BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL JAFFARD

# Réalisation des groupes complètement réticulés

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 84 (1956), p. 295-305

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__295_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Bull. Soc. Math. France*,
84, 1956, p. 295 à 305.

# RÉALISATION DES GROUPES COMPLÈTEMENT RÉTICULÉS;

PAR

PAUL JAFFARD.

**Résumé.** — Définition et détermination des homomorphismes complètement coréticulés d'un groupe abélien complètement réticulé $G$. Condition d'existence de tels homomorphismes dans le cas où l'image doit être totalement ordonnée. Définition d'une réalisation complètement coréticulée d'un groupe abélien complètement réticulé $G$. Condition d'existence d'une telle réalisation.

Dans un travail mémorable [6], LORENZEN a montré que tout groupe abélien réticulé $G$ peut être considéré comme un sous-groupe coréticulé d'un produit direct ordonné $\Gamma$ de groupes totalement ordonnés [c'est-à-dire que les opérations $\inf(x, y)$ et $\sup(x, y)$ coïncident sur $\Gamma$ et sur $G$]. Si le groupe $G$ est complètement réticulé, on peut chercher à réaliser $G$ comme sous-groupe complètement coréticulé d'un produit direct $\Gamma'$ de groupes totalement ordonnés [c'est-à-dire chercher à ce que les opérations $\inf(A)$ et $\sup(A)$ coïncident sur $G$ et $\Gamma'$ non seulement lorsque $A$ est un sous-ensemble fini de $G$, mais encore lorsque c'est un ensemble majoré dans $G$ dans le cas de l'opération sup, et minoré dans le cas de l'opération inf]. En appliquant la théorie des filets que nous avons introduite dans une étude antérieure [4], nous montrons que ce problème n'admet pas toujours une solution. Pour qu'il en admette une, il faut et il suffit que tout filet non nul de $G$ soit supérieur ou égal à un filet minimal, c'est-à-dire que $G$ admette une réalisation irréductible. On en déduit en particulier que si le groupe complètement réticulé $G$ admet une réalisation comme sous-groupe complètement coréticulé d'un produit direct ordonné $\Gamma$ de groupes totalement ordonnés $\left(\Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota\right)$, cette réalisation est unique et tous les groupes totalement ordonnés $G_\iota$ intervenant dans cette réalisation sont isomorphes, soit au groupe additif des entiers ordinaires, soit à celui des nombres réels.

Tous les groupes intervenant dans cette étude sont abéliens. Ils seront notés additivement. Par groupe ordonné, nous entendrons, sauf mention expresse du contraire, groupe partiellement ordonné. Si $G$ est un groupe ordonné, nous désignerons par $G_+$ l'ensemble de ses éléments positifs ou nuls. Si $x$ est un élément du groupe réticulé $G$, on note $x^+$ l'élément $\sup(x, 0)$

et $x^-$ l'élément $-\inf(x, 0)$. On a alors $x = x^+ - x^-$ et $\inf(x^+, x^-) = 0$ ($x^+$ et $x^-$ sont donc étrangers). On pose $|x| = x^+ + x^-$. Si $X$ est une partie du groupe ordonné $G$ bornée supérieurement (resp. inférieurement) par l'élément $x$, on pose $x = \sup(X)$ [resp. $x = \inf(X)$]. Le groupe $G$ est dit *complètement réticulé* si toute partie majorée de $G$ est bornée supérieurement.

1. **Homomorphismes complétement coréticulés.** — Un homomorphisme $\varphi$ d'un groupe ordonné $G$ dans un groupe ordonné $\Gamma$ sera dit *croissant* si pour tout couple $x$; $y \in G$, la relation $x \leqq y$ entraîne $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$. Il faut et il suffit pour cela que $\varphi(G_+) \subset \varphi(\Gamma_+)$.

Un homomorphisme $\varphi$ d'un groupe réticulé $G$ dans un groupe réticulé $\Gamma$ sera dit *coréticulé* (¹) si pour tout couple $x, y \in G$, on a la relation

$$\varphi(\sup(x, y)) = \sup(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Cette relation entraîne alors

$$\varphi(\inf(x, y)) = \inf(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Un homomorphisme coréticulé est nécessairement croissant.

