2^2 = 0,\\
&a_2^1 x_1^2 - a_1^2 x_2^1 = 0;
\end{aligned}$$

elles se réduisent visiblement aux trois conditions

$$a_1^2 x_2^1 - a_2^1 x_1^2 = 0,$$
$$(a_1^1 - a_2^2) x_1^2 - a_1^2 (x_1^1 - x_2^2) = 0,$$
$$(a_1^1 - a_2^2) x_2^1 - a_2^1 (x_1^1 - x_2^2) = 0$$

qui expriment que la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - a_2^2 & a_1^2 & a_2^1 \\ x_1^1 - x_2^2 & x_1^2 & x_2^1 \end{pmatrix}$$

est de rang un, c'est-à-dire que dans l'espace projectif S_3 les trois points U, A, X sont alignés, ou encore, que dans le plan représentatif les deux points images coïncident.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices d'ordre 2 soient permutables est que l'on puisse réaliser

$$uA + vX + wU = 0,$$

les scalaires u, v, w étant non tous nuls. Ceci veut dire que si A est proportionnelle à U (en particulier nulle), elle est permutable avec toute matrice, mais que s'il n'en est pas ainsi, les matrices X permutables avec elle sont de la forme

$$X = pA + qU.$$

Les familles de droites, bases de systèmes linéaires de complexes lineaires ont été étudiés par G. Castelnuovo, puis par F. Palatini [4], mais la famille que nous rencontrons ici échappe à leur étude : l'exemple très simple examiné plus haut montre en effet que, si les n^2 équations écrites ne sont pas linéairement indépendantes, les complexes linéaires linéairement indépendants qui définissent la famille ne sont pas algébriquement indépendants.

C'est pourquoi nous avons pensé que cette figure méritait une étude particulière.

Le caractère linéaire du cône de sommet A représentatif de toutes les matrices qui commutent avec A peut être mis en évidence sans l'emploi de coordonnées grassmanniennes, par la remarque suivante : Si

$$[A, X] = 0, \qquad [A, Y] = 0,$$

alors, quels que soient les scalaires u, v,

$$[A, (uX + vY)] = u[A, X] + v[A, Y] = 0$$

qui signifie géométriquement que lorsque le cône de sommet A contient deux génératrices AX et AY, il contient tout le plan AXY qui les joint.

Propriétés algébriques. — Dans les mêmes hypothèses que ci-dessus,

$$[A, X] = 0, \qquad [A, Y] = 0,$$

la matrice A commute avec tout produit des matrices X et Y, par exemple

$$A.X.Y = X.A.Y = X.Y.A,$$

de sorte qu'en posant

$$Y = X^n$$

et en raisonnant par récurrence, on en déduit que si A est permutable avec X, elle l'est aussi avec toute puissance de X. Finalement, A^n permutable avec toute puissance de X et de Y, l'est avec tout monôme en X, Y, et, en vertu de la distributivité par rapport à l'addition, tout polynôme à coefficients scalaires $P(A)$ est permutable avec tout polynôme (non commutatif) en X et Y

$$[P(A),\ Q(X,\ Y)] = 0.$$

Ainsi : *Le cône de sommet A* (linéaire) représentatif de toutes les matrices qui commutent avec A *contient l'espace linéaire des polynômes en A* à coefficients scalaires.

Lorsqu'il contient *diverses génératrices*, AX, AY, ..., il contient *tout l'espace linéaire des polynômes* (*non commutatifs*) en A, X, Y, ...

Ce résultat admet une réciproque, que je rappellerai sans démonstration [5] :

Les matrices qui commutent avec toute matrice X qui commute avec A sont les polynômes en A, à coefficients scalaires, ce qui signifie géométriquement :

Lorsqu'un point X décrit le cône (*linéaire*) *de sommet A, représentatif de toutes les matrices qui commutent avec A, le cône analogue de sommet X a pour enveloppe l'espace linéaire des polynômes en A, à coefficients scalaires.*

Propriétés spectrales. — Soit $\vec{V}$ un *vecteur propre* de la matrice A, dont nous supposons qu'il est l'*unique* vecteur propre associé à la racine S de l'équation spectrale. On a donc

$$A.\vec{V} = S\vec{V},$$

d'où

$$(B.A).\vec{V} = B.S\vec{V} = SB.\vec{V}.$$

Si A et B sont permutables, on a donc

$$A.\left(B.\vec{V}\right) = B.A.\vec{V} = S\left(B.\vec{V}\right).$$

Le vecteur $B.\vec{V}$ est donc un vecteur propre de A, correspondant à la racine S, et à cause de notre hypothèse d'unicité, il est colinéaire à $\vec{V}$

$$B.\vec{V} = S'\vec{V},$$

$\vec{V}$ est donc aussi un vecteur propre de B.