Dans le cas où $G$ et $\Gamma$ sont tous deux complètement réticulés, l'homomorphisme $\varphi$ sera dit *complètement coréticulé* si tout ensemble borné supérieurement $X$ de $G$ a pour image $\varphi(X)$ un sous-ensemble borné supérieurement de $\Gamma$ tel que :

$$\varphi(\sup(X)) = \sup(\varphi(X)).$$

On voit immédiatement que pour que $\varphi$ soit complètement coréticulé, il faut et il suffit que tout sous-ensemble borné inférieurement $Y$ de $G$ ait pour image $\varphi(Y)$ un sous-ensemble borné inférieurement de $\Gamma$ tel que

$$\varphi(\inf(Y)) = \inf(\varphi(Y)).$$

Un tel homomorphisme est évidemment coréticulé. On donnera plus loin l'exemple d'un homomorphisme coréticulé qui n'est pas complètement coréticulé.

Si $H$ est un sous-groupe du groupe ordonné $G$, $\Gamma$ le groupe quotient $G/H$ et $\varphi$ l'homomorphisme canonique de $G$ sur $\Gamma$, on sait (*voir* [4] que pour que l'on puisse définir sur $\Gamma$ une structure d'ordre, compatible avec sa structure de groupe, et telle que $\varphi$ soit croissant, il faut et il suffit que $H$ soit un sous-groupe *isolé* de $G$, c'est-à-dire tel que les inégalités

$$h_1 \leqq x \leqq h_2 \qquad (h_1, h_2 \in H;\ x \in G)$$

entraînent $x \in H$.

(¹) Un tel homomorphisme est appelé dans [4] homomorphisme propre.

Parmi les structures d'ordre définies sur $\Gamma$ qui rendent $\varphi$ croissant, il en existe une moins fine que toutes les autres. Elle est définie par la condition

$$\Gamma_+ = \varphi(G_+)$$

ou encore

$$\varphi(x) \geqq 0 \quad \rightleftharpoons \quad \{\exists h \in H, \text{ avec } x \geqq h\}.$$

Le groupe quotient $G/H$ ainsi ordonné sera dit *ordonné canoniquement*. On sait (*voir* [4], chap. I) que si $H$ est un sous-groupe isolé du groupe réticulé $G$, pour que $G/H$ ordonné canoniquement soit réticulé et pour que l'application canonique de $G$ sur $G/H$ soit coréticulée, il faut et il suffit que $H$ soit un *sous-groupe coréticulé* de $G$ (2), c'est-à-dire tel que, pour tout couple $x$, $y$ d'éléments de $H$, $\sup(x, y)$ (dans $G$) appartienne à $H$.

Si $G$ est un groupe complètement réticulé, nous appellerons *bande* de $G$ tout sous-groupe isolé $H$ de $G$ tel que tout sous-ensemble $X$ de $H$ borné supérieurement dans $G$ ait pour borne supérieure (dans $G$) un élément de $H$ (3). Ceci posé, nous avons le :

Théorème 1. — *Pour que le sous-groupe isolé $H$ du groupe complètement réticulé $G$ soit une bande, il faut et il suffit que le groupe $G/H$ ordonné canoniquement soit complètement réticulé et que l'application canonique $\varphi$ de $G$ sur $G/H$ soit complètement coréticulée.*

*Les conditions sont suffisantes.* — Soit $\varphi$ une application complètement coréticulée de $G$ sur le groupe $G/H$ complètement réticulé. Soit $X \subset H$ tel que $x = \sup(X)$ (dans $G$). On a alors

$$\varphi(x) = \sup \varphi(X) = \sup(0) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad x \in H.$$

Le sous-groupe $H$ est bien une bande de $G$.

*Les conditions sont nécessaires.* — Supposons que $H$ soit une bande de $G$. Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ un sous-ensemble de $G$ tel que $x = \sup(x_\iota)$.

Montrons que dans $G/H$ on a

$$\varphi(x) = \sup(\varphi(x_\iota))_{\iota \in I}.$$

Les relations $x \geqq x_\iota$ entraînent

$$\varphi(x) \geqq \varphi(x_\iota), \qquad \forall \iota \in I.$$

Soit maintenant $y \in G$ tel que

$$\varphi(y) \geqq \varphi(x_\iota), \qquad \forall \iota \in I.$$

---

(2) Un tel sous-groupe est appelé dans [4] sous-groupe propre.

(3) On voit que dans le cas où $G$ est un espace de Riesz, on retrouve la définition des bandes donnée dans [2].

On a pour tout $\iota \in I$

$$\varphi(y - x_\iota) \geqq 0.$$

Posons

$$z_\iota = y - x_\iota.$$

On a $\varphi(z_\iota)^- = \varphi(z_\iota^-)$ puisque $\varphi$ est une application coréticulée. $\varphi(z_\iota) \geqq 0$ entraînant $\varphi(z_\iota)^- = 0$, on a donc $z_\iota^- \in H\ (\forall \iota \in I)$. D'autre part, $z = \inf(z_\iota) = y - x$ est tel que

$$-z^- = \inf(z, 0) = \inf(\inf(z_\iota, 0)) = \inf(-z_\iota^-).$$

Comme $H$ est une bande, les relations $z_\iota^- \in H\ (\forall \iota \in I)$ entraînent $z^- \in H$ et $\varphi(z) = \varphi(z^+) \geqq 0$, c'est-à-dire encore $\varphi(\inf(y - x_\iota)) \geqq 0$.

Or

$$\varphi(\inf(y - x_\iota)) = \varphi(y + \inf(-x_\iota)) = \varphi(y - \sup(x_\iota)) \geqq 0.$$

On a donc

$$\varphi(y) \geqq \varphi(\sup(x_\iota)) = \varphi(x).$$

D'où l'égalité cherchée :

$$\varphi(x) = \sup(\varphi(x_\iota)).$$

Montrons maintenant que $G/H$ est complètement réticulé.

Soit $(\varphi(x_\iota))_{\iota \in I}$ un sous-ensemble de $G/H$ majoré par $\varphi(a)$. D'après la définition de la structure d'ordre de $\Gamma$, pour tout $\iota \in I$ il existe $h_\iota \in H$ tel que $a \geqq x_\iota + h_\iota = y_\iota$. Le sous-ensemble $(y_\iota)_{\iota \in I}$ du groupe complètement réticulé $G$ étant majoré par $a$ admet une borne supérieure $y = \sup(y_\iota)$ et, d'après ce que l'on vient de montrer,

$$\varphi(y) = \sup(\varphi(y_\iota)) = \sup(\varphi(x_\iota)).$$

Donc $\sup(\varphi(x_\iota))$ existe et $G/H$ est complètement réticulé. D'où le théorème **1**.

Montrons maintenant sur un exemple simple qu'*un sous-groupe isolé coréticulé d'un groupe complètement réticulé n'est pas nécessairement une bande.*

Soit $E$ l'ensemble des entiers ordinaires supérieurs ou égaux à 1. Soit $G$ le groupe complètement réticulé formé par toutes les fonctions à valeurs réelles définies sur $E$. Soit $H$ le sous-ensemble de $G$ formé par les éléments $x$ de $G$ tels que la série $\sum_1^\infty x(n)$ converge absolument.

On voit immédiatement que $H$ est un sous-groupe de $G$. Il est isolé, car si l'on a $0 \leqq y \leqq x$ et $x \in H$, les inégalités $|y(n)| \leqq |x(n)|$ et la convergence absolue de la série $x(n)$ entraînent celle de la série $y(n)$.

$H$ est un sous-groupe coréticulé de $G$, car si $z = \sup(x, y)$, avec $x, y \in H$, les inégalités

$$|z(n)| \leq |x(n)| + |y(n)| \qquad (\forall n \in E)$$

entraînent la convergence absolue de la série $z(n)$.

Montrons que $H$ n'est pas une bande de $G$.

Soit $a \in G$ ainsi défini : $a(n) = 1/n^2$ et soient les éléments $b_m (m \in E)$ ainsi définis :

$$b_m(n) = 1 \qquad \text{si} \quad n \leq m,$$
$$b_m(n) = a(n - m) \qquad \text{si} \quad n \geq m + 1.$$

On voit que $b_m \in H (\forall m \in E)$. On a dans $G$

$$\sup(b_m) = b \qquad [\text{avec } b(n) = 1, \ \forall n \in E]$$

et cependant $b \notin H$.