Lorsque deux matrices A et B sont permutables, toute direction de vecteur propre de l'une, associé de manière unique à la racine correspondante de son équation spectrale, est aussi direction de vecteur propre de l'autre.

Voici une application très simple de ce résultat : Considérons une matrice A générique, ayant *toutes ses racines spectrales distinctes*, et par conséquent n vecteurs propres indépendants. Toute matrice X permutable avec A doit admettre le même repère de vecteurs propres. D'autre part, nous pouvons remplacer la matrice A par la *matrice semblable* A_0 ayant la forme diagonale

$$A_0 = \sum_i S_i E_i^i.$$

La matrice X devient alors une matrice X_0 nécessairement diagonale

$$X_0 = \sum_i x_i E_i^i.$$

Il est alors facile de vérifier que X_0 est un polynôme en A_0

$$X_0 = u_0 U + u_1 A_0 + \ldots + u_{n-1} A_0^{n-1}.$$

Cette relation se réduit en effet aux n équations scalaires

$$\sum_k u_k S_i^k = x_i$$

résolubles d'après une propriété classique du déterminant de Van der Monde.

Pour qu'une matrice commute avec une matrice A ayant toutes ses racines distinctes, il faut et il suffit qu'elle soit un polynôme en A, à coefficients scalaires.

Ainsi, dans l'espace représentatif S_{n^2-2}, le cône de sommet générique A se réduit à l'espace linéaire des polynômes en A, modulo U.

D'après le théorème classique d'Hamilton, A vérifie son polynôme caractéristique $f(A)$, et comme les racines sont distinctes, c'est le polynôme minimal annulé par A : les polynômes en A doivent donc être considérés modulo $f(A)$, et l'espace linéaire a pour dimension $n-2$.

La configuration que nous étudions est une congruence d'ordre un d'espaces linéaires S_{n-2} dans S_{n^2-2}.

Propriétés de composition. — Considérons une matrice quelconque. Nous pouvons la remplacer par une matrice semblable revêtant la forme

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

d'une somme directe, où A est une matrice carrée, réduite à la forme normale, et ayant une seule valeur propre S, et où B est une matrice carrée qui n'admet pas la valeur propre S.

La matrice inconnue étant mise sous la forme

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

on devra avoir

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.X & A.Y \\ B.Z & B.T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X.A & Y.B \\ Z.A & T.B \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\begin{aligned} A.X &= X.A, \\ B.T &= T.B, \\ A.Y &= Y.B, \\ B.Z &= Z.A. \end{aligned}$$

Mettons en évidence dans Z les vecteurs colonnes

$$Z = (\vec{V}_1 . \vec{V}_2 \ldots \vec{V}_n).$$

La matrice $B.Z$ est formée des vecteurs colonnes

$$B.\vec{V}_k$$

et la matrice $Z.A$ des vecteurs colonnes

$$a_{k-1}{}^k \vec{V}_{k-1} + S\vec{V}_k$$

et ces deux vecteurs doivent être égaux, pour toute valeur de $k = 1, \ldots, n$. Ainsi

$$B.\vec{V}_1 = S.\vec{V}_1.$$

Comme S n'est pas une valeur propre de B, il en résulte

$$\vec{V}_1 = 0$$

et, par récurrence,

$$\vec{V}_k = 0,$$

donc

$$Z = 0.$$

Par transposition de la relation

$$A . Y = Y . B,$$

le même raisonnement montre que

$$Y = 0.$$

La matrice inconnue admet donc une décomposition en somme directe

$$X \oplus T = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

analogue à celle de la matrice donnée, et les matrices partielles homologues sont permutables.

Ce résultat complète le précedent, auquel il se réduit dans le cas de matrices à racines spectrales toutes distinctes.

Conclusions. — Par application des méthodes précédentes, le résultat énoncé pour les matrices à racines spectrales distinctes, peut être étendu sous la forme précise suivante, due à H. TABER [**6**] :

La condition nécessaire et suffisante pour que toute matrice qui commute avec une matrice donnée A soit un polynôme en A, à coefficients scalaires, est que A soit non dérogatoire.