2. **Homomorphismes sur des groupes totalement ordonnés.** — Rappelons brièvement (*voir* [6]) comment les homomorphismes coréticulés du groupe ordonné $G$ sur des groupes totalement ordonnés correspondent biunivoquement aux $t$-idéaux premiers de $G$.

On appelle *$t$-idéal premier* de $G$ tout sous-ensemble $\mathfrak{p}$ de $G_+$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\qquad \mathfrak{p} \neq G_+, \emptyset,$

(2) $\qquad \{x \in \mathfrak{p} \text{ et } x \leq y\}$ entraîne $y \in \mathfrak{p}$,

(3) $\qquad x, y \in \mathfrak{p}$ entraîne $\inf(x, y) \in \mathfrak{p}$,

(4) $\qquad \{x, y \in G_+, x + y \in \mathfrak{p} \text{ et } x \notin \mathfrak{p}\}$ entraîne $y \in \mathfrak{p}$.

On appelle *maximal* un $t$-idéal premier de $G$ qui n'est contenu dans aucun autre, *minimal* un $t$-idéal premier de $G$ qui n'en contient aucun autre.

La correspondance indiquée entre les $t$-idéaux premiers de $G$ et les homomorphismes coréticulés de $G$ est définie de la façon suivante : $\mathfrak{p}$ étant un $t$-idéal premier, le sous-ensemble $H_\mathfrak{p}$ de $G$ défini par les conditions

$$x \in H_\mathfrak{p} \quad \rightleftharpoons \quad \{x^+, x^- \notin \mathfrak{p}\}$$

est un sous-groupe isolé et coréticulé de $G$ tel que $G/H_\mathfrak{p} = G_\mathfrak{p}$ soit totalement ordonné. L'homomorphisme correspondant à $\mathfrak{p}$ est alors l'application canonique $\varphi_\mathfrak{p}$ de $G$ sur $G_\mathfrak{p}$.

Réciproquement, si $\varphi$ est un homomorphisme coréticulé de $G$ sur le groupe totalement ordonné $\Gamma$, le sous-ensemble $\mathfrak{q}$ de $G_+$ défini par

$$x \in \mathfrak{q} \quad \rightleftharpoons \quad \{x \in G_+ \text{ et } \varphi(x) > 0\}$$

est un $t$-idéal premier de $G$ tel que $\varphi^{-1}(0) = H_\mathfrak{q}$ : on peut donc identifier $\varphi$ à $\varphi_\mathfrak{q}$.

Parmi les $t$-idéaux premiers de $G$, certains sont particulièrement remarquables, ce sont ceux que l'on peut définir à partir des filets minimaux de $G$ (*voir* [4], chap. II).

$G$ étant réticulé, rappelons que l'on appelle *filets* de $G$ les classes d'équivalence définies sur l'ensemble $G_+$ par la relation :

$$a \equiv b \quad \rightleftharpoons \quad \{\inf(a, x) = 0 \rightleftharpoons \inf(b, x) = 0 \quad (\forall x \in G_+)\}.$$

$\overline{a}$ désigne le filet auquel appartient l'élément $a$ de $G_+$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des filets de $G$ est ordonné par la relation

$$\overline{a} \leqq \overline{b} \quad \rightleftharpoons \quad \{\inf(b, x) = 0 \rightarrow \inf(a, x) = 0 \quad (\forall x \in G)\}.$$

$\mathcal{F}$ forme alors un réseau admettant pour plus petit élément le filet $\overline{0}$. On dit que le filet $\overline{a}$ est *minimal* si l'on a les relations

$$\overline{a} \neq \overline{0} \qquad \text{et} \qquad \overline{x} < \overline{a} \rightarrow \overline{x} = \overline{0}.$$

$\overline{a}$ étant un filet minimal de $G$, on peut lui associer le $t$-idéal premier $\mathfrak{p}_{\overline{a}}$ ainsi défini

$$x \in \mathfrak{p}_{\overline{a}} \quad \rightleftharpoons \quad \inf(a, x) > 0.$$

On voit aisément à partir de la théorie des réalisations que pour qu'un $t$-idéal premier puisse être défini à partir d'un filet minimal, il faut et il suffit qu'il soit maximal et qu'il contienne un élément $a$ tel que $\mathfrak{p}$ soit le seul $t$-idéal premier maximal contenant $a$. On a alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\overline{a}}$.

Si $G$ est un groupe totalement ordonné, on partage $G_+$ en classes d'équivalences dites *étages* de $G$. Deux éléments $a$ et $b$ de $G$ sont dits appartenir à un même étage [4] si l'on peut trouver deux entiers strictement positifs $m$ et $n$ tels que $b \leqq ma$ et $a \leqq nb$. On désigne par $\mathcal{E}(a)$ l'étage défini par $a$. L'ensemble des étages de $G$ est totalement ordonné par la relation

$$\mathcal{E}(a) < \mathcal{E}(b) \quad \rightleftharpoons \quad \{\mathcal{E}(a) \neq \mathcal{E}(b) \text{ et } a < b\}.$$

THÉORÈME 2. — *Les seuls groupes totalement ordonnés et complètement réticulés distincts de* $\{0\}$ *sont le groupe additif des entiers ordinaires et le groupe additif des nombres réels.*

Soit $G$ un groupe totalement ordonné non archimédien (c'est-à-dire qui n'est pas isomorphe à un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{R}$ des nombres réels). On peut trouver des éléments $a$ et $b$ de $G_+$ tels que

$$0 < a, b \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}(a) < \mathcal{E}(b).$$

L'ensemble $(na)$ ($n$ parcourant l'ensemble $\mathbf{Z}_+$ des entiers ordinaires positifs ou nuls) est majoré par $b$. Il n'admet cependant pas de borne supérieure car, s'il est majoré par $c$, il est encore majoré par $c - a < c$.

---

(4) *Voir* [5].

Un groupe totalement ordonné et complètement réticulé $G$ est donc archimédien. Par suite, on peut le considérer comme un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Si $G$ est discret, il est soit trivial, soit isomorphe à $\mathbf{Z}$. Supposons qu'il ne soit pas discret. Il est alors dense dans $\mathbf{R}$. Supposons-le distinct de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$, $a \notin G$. L'ensemble des éléments de $G$ majorés par $a$ dans $\mathbf{R}$ est encore majoré dans $G$, donc admet une borne supérieure $a'$ dans $G$. On a par hypothèse $a \neq a'$ et, $G$ étant dense dans $\mathbf{R}$, il y a entre $a$ et $a'$ une infinité d'éléments de $G$, ce qui entraîne une contradiction. Si $G$ n'est pas discret, on a donc $G = \mathbf{R}$, d'où le théorème.

Corollaire. — *Si $\mathfrak{p}$ est un t-idéal premier du groupe complètement réticulé $G$ tel que $H_\mathfrak{p}$ soit une bande, il est minimal.*

En effet, $G_\mathfrak{p}$ est alors un groupe totalement ordonné complètement réticulé, donc archimédien. Raisonnons par l'absurde : Soit $\mathfrak{q}$ un $t$-idéal premier de $G$ tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. On a $\mathrm{H}_\mathfrak{q} \supset \mathrm{H}_\mathfrak{p}$ et $\mathrm{H}_\mathfrak{q} \neq \mathrm{H}_\mathfrak{p}$. Donc $\varphi_\mathfrak{p}(\mathrm{H}_\mathfrak{q})$ est un sous-groupe isolé non trivial du groupe archimédien $G_\mathfrak{p}$, ce qui est absurde. D'où le corollaire.

Si $\mathfrak{p}$ est un $t$-idéal premier du groupe complètement réticulé $G$, nous allons chercher quelles conditions doit remplir $\mathfrak{p}$ pour que $G_\mathfrak{p}$ soit complètement réticulé et $\varphi_\mathfrak{p}$ une application complètement réticulée, c'est-à-dire pour que $H_\mathfrak{p}$ soit une bande de $G$. Pour cela nous allons d'abord montrer le :

Théorème 3. — *$G$ étant un groupe complètement réticulé, tout t-idéal premier $\mathfrak{p}$ de $G$ tel que $H_\mathfrak{p}$ soit une bande est un t-idéal premier maximal.*

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $t$-idéal premier $\mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. On a $H_\mathfrak{m} \subset H_\mathfrak{p}$, $H_\mathfrak{m} \neq H_\mathfrak{p}$. Désignons par $\psi$ l'homomorphisme canonique coréticulé de $G_\mathfrak{m} = G/H_\mathfrak{m}$ sur $G_\mathfrak{p} = G/H_\mathfrak{p}$. On a $\varphi_\mathfrak{p} = \psi\varphi_\mathfrak{m}$.