Rappelons que, selon SYLVESTER, une matrice est dite *dérogatoire* lorsque son polynôme minimal est différent de son polynôme caractéristique (dont il est alors un diviseur). Ainsi :

La variété focale Ω de la congruence est, dans S_{n^2-2}, la variété image des matrices dérogatoires.

Soit alors A une matrice dérogatoire : elle admet au moins un plan de vecteurs propres. Si S est la racine spectrale qui correspond à cette indétermination, la matrice :

$$A - SU$$

de sa classe, est de rang

$$r \leqq n - 2.$$

Réciproquement, si M est une matrice ayant un tel rang, toutes les matrices

$$M + \lambda U$$

sont dérogatoires.

L'image dans S_{n^2-1} de l'ensemble des matrices dérogatoires est le cône de sommet U ayant pour directrice la variété image des matrices dont le rang ne dépasse pas $n - 2$.

On sait, d'autre part, par un Mémoire de C. SEGRE [7] que la variété image des matrices dont le rang ne dépasse pas $n-2$, de dimension n^2-5 et d'ordre

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

est la *variété double de* V^n.

La variété focale $\Omega^N_{n^2-5}$ *de la congruence est la projection faite du point générique* U, *de la variété double de l'hypersurface* V^n.

On sait également par le même Mémoire de C. SEGRE que les matrices de rang $r=1$ sont représentées dans S_{n^2-1} par la variété de Segre W_{2n-2} produit de deux S_{n-1}, et la variété double de V^n est le lieu des S_{n-3} sécants en $n-2$ points à W_{2n-2}.

Considérons alors un S_{n-2} de la congruence : les points focaux sont, d'après la propriété d'inclusion des espaces de polynômes, répartis suivant n espaces S_{n-3} formant *un polyèdre complet, dont les n sommets sont les points d'appuis de* S_{n-2} *à la projection* $\Omega^\star_{2n-2}$ *de* W_{2n-2}. Ainsi :

La congruence des S_{n-2} *images de la commutation est la congruence d'ordre un engendrée par les* S_{n-2} *qui ont* $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ *points d'appuis à la variété* $\Omega^\star_{2n-2}$ *projection générique de la variété de Segre* W_{2n-2} *produit de deux* S_{n-1}.

Exemples numériques. — Nous avons déjà noté que la commutation des matrices à deux lignes et deux colonnes est représentée dans un plan projectif, deux matrices commutant quand leurs images coïncident.

La commutation des matrices à trois lignes et trois colonnes est représentée dans l'espace projectif S_7 par la congruence d'ordre un des droites qui s'appuient en trois points sur la variété focale Ω^6_4 rationnelle, projection de la variété de Segre produit de deux plans projectifs.

La commutation des matrices à quatre lignes et quatre colonnes est représentée dans l'espace projectif S_{14} par la congruence d'ordre un des plans hexasécants à la variété Ω^{20}_6 rationnelle, projection de la variété de Segre produit de deux S_3. Les foyers dans chaque plan forment le quadrilatère complet dont les six sommets sont les six appuis. Les quatre côtés décrivent la variété focale Ω^{20}_{11}.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. DIEUDONNÉ, *Archiv der Mathematik*, Bd 1, 1948-1949, p. 282-287.

[2] C. SEGRE, *Atti Reale Accad. Lincei Mem.* III, t. 19, 1884, p. 127-148. *Cf.* aussi le traité classique de BERTINI, *Introduzione alla Geom. proiett. degli iperspaz i* 1907, p. 75-113.

[3] C. SEGRE, *Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 5, 1891.
[4] G. CASTELNUOVO, *Atti del Reale Istituto Veneto*, 1891, p. 855.
F. PALATINI, *Ibid.*, 1900-1901, p. 371. *Cf.* aussi : L. GAUTHIER, *Sur certains systèmes hyperspatiaux de droites* (*Mém. Soc. Roy. des Sciences de Liége*, t. 6, 1945, p. 141-155).
[5] *Cf.* l'Ouvrage classique de WEDDERBURN, *Lectures on matrices* (*Colloquium A. M. S.*, 1934, p. 106).
[6] H. TABER, *Proc. Amer. Acad. Boston*, t. 27, 1892, p. 46-56. Ce résultat avait été conjecturé par SYLVESTER en 1884.
[7] C. SEGRE, *Atti Reale Accad. Lincei Rend.* t. 9, 1900, p. 253-260. *Cf.* aussi KANTOR, *Sitzungsber. Kön. Bayer. Akad. München*, t. 27, 1897.

(Manuscrit reçu en mars 1956.)