Pour tout $x \in G$, on posera

$$\overline{x} = \varphi_\mathfrak{m}(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{x}} = \varphi_\mathfrak{p}(x) = \psi(\overline{x}).$$

$\mathfrak{m}$ n'étant pas un $t$-idéal premier minimal de $G$, $G_\mathfrak{m}$ n'est pas archimédien et, par suite, a au moins deux étages distincts de $\mathcal{E}(\overline{0})$. Soit $a \in G$ tel que $\overline{\overline{a}} > 0$. En vertu du théorème 2, $G_\mathfrak{p}$ est archimédien et, par suite ([1]), $\mathcal{E}(\overline{a})$ est un étage maximal de $G_\mathfrak{m}$. Le noyau $\overline{H}_\mathfrak{p}$ de $\psi$ est ainsi défini

$$\overline{x} \in \overline{H}_\mathfrak{p} \quad \rightleftharpoons \quad \mathcal{E}(|\overline{x}|) < \mathcal{E}(\overline{a}).$$

On voit par suite que le sous-ensemble $\overline{H}_\mathfrak{p}$ de $G_\mathfrak{m}$ est majoré par $\overline{a}$ et n'est pas borné supérieurement.

Soit $\overline{x} \in \overline{H}_\mathfrak{p}$. On a $\overline{x} < \overline{a}$ et, par suite, $\varphi_\mathfrak{m}(x) < \varphi_\mathfrak{m}(a)$. Il existe donc $h \in H_\mathfrak{m}$ tel que $a > x + h = y$.

Donc toute classe $\overline{x}$ appartenant à $\overline{H}_\mathfrak{p}$ peut être représentée par un élément, $y$ tel que $y < a$. On peut donc poser

$$\overline{H}_\mathfrak{p} = (\overline{y}_\iota)_{\iota \in I}, \qquad \text{avec} \quad y_\iota < a \; (\forall \iota \in I).$$

Le sous-ensemble $(y_\iota)_{\iota\in I}$ de $G$ étant majoré par $a$ admet une borne supérieure $y$. Comme $H_\mathfrak{p}$ est une bande de $G$, on a $y\in H_\mathfrak{p}$ et par suite $\overline{y}\in\overline{H}_\mathfrak{p}$. Les relations $\overline{y}_\iota\leqq\overline{y}$ montrent alors que $\overline{H}_\mathfrak{p}$ admet $\overline{y}$ pour plus grand élément, ce qui contredit le fait que $\overline{H}_\mathfrak{p}$ n'est pas borné. D'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Si $G$ est un groupe complètement réticulé, tout t-idéal premier $\mathfrak{p}$ de $G$, tel que $H_\mathfrak{p}$ soit une bande, est à la fois maximal et minimal.*

Ceci posé, nous pouvons maintenant montrer le :

THÉORÈME 4. — *$G$ étant un groupe complètement réticulé, pour que le sous-groupe $H_\mathfrak{p}$ de $G$ correspondant au t-idéal premier $\mathfrak{p}$ soit une bande, il faut et il suffit que $\mathfrak{p}$ soit défini par un filet minimal de $G$.*

*La condition est suffisante.* — Supposons que l'application $\varphi_\mathfrak{p}$ soit définie par le filet minimal $\overline{a}$. On a, par définition,

$$x\in H_\mathfrak{p} \quad\rightleftharpoons\quad \{\inf(x^+, a)=\inf(x^-, a)=0\}.$$

Soit $y=\sup(y_\iota)_{\iota\in I}$, avec $(y_\iota)_{\iota\in I}\subset H_\mathfrak{p}$.

On a $y^+=\sup(x_\iota^+)$ et les relations $\inf(x_\iota^+, a)=0$ entraînent $\inf(y^+, a=0)$ (*voir*, par exemple, [2], p. 19).

On montrerait de même que $\inf(y^-, a)=0$. Donc $y\in H_\mathfrak{p}$ et $H_\mathfrak{p}$ est une bande.

*La condition est nécessaire.* — Supposons que $H_\mathfrak{p}$ soit une bande. D'après le théorème 3, $\mathfrak{p}$ est un $t$-idéal premier maximal de $G$. Soit $(\mathfrak{m}_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble des $t$-idéaux premiers maximaux de $G$. A tout indice $\iota\in I$ est associé un homomorphisme coréticulé $x\to x(\iota)$ de $G$ sur un groupe totalement ordonné $G_\iota$. Si l'on considère le produit direct ordonné $\Gamma=\prod_{\iota\in I} G_\iota$, on sait (*voir* [6]) que l'on peut considérer $G$ comme un sous-groupe coréticulé de $\Gamma$ en identifiant l'élément $x$ de $G$ à l'élément $\prod_{\iota\in I} x(\iota)$ de $\Gamma$. On obtient ainsi une *réalisation* de $G$ (comme sous-groupe coréticulé d'un produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés). Soit $\alpha\in I$ tel que $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_\alpha$.

Soit $a\in\mathfrak{p}$. [On a alors $a(\alpha)>0$] et soit $A$ le sous-ensemble de $G_+$ ainsi défini

$$x\in A \quad\rightleftharpoons\quad \{0\leqq x\leqq a \text{ et } x(\alpha)=0\};$$

$A$ n'est pas vide puisque $0\in A$. Il est majoré par $a$, donc, puisque $G$ est complètement réticulé, $A$ est borné supérieurement par $a'=\sup(A)$. Les éléments $x$ de $G$ tels que $x(\alpha)=0$ sont précisément les éléments de la bande $H_{\mathfrak{p}}$. Par suite $A \subset H_{\mathfrak{p}}$ entraîne $a' \in H_{\mathfrak{p}}$ et $a'(\alpha) = 0$. On a donc

$$a = a' + a'', \qquad \text{avec} \quad a'' > 0 \qquad \text{et} \qquad a''(\alpha) = a(\alpha) > 0.$$

Supposons qu'il existe un indice $\beta \in I$ tel que

$$\beta \neq \alpha \qquad \text{et} \qquad a''(\beta) > 0.$$

Comme les $t$-idéaux premiers maximaux $\mathfrak{m}_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\beta$ sont distincts, $\exists\, b \in \mathfrak{m}_\beta$ tel que $b \notin \mathfrak{m}_\alpha$. Posons $c = \inf(a'', b) > 0$. On a

$$c(\beta) > 0, \qquad c(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad a'' > c > 0.$$

On peut donc écrire

$$a'' = c + a''' \qquad (a''' > 0).$$

Par suite,

$$a = a' + a''' + c.$$

On a donc les relations

$$a' + c < a \qquad \text{et} \qquad (a' + c)(\alpha) = a'(\alpha) + c(\alpha) = 0;$$

donc $a' + c \in A$, ce qui contredit l'égalité $a' = \sup(A)$.

On voit donc qu'un tel indice $\beta$ ne peut exister; et $\alpha$ est le seul élément $\iota$ de $I$ tel que $a''(\iota) > 0$. Le filet $\overline{a}''$ est donc minimal et définit le $t$-idéal premier $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{p}$. D'où le théorème.

Rappelons (*voir* [4]) qu'une réalisation d'un groupe réticulé $G$ dans un produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés est dite *irréductible* si pour tout indice $\alpha \in I$, l'homomorphisme canonique de $G$ dans $\Gamma_\alpha = \prod_{\iota \neq \alpha} G_\iota$ a un noyau non nul. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que chacun des homomorphismes coréticulés $\varphi_\iota$ de $G$ sur $G_\iota$ soit défini par un filet minimal.

Si $G$ est complètement réticulé, nous dirons qu'une réalisation de $G$ dans $\Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ est une *réalisation complètement coréticulée* si elle définit $G$ comme un *sous-groupe complètement coréticulé* de $\Gamma$, c'est-à-dire tel que tout sous-ensemble $A$ de $G$ majoré dans $\Gamma$ ait sa borne supérieure (dans $\Gamma$) contenue dans $G$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que chaque groupe $G_\iota$ soit complètement réticulé et chaque homomorphisme $\varphi_\iota$ complètement coréticulé. On déduit donc du théorème 4 le :

Corollaire 1. — *Pour que le groupe complètement réticulé $G$ admette une réalisation complètement coréticulée, il faut et il suffit que $G$ admette une réalisation irréductible.*

On sait, d'autre part [4], que si un groupe réticulé admet une réalisation irréductible, cette dernière est unique (elle est obtenue en prenant tous les homomorphismes coréticulés de $G$ définis par des filets minimaux). On déduit donc immédiatement des théorèmes 2 et 4 le :

COROLLAIRE 2. — *Un groupe complètement réticulé $G$ admet au plus une réalisation complètement coréticulée. Cette réalisation (si elle existe) est irréductible et les groupes totalement ordonnés qui la définissent sont isomorphes au groupe additif des entiers ordinaires ou au groupe additif des nombres réels.*

COROLLAIRE 3. — *Si le groupe complètement coréticulé $G$ n'admet pas de filet minimal, aucun homomorphisme de $G$ sur un groupe totalement ordonné n'est complètement coréticulé.*

Nous allons maintenant montrer qu'il existe des groupes complètement réticulés qui n'admettent pas de réalisation complètement coréticulée.

Rappelons (*voir* [3], [7] et [8]) qu'un espace topologique $E$ est dit *stonien* s'il est compact et si le groupe ordonné $G$ de toutes les fonctions continues sur $E$ à valeurs réelles est complètement réticulé. Il est facile de voir que les filets minimaux de $G$ correspondent aux points isolés de $E$ :

Pour que deux éléments $f$ et $g$ de $G_+$ appartiennent à un même filet, il faut et il suffit que $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)$. D'autre part,

$$\bar{f} \leqq \bar{g} \quad \rightleftharpoons \quad g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0).$$

Si $a$ est un point isolé de $E$, la fonction caractéristique du sous-ensemble $\{a\}$ est donc un élément de $G_+$ définissant un filet minimal.

Montrons, d'autre part, que si $f \in G_+$ est tel qu'il existe deux points distincts $a$ et $b$ avec $f(a)$, $f(b) > 0$, le filet $\bar{f}$ n'est pas minimal; $E$ étant compact est complètement régulier et, par suite, il existe un élément $g$ de $G_+$ tel que $g(a) = 1$ et $g(b) = 0$. Soit $h = \inf(f, g)$. On voit que $\bar{f} > \bar{h} > \bar{0}$; le filet $\bar{f}$ n'est donc pas minimal.

On voit donc que pour que le filet $\bar{f}$ soit supérieur ou égal à un filet minimal, il faut et il suffit qu'il existe un point isolé $a$ de $E$ tel que $f(a) > 0$.

On sait, d'autre part [4], que pour que le groupe réticulé admette une réalisation irréductible, il faut et il suffit que chaque filet soit supérieur ou égal à un filet minimal. On en déduit que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'espace stonien $E$ soit discret, donc composé d'un nombre fini de points. On a donc le :

THÉORÈME 5. — *Pour que le groupe complètement réticulé $G$ formé par les fonctions numériques continues sur l'espace stonien $E$ admette une réalisation complètement coréticulée, il faut et il suffit que $E$ soit fini.*

Si l'on enlève d'un espace stonien non discret $E$ ses points isolés (qui sont en nombre fini) on obtient un espace stonien $E'$ sans point isolé. Le groupe complètement réticulé $G'$ des fonctions numériques continues sur $E'$ n'admet pas de filet minimal, donc *il n'existe aucune application complètement coréticulée du groupe complètement réticulé $G'$ sur un groupe totalement ordonné.*

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. VI.
[2] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. II.
[3] J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone* (*Summa Brasiliensis Math.*, t. 2, 1951, p. 151-182).
[4] P. Jaffard, *Contribution à l'étude des groupes ordonnés* (*J. Math. pures et appl.*, t. 32, 1953, p. 203-280).
[5] W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie* (*J. Reine ang. Math.*, t. 167, 1931, p. 160-196).
[6] P. Lorenzen, *Abstrake Begründung der multiplicativen Idealtheorie* (*Math. Z.*, t. 45, 1939, p. 533-553).
[7] H. Nakano, *Ueber das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum* (*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 17, 1941, p. 308-310).
[8] M. H. Stone, *Boundedness properties in function-lattices* (*Canad. J. Math.*, t. 1, 1949, p. 176-186).

Manuscrit reçu en mars 1956